MA 553 A, Segundo Semestre 2019, Lista 2

Ex. 1. Se n é um número natural ímpar, mostrar que os números 2, 4, 6, $\ldots$, $2m$, formam um sistema completo de resíduos módulo m.

Ex. 2. Mostrar que se $n > 2$, os números $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2$ não formam um sistema completo de resíduos módulo n.

Ex. 3. Seja $p > 2$ um primo e seja $r_1, \ldots, r_{p-1}$ um sistema reduzido de resíduos módulo p, mostrar que $r_1 r_2 \cdots r_{p-1} \equiv -1 \pmod{p}$.

Ex. 4. Se $p > 2$ é primo e $r_1, \ldots, r_p$; $s_1, \ldots, s_p$ são dois sistemas completos de resíduos módulo p, mostrar que os números $r_1 s_1$, $\ldots$, $r_p s_p$ não formam sistema completo de resíduos módulo p.

Ex. 5. Calcular a maior potência de 5 que divide 600!

Ex. 6. Mostrar que se p é primo então o coeficiente binomial $\binom{p^k}{n}$ é divisível por p para todo n, $1 \leq n \leq p^k - 1$. Mostrar ainda que $\binom{p^k-1}{n} \equiv (-1)^n \pmod{p}$ para todo n.

Ex. 7. Mostrar que para todo $k \in \mathbb{N}$ o número $5^k - 1$ é divisível por 4.

Ex. 8. Resolver as congruências: a) $5x \equiv 1 \pmod{7}$; b) $6x \equiv 2 \pmod{11}$;
c) $47x \equiv 85 \pmod{100}$; d) $x^2 + 5x + 6 \equiv 0 \pmod{7}$.

Ex. 9. Calcular a função de Euler $\varphi(m)$ para $m = p$ primo, $m = p_1 p_2$ onde p_1 e p_2 são primos, $m = 95$. Encontrar todo n tal que $\varphi(n)$ é ímpar.

Ex. 10. Mostrar que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$ para todo número natural a tal que $(a, m) = 1$ mas m não é primo. Dica: tenta com $m = 561 = 11 \times 51$.

Ex. 11. Sejam r e s números naturais e $t = (r, s)$. Mostrar que $a^r \equiv 1 \equiv a^s \pmod{m}$ implica que $a^t \equiv 1 \pmod{m}$.

Ex. 12. Demonstrar que 42 divide $n^7 - n$ para todo n número inteiro.

Ex. 13. Encontrar o resto do número a na divisão por b onde
a) $a = 3^{31}$, $B = 7$; b) $a = 2^{35}$, $b = 7$; c) $a = 128^{129}$, $b = 17$; d) $a = 29^{25}$, $b = 11$;
e) $a_0 = 4$, $a_{n+1} = 4^{a_n}$, $a = a_{100}$, $b = 7$.

Ex. 14. a) Encontrar todos os inteiros positivos a tais que 17 divide $2^a + 2$. (Resposta: $a \equiv 5 \pmod{8}$.)
b) Encontrar os inteiros positivos b tais que 17 divide $2^{2^b} + 2$. (Resposta: $b = 2$.)

Ex. 15. Mostrar que se $p > 3$ é primo e $2p + 1$ também é primo, então $4p + 1$ é composto.

Ex. 16. Encontrar os últimos dois algarismos (base 10) de $(207^{19} - 41)^{10}$.

Ex. 17. Encontrar os primos p que dividem $7^p + 13$.

Ex. 18. Se $(n, 10) = 1$ mostrar que $n^{101} \equiv n \pmod{1000}$.

Ex. 19. Mostrar que para n ímpar, n divide $2^{n!} - 1$. (Use que $\varphi(n)/n!$.)

Ex. 20. Resolver os sistemas de congruências:
a) $x \equiv 1 \pmod{2}$, $x \equiv 2 \pmod{3}$, $x \equiv 1 \pmod{5}$, $x \equiv 5 \pmod{7}$;
b) $x \equiv 1 \pmod{2}$, $x \equiv 2 \pmod{3}$, $x \equiv 1 \pmod{5}$, $x \equiv 5 \pmod{7}$, $x \equiv 2 \pmod{9}$;
c) $3x \equiv 7 \pmod{5}$, $x \equiv 1 \pmod{4}$, $5x \equiv 2 \pmod{11}$.

