LOCAL: DME-UFCG, 20/06/2007, 14:00h

Equações de Navier-Stokes e o Fluxo de Fluidos Incompressíveis com Densidade Descontínua em Domínios do Plano

Marcelo M. Santos
Departamento de Matemática, IMECC–UNICAMP
msantos@ime.unicamp.br
http://www.ime.unicamp.br/˜msantos

Resumo

Faremos inicialmente uma breve dedução das equações de Navier-Stokes e falaremos sobre a existência de solução para o problema de Leray com densidade descontínua em domínios do plano. (O problema de Leray clássico consiste em mostrar a existência de solução para as equações de Navier-Stokes em domínios com canais retilíneos em que a velocidade é dada e é paralela (fluido de Poiseuille) nas extremidades dos canais.) Observaremos que o campo de velocidade apresenta unicidade de curvas integrais (estrutura Lagrangeana) ou, mais precisamente, que é um campo vetorial log-Lipschitziano, e mostraremos que a solução (velocidade–densidade) é uma solução renormalizada, no sentido de DiPerna-Lions. Para finalizar, discutiremos a existência de regiões no interior do domínio que separam os fluidos provenientes de canais distintos.

1 Equações de Navier-Stokes

Seja $\mathbf{v}(\cdot,t)$, $t \geq 0$, um campo de vetores num aberto Ω do $\mathbb{R}^n$ tal que para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ exista uma única curva integral $\mathbf{X}$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{X}(t),t), \quad t > 0 \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{x} \end{cases}$$

Então para cada $\Omega_0 \subset \Omega$ podemos definir $\Omega_t = \mathbf{X}(\Omega_0, t)$ e vale o seguinte teorema:

Theorem 1. (**Teorema do Transporte (TT)**). *Suponhamos que* $\mathbf{v} \in C^1(\Omega)$ *e seja* $f \in C^1(\Omega \times [0,\infty))$. *Então*

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} f(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} = \int_{\Omega}\left[\frac{Df}{Dt}(\mathbf{x},t) + (\operatorname{div}\mathbf{v})f\right]d\mathbf{x}$$

onde $\frac{Df}{Dt} := \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla f \equiv \frac{d}{dt}f(\mathbf{X}(t),t)$ *(derivada material).*

Ref. e.g. [Toscano]

A seguir consideramos um fluido em Ω com campo de velocidade $\mathbf{v}$ e densidade ρ suaves e supomos que o fluido é incompressível **(I)** i.e.

$$\int_{\Omega_t} d\mathbf{x} = \int_{\Omega_0} d\mathbf{x}, \quad \forall\ \Omega_t \subset \Omega$$

$$\iff \quad \frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} d\mathbf{x} = 0$$

$$\overset{\textbf{(TT)}}{\iff} \quad \int_{\Omega_t} \operatorname{div}\mathbf{v}\, d\mathbf{x} = 0$$

$$\iff \quad \boxed{\operatorname{div}\mathbf{v} = 0}$$

Princípios físicos

I) ***Conservação de massa*** $\displaystyle\int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x},t)dt = \int_{\Omega_0} \rho(\mathbf{x},0)$

$$\iff \qquad \frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} = 0$$

$$\overset{\textbf{(TT), (I)}}{\iff} \qquad \int_{\Omega_t} \tfrac{D\rho}{Dt} d\mathbf{x} = 0$$

$$\iff \qquad \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

i.e.

$$\rho_t + \mathbf{v}\cdot\rho = 0$$

ou

$$\boxed{\rho_t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0} \qquad \text{(equação da continuidade)}$$

já que $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$.

II) ***Conservação de momemtum (2a. Lei de Newton)***

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\rho(\mathbf{x},t)dt = \int_{\Omega_t} \mathbf{f}_{\text{ext}} + \mathbf{f}_{\text{int}}\, d\mathbf{x}$$

($\mathbf{f}_{\text{ext}}$ e $\mathbf{f}_{\text{int}}$ são densidades de forças externas e internas, respectivamente, atuando em Ω_t)

$$\overset{\textbf{(TT), (I)}}{\iff} \quad \int_{\Omega_t} \frac{D(\rho v_j)}{Dt} d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} f_j^{\text{e}} + f_j^{\text{i}}\, d\mathbf{x}, \quad j = 1, 2, \cdots$$

($\mathbf{v} = (v_1, \cdots, v_n)$, $\mathbf{f}_{\text{ext}} = (f_1^{\text{e}}, \cdots, f_n^{\text{e}})$, $\mathbf{f}_{\text{int}} = (f_1^{\text{i}}, \cdots, f_n^{\text{i}})$) logo

$$\begin{aligned}
(\rho v_j)_t + \mathbf{v}\cdot\nabla(\rho v_j) &= f_j^{\text{e}} + f_j^{\text{i}} \\
\rho_t v_j + \rho(v_j)_t + \mathbf{v}\cdot(\nabla\rho)v_j + \mathbf{v}\cdot\rho\nabla v_j &= f_j^{\text{e}} + f_j^{\text{i}} \\
\underbrace{(\rho_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\rho)}_{\text{zero (eq. cont.)}} v_j + \rho(v_j)_t + \rho\ \mathbf{v}\cdot\nabla v_j &= f_j^{\text{e}} + f_j^{\text{i}}
\end{aligned}$$

