Apresentação

A pesquisa e ensino de matemática pode ser dividida, a grosso modo em três grandes áreas: análise, geometria e álgebra. Esses nomes tem muito mais razões históricas e, por isso, atualmente seu estudo e pesquisa não correspondem mais às razões de suas origens. Assim, por exemplo, "Geometria"cuja origem grega significava "medida (*metria*) da terra (*geo*)", desenvolveu-se em outras direções muito mais abstratas, gerais e interessantes. Os problemas originais de medidas de terrenos, há séculos foram resolvidos e hoje a geometria é o nome que se dá ao estudo e pesquisa em superfícies, reais ou complexas, de dimensões finitas ou não, com ou sem medidas de distância, com ou sem geodésicas (que são curvas de comprimentos mínimos ligando dois pontos nessa superfície), incluindo a possibilidade de deformações sem cortes que transformam uma superfície em outra, e muitos outros problemas.

A álgebra tem origem na aritmética, onde dado um conjunto, podemos fazer operações envolvendo um par (ou mais) de elementos, dando como "resultado", ou imagem dessa função, um outro elemento deste mesmo conjunto. O exemplo bem conhecido é com dois números naturais, a operação interna neste conjunto pode ser tomada como a soma ou produto. Em geral, o estudo das propriedades dessas operações incluem questões do tipo: essa operação é comutativa? É inversível? Tem elemento neutro? Quais e quantos? Como ficam funções entre espaços com essas operações internas? Embora para números reais a resposta é óbvia, para produtos de matrizes, por exemplo, não valem todas essas propriedades. Concluindo: esse estudo geral de propriedades de operações internas em conjuntos é o objeto de estudo dessa grande área da matemática que hoje chamamos de álgebra.

A análise surgiu mais recentemente (século XVII e XVIII) e inicialmente se propunha estudar fenômenos de variação infinitamente pequenos ou infinitamente grande. É, portanto uma área que historicamente exige conceitos mais elaborados, como: o que significa "infinitamente grande"ou "infinitamente pequeno". Essa área fez nascer o que hoje conhecemos como cálculo. E, da mesma maneira que aconteceu com as outras 2 grandes áreas da matemática como sucintamente escrito acima, a partir daí decolou por conta própria para o conhecimento de propriedades em estruturas mais gerais e mais abstratas, por exemplo: análise funcional, equações diferenciais parciais (abreviadas como EDP), sistemas dinâmicos, dentre outros.

Atualmente no estudo de matemática frequentemente essas três grandes áreas se entrelaçam e os alunos ouvirão em breve expressões neste contexto misto, mesmo que sejam em disciplinas mais avançadas: topologia algébrica, análise geométrica, geometria algébrica, ou ainda em contextos mais particulares: a inversibilidade local de aplicações (análise) depende de características algébricas de uma diferencial (álgebra), i.e. da matriz jacobiana, onde as entradas são derivadas parciais.

As disciplinas comumentes chamadas de Cálculo (I, II, III ou outros nomes, de acordo com a faculdade) pertencem então à grande área chamada de análise.

Nossa intenção com essas notas é complementar os livros atuais de Cálculo I para alunos do primeiro ano em ciências exatas. A longo prazo, passo a passo, na medida em que forem escritas e com a contribuição de outros professores, essas notas podem evoluir para um texto mais definitivo. Em breve, na medida em que formos avançando na disciplina em 2012, lançarei mais tópicos.

A intenção é manter esse material permanentemente disponível na internet, em todas as etapas de sua construção, para os alunos e outros interessados. Por se tratar de uma primeira versão, qualquer comentário, correção e sugestão é bem vindos.

Bom estudo!

Paulo Ruffino
ruffino@ime.unicamp.br

UNICAMP, março de 2012.

Princípio da casa dos pombos

Esse princípio, apesar de bastante intuitivo, tem várias aplicações surpreendentes. O princípio diz que dado um conjunto A com $n+1$ elementos e um conjunto B com n elementos, $n \geq 1$ então para toda função $f : A \to B$, existe (pelo menos) um elemento b em B que é mapeado por dois elementos distintos de A (e portanto f não é injetora).

Esse princípio tem como consequência o nome tradicional que foi atribuído a ele de "casa do pombo": que diz que se abrigarmos $n+1$ pombos (elementos do conjunto A) em n caixotes (elementos do conjunto B), teremos pelo menos um caixote com mais de um pombo. Esse princípio foi enunciado pela primeira vez por Dirichlet, matemático alemão, na forma de ocupação de gavetas (Schubfach).

Exemplo 0.1 (Plano pintado com 2 cores)**.**

Suponha que todos os pontos do plano $\mathbf{R}^2$ sejam pintados, cada um com uma dentre 2 cores, verde (V) e amarelo (A), digamos. O problema é: como mostrar que existem 4 pontos de mesma cor que formam os vértices de algum retângulo?

Tome três retas horizontais e 9 retas verticais. Para cada uma das retas verticais, nos pontos de interseção com as retas horizontais existe uma configuração de cores, digamos de baixo para cima (VVV), (VVA), (VAV), (VAA), (AVV), (AVA), (AAV), (AAA). Como só existem 8 configurações possíveis e temos 9 retas verticais, existe pelo menos uma configuração que se repete. Mas em todas as configurações existe a repetição de uma cor. Assim, é possível escolher 4 pontos de intersecção onde as configurações se repetem que tem a mesma cor, além disso, são vértices de um retângulo.

Observação: Note que quando dizemos que em todas as configurações pelo menos uma cor se repete, estamos usando mais uma vez o princípio da casa do pombo para todas as configurações, que são na verdade, cada uma delas, uma função $f : \{V, A\} \to$ $\{$ Ponto 1, Ponto 2 e Ponto 3 $\}$.

$\square$

Exercício 0.1. *Conclua que existem infinitos retângulos com vértices da mesma cor. A base precisa ser paralela ao eixo x?*

Exercício 0.2. *Mostre que se os pontos do plano forem pintados com n cores (ao invés de 2 como no exemplo), ainda assim existem infinitos retângulos com vértices de mesma core.*

Exercício 0.3. *Repita os exercícios acima para vértices de cubos no espaço $\mathbf{R}^3$.*