Ex. 21. Mostrar que o sistema de congruências $x \equiv 29 \pmod{52}$, $x \equiv 19 \pmod{72}$, não tem soluções inteiras.

Ex. 22. Usando o Teorema Chinês sobre o resto, mostrar que:
a) Para todo n existem n números naturais consecutivos tais que cada um deles tenha pelo menos 2019 divisores primos distintos.
b) Para todo n existem n números naturais consecutivos tais que cada um deles tenha pelo menos 2019 divisores primos, e cada um desses divisores primos aparece no respectivo número com expoente exatamente 2019.

Ex. 23. Se p é primo mostrar que $\sum_{i=0}^{n} \varphi(p^i) = p^n$.

Ex. 24. Encontrar os inteiros n cujo resto na divisão por 2, 3, 6, 12, seja 1, 2, 5, 5, respectivamente. (Yih-hing, c. 717 AD).

Ex. 25. Encontrar os $n \in \mathbb{N}$ para os quais $2^4 + 2^7 + 2^n$ é um quadrado de número inteiro. (Dica: Mostrar que $n > 4$.)

Ex. 26. Resolver a congruência polinomial
a) $x^3 + 2x - 3 \equiv 0 \pmod{9}$;
b) $x^2 + x + 47 \equiv 0 \pmod{7^3}$;
c) $x^2 + x + 7 \equiv 0 \pmod{81}$;
d) $x^3 + x^2 - 5 \equiv 0 \pmod{7^3}$.

Ex. 27. Resolver a congruência $5x^3 - 2x + 1 \equiv \pmod{8575}$.

Ex. 28. Se $a \in \mathbb{Z}$ e $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, mostrar que $f(a) \equiv r \pmod{m}$ onde r é o resto de $f(a)$ na divisão por $x - a$.

Ex. 29. Se $f \in \mathbb{Z}[x]$ e $f(0)$ e $f(1)$ são ímpares mostrar que f não possui raízes inteiras.

Ex. 30. Mostrar que a equação $x^2 + y^2 = 110000$ não possui soluções em $\mathbb{Z}$.

Ex. 31. Resolver em $\mathbb{Z}$ o sistema $x + y + z = t, x^2 + y^2 + z^2 = t^2, x^3 + y^3 + z^3 = t^3$.

Ex. 32. Mostrar que se $a^2 + b^2 = c^2$, onde a, b, c são números inteiros, então um dos números é sempre divisível por 3, um por 4, um por 5 (não necessariamente distintos).

Ex. 33. Encontrar todas as ternas pitagóricas (a, b, c) que formam uma progressão aritmética.

Ex. 34. Mostrar que as equações

a) $5x^2 - 7y^3 = 9$; b) $x^2 - 2y^2 + 8z = 3$

não têm soluções em $\mathbb{Z}$. Dica: considerar os restos $\pmod{m}$ para um m apropriado.

Ex. 35. Mostrar que para todo n a equação $x^n + y^n = z^{n+1}$ possui uma infinidade de soluções. Dica: procure soluções com x/y inteiro.

Ex. 36. Seja $\varphi(n)$ a função de Euler, mostrar:

a) Se $n > 2$ então $\varphi(n)$ é par.

b) Existem infinitos n tais que 10 divide $\varphi(n)$.

c) $\varphi(2n) = 2\varphi(n)$ se n é par, e $\varphi(2n) = \varphi(n)$ se n é ímpar.

Ex. 37. Considerar as sequências $x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1}$, $x_1 = x_2 = 1$, e $y_{n+1} = 2y_n + 3y_{n-1}$, $y_1 = 1$, $y_2 = 7$.

a) Encontrar os termos gerais dessas sequências.

b) Encontrar todos os m e n tais que $x_m = y_n$.

c) Resolver (b) usando-se congruências módulo t, onde t é algum número "pequeno" adequado.

Ex. 38. Encontrar as ternas de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$ onde $|b - a| = 1$.

Ex. 39. Quais dos números a seguir são somas de dois quadrados de inteiros?

999, 9999, 1357, 343, 341, 2015, 2013, 2014, 257.