Em notação vetorial,

$$\boxed{\rho \mathbf{v}_t + \rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \mathbf{f}_{\text{ext}} + \mathbf{f}_{\text{int}}}$$

onde $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} := (\mathbf{v}\cdot\nabla v_1, \cdots, \mathbf{v}\cdot\nabla v_n)$. Fazemos mais restrições : Vamos supor que o fluido seja viscoso com viscosidade constante como função de $(\mathbf{x}, t)$, a qual denotaremos por μ, vamos tomar $\mathbf{f}_{\text{ext}}$ da forma gradiente de alguma função escalar (força conservativa) e $\mathbf{f}_{int}$ da forma $\mathbf{f}_{int} = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{v}$ (modelo) onde $p = p(\mathbf{x}, t)$ é a pressão do fluido no ponto $(\mathbf{x}, t)$ $(\Delta\mathbf{v} := (\Delta v_1, \cdots, \Delta v_n))$. Incorporando $\mathbf{f}_{\text{ext}}$ na notação de ∇p, obtemos assim o seguinte sistema de equações que modelam o fluido em Ω:

$$\begin{cases} \rho \mathbf{v}_t + \rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \nabla p = \mu\Delta\mathbf{v} \\ \nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \quad \rho_t + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0\,. \end{cases}$$

(equações ou sistema de Navier-Stokes)

Em estado estacionário, i.e. $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$, independente do tempo t, temos

$$(NS)_E \qquad \begin{cases} \rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \nabla p = \mu\Delta\mathbf{v} \\ \nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \quad \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0\,. \end{cases}$$

2 Problema de Leray

Colaboração: Farid Ammar Khodja

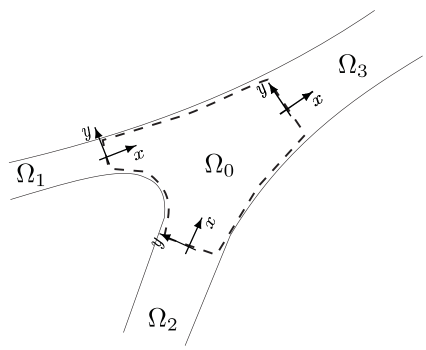
Seja Ω um aberto conexo ilimitado do plano da seguinte forma:

$$\Omega = \cup_{i=0}^{3} \Omega_i,$$

Ω_0 é limitado e, em sistemas de coordenadas cartesianas distintos,

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x < 0,\, y \in \Sigma_1\}, \\ \Omega_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x < 0,\, y \in \Sigma_2\}, \\ \Omega_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0,\, y \in \Sigma_3\}, \end{aligned}$$

com $\Sigma_i = (-d_i, d_i)$, $d_i > 0$, $i = 1, 2, 3$. ([Amick], *domínio admssível*)



Problema de Leray com densidade não constante (–, F. Ammar Khodja): Provar a existência de solução do sistema $(NS)_E$ tal que $\mathbf{v}|\Gamma = 0$ ("nonslip boundary condition") e

$$\begin{cases} \mathbf{v}(x,y) \to \mathbf{v}_i(y) \\ \rho(x,y) \to \rho_i(y) \end{cases}$$

em Ω_i quando $x \to -\infty$ para $i = 1, 2$, e

$$\mathbf{v}(x,y) \to \mathbf{v}_3(y)$$

em Ω_3 quando $x \to \infty$. $\mathbf{v}_i$ é uma campo de Poiseuille em Ω_i, $i = 1, 2, 3$, apontando para dentro de Ω, e $\rho_i(y)$ é uma função contínua e limitada em Σ_i, $i = 1, 2$.

Theorem 2. [Khodja-Santos] *Seja* $l := \max_{i=1,2} ||\rho_i||_{C_b(\Sigma_i)}$ *e* $\alpha := \max_{i=1,2,3} |\alpha_i|$*. Então existe uma constante* $c = c(\Omega) > 0$ *tal que se* $cl\alpha < \mu$*, então o problema de Leray acima tem uma solução* $(\rho, \mathbf{v}) \in L^\infty(\Omega) \times H^2_{loc}(\Omega)$ *tal que*

$$\lim_{|x|\to\infty} ||\mathbf{v}(x,\cdot) - \mathbf{v}_i||_{C_b(\Sigma_i)} = 0, \qquad i = 1, 2, 3$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} \rho(x,\cdot) \; = \; \rho_i$$

na topologia fraca-$*$ *de* $L^\infty(\Sigma_i)$*,* $i = 1, 2$*.*

3 Estrutura Lagrangeana, solução renormalizada e regiões de separação

Colaboração: S. Bianchini

Trabalho em progresso.

Referências

[Amick] C.J. Amick, *Steady solutions of the Navier-Stokes equations in unbounded channels and pipes*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl.Sci. (4), **4**(3) (1977) 473-513.

[Khodja-Santos] F. Ammar-Khodja e M.M. Santos, *2d density-dependent Leray problem with a discontinuous density*, Methods and Application of Analysis (2007), a ser publicado.

[Toscano] S. T. Melo e F. Moura-Neto) *Mecânica dos Fluidos e Equações Diferenciais*, 18o. Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1991. Arquivo.pdf livre em http://www.ime.usp.br/˜toscano/papers.html