1ª Prova de MM-720

Análise no $\mathbb{R}^n$

13/abril/2023

Nome: Gabarito RA: ______

Boa prova!

1. Seja $f : U \to \mathbf{R}^m$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbf{R}^m$ e $\varphi : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ de classe C^1, com $\varphi(f(x)) = 0$ para todo $x \in U$. Dado $a \in U$, se $\nabla\varphi(b) \neq 0$ com $b = f(a)$ então $\det f'(a) = 0$.

2. Mostre que se todo conjunto homeomorfo a $X \subset \mathbf{R}^n$ é limitado então X é compacto.

3. Seja $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ um caminho diferenciável. Se $a \in I$ é ponto de acumulação de um conjunto $f^{-1}(v)$, para algum $v \in \mathbf{R}^n$ então $f'(a) = 0$.

4. Seja $K \subset \mathbf{R}^n$. Mostre que se K for compacto então toda função contínua $f : K \to \mathbf{R}^m$ é uniformemente contínua. Vale a recíproca?

5. Para $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbf{N}$, seja $B : \mathbf{R}^{n_1} \times \mathbf{R}^{n_2} \to \mathbf{R}^{n_3}$ uma transformação bilinear, $T : \mathbf{R}^{n_2} \to \mathbf{R}^{n_2}$ uma transformação linear e $f : \mathbf{R}^{n_3} \to \mathbf{R}^{n_4}$ uma aplicação de classe C^2. Descreva, interpretando claramente suas componentes, a segunda derivada da composição $f(B(x, Ty)) : \mathbf{R}^{n_1} \times \mathbf{R}^{n_2} \to \mathbf{R}^{n_4}$. Verifique se essa segunda derivada é simétrica e por que.

Q1: Se $\varphi(f(x)) \equiv 0$ então sua diferencial $d(\varphi(f(x))) = 0$ (transf. linear nula) $\forall x$. Mas a regra da cadeia diz que

$$d(\varphi(f(x))) = \left[\varphi'(f(x))\right]_{1\times n} \cdot \left[f'(x)\right]_{n\times n}.$$

Assim, se $\varphi'(f(a)) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Ker}\,(f'(a))^T \neq \{0\} \Leftrightarrow \det f'(a) = 0$. ∎

Q2: a) $i : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow i(X) \subset \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo
$x \longmapsto x$
com $i(X) = X \Rightarrow X$ é ltdo.

b) Suponha que X não seja fechado, i.e, suponha que $\exists\, (x_n) \in X$ com $x_n \to x_0 \notin X$. SPG suponha $x_0 = 0$, senão, componha com a translação $x \mapsto x - x_0$ que é um homeomorfismo.

$$f : X \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \longmapsto \frac{x}{\|x\|^2}$$

é um homeomorfismo de X com $f(X)$
$(f \circ f = \mathrm{Id}(x))$.

Como $x_n \to 0$, $|f(x_n)| \to +\infty$, absurdo porque $f(X)$ é ltdo por hipótese. ∎

Q3: Esse exercício é a versão unidimensional do exercício 4 da lista 2 (ver tb. ex. 1.1 pág 110 Cap. II do Elon).

Suponha $a_n \in f^{-1}(v)$ com $a_n \to a$. Então

$$f(a_n) = f(a) + f'(a)(a_n - a) + r(a_n - a)$$

Por continuidade $\underbrace{f(a_n)}_{\text{constante}} \to f(a) \Rightarrow f(a) = f(a_n)\ \forall n.$

$\therefore$

$$f'(a)(a_n - a) = -r(a_n - a)$$

$$\Rightarrow \lim \left| \frac{f'(a)\cancel{(a_n - a)}}{\cancel{(a_n - a)}} \right| = -\lim \left| \frac{r(a_n - a)}{|a_n - a|} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(a) = 0 \quad \blacksquare$$

Q4] Teo 21 Cap 1 do Elon. Demonstra por absurdo.

Não vale a recíproca: Se $X = \mathbb{N}$ (fechado, discreto e não limitado)

e $f: X \to \mathbb{R}^n$ então f é uniformemente contínua.

Q5] $T' = T$ e $T'' = 0$

$$B'(a,b)(u_1,u_2) = B(a,u_2) + B(u_1,b) \in \mathbb{R}^{n_3}$$

$u_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $u_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$

$$B''(a,b)((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = B(u_1,v_2) + B(v_1,u_2) \in \mathbb{R}^{m_3}$$

$$f'(c): \mathbb{R}^{m_3} \to \mathbb{R}^{m_4} \qquad f''(c): \mathbb{R}^{m_3} \times \mathbb{R}^{m_3} \to \mathbb{R}^{m_4}.$$

Então:

$$\left[f(B(a,Tb))\right]'(u_1,u_2) = \frac{\partial f(B(a,Tb))}{\partial u_1} + \frac{\partial f(B(a,Tb))}{\partial u_2}$$

$$= f'(B(a,Tb)) \cdot B'(a,Tb) \cdot (Id \times T)(u_1,u_2)$$

$$= f'(B(a,Tb)) \cdot \left[B(a,Tu_2) + B(u_1,Tb)\right]$$

E a segunda derivada:

$$\frac{\partial}{(v_1,v_2)}\left[f(B(a,Tb))\right]'(u_1,u_2)$$

$$= f''(B(a,Tb))\Big(\big(B(a,Tu_2) + B(u_1,Tb)\big),\big(B(a,Tv_2) + B(v_1,Tb)\big)\Big)$$

$$+ f'(B(a,Tb)) \cdot \underbrace{B''(a,Tb)(u_1,u_2)(v_1,v_2)}_{\shortparallel} \in \mathbb{R}^{m_4}$$

$$B(u_1,Tv_2) + B(v_1,Tu_2) \quad \text{(independe de } \underline{a} \text{ e } \underline{b}\text{)}$$

Obs: f'' é simétrica pelo Teo. Schwatz. Portanto trocar (u_1,u_2) por (v_1,v_2) não afeta a 2ª derivada.