DM–IMECC–UNICAMP – Geometria Analítica e Vetores - MA141 - T. P
Prof. Marcelo M. Santos – **3a. prova, 27/11/2012**
Aluno: ______________________________ RA: ____________
Assinatura (idêntica à do RG): __________________________________
Observações: ***Tempo de prova: 100min. Não é permitido o uso de qualquer equipamento eletrônico. Desligar o celular! Não destaque o grampo da prova. Todas as questões (suas resoluções) devem ser justificadas com o conhecimento da Matéria - cf. livro-texto.***

Questão 1 a) (1,0 ponto) Identifique a quádrica $z = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}$ (descrita por esta equação, dada em coordenadas cartesianas xyz). Determine as interseções com os eixos coordenados (eixos x, y e z) e com os planos coordenados (os planos xy, xz e yz).

b) (1,0) Mostre que $x = 2s\sec t$, $y = 3s\tan t$, $z = s^2$ é uma parametrização dessa quádrica e determine uma parametrização da curva obtida interceptando a mesma com o cone elíptico $z = 1 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}$. *Sugestão*: calcule s^2 como uma função de t ao longo desta curva.

2. a) (1,0) Determine a equação (em coordenadas cartesianas) da superfície de revolução obtida pela rotação da curva $z = \ln y$, $x = 0$, em torno do eixo z.

b) (1,0) Dê a equação dessa superfície em coordenadas cilíndricas.

3. (2,0) Mostre que a equação $xy + xz + yz = 0$ representa uma superfície cônica. Determine a equação de uma curva diretriz e reescreva a equação dada da superfície usando a equação obtida da diretriz.

4. (2,0) Escreva a equação $2z^2 - x^2 - y^2 + y - z = 9$ na forma $a(x-x_0)^2 + b(y-y_0)^2 + c(z-z_0)^2 = d$ e identifique a superfície que a mesma representa. Faça um esboço do seu 'gráfico'. Calcule as interseções com os eixos coordenados.

5. (2,0) Escreva a equação $5x^2 + 5y^2 - 6xy = 16$ na forma matricial $X^tAX + KX = 16$. (**0,5 pontos**) Dado que $AV_j = \lambda_j V_j$, em que $\lambda_1 = 2$, $V_1 = (1,1)$, $\lambda_2 = 8$ e $V_2 = (1,-1)$, **sem fazer conta (usando a teoria/teorema)** identifique a cônica que a equação representa. (**0,5 pontos**) Calcule as coordenadas dos focos e a equação de uma diretriz desta cônica, **no sistema xy**. (**1,0 ponto**)

Não esqueça de justificar todas as suas afirmações. Boa prova!

Gabarito

Questão 1 a) (1,0 ponto) *Identifique a quádrica* $z = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}$ *(descrita por esta equação, dada em coordenadas cartesianas* xyz*). Determine as interseções com os eixos coordenados (eixos* x*,* y *e* z*) e com os planos coordenados (os planos* xy*,* xz *e* yz*).*

Parabolóide hiperbólico **0,4 pontos** até aqui.

Interseções com os eixos:

eixo x ($y = z = 0$): $x^2/4 = 0$, $x = 0$, o ponto $(0, 0, 0)$ (a origem);
eixo y ($x = z = 0$): $-y^2/9 = 0$, $y = 0$, idem;
eixo z ($x = y = 0$): $z = 0$, idem.

$+\ \mathbf{0,2}$

Interseções com os planos coordenados:

plano xy ($z = 0$): $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0$, $\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9}$, $y^2 = \frac{9}{4}x^2$, duas retas $y = \pm\frac{3}{2}x$

$+\ \mathbf{0,2}$

plano xz ($y = 0$): $z = \frac{x^2}{4}$, uma parábola;
plano yz ($x = 0$): $z = -\frac{x^2}{9}$, uma parábola.

$+\ \mathbf{0,2}$

b) (1,0) *Mostre que* $x = 2s\sec t$, $y = 3s\tan t$, $z = s^2$ *é uma parametrização dessa quádrica e determine uma parametrização da curva obtida interceptando a mesma com o cone elíptico* $z = 1 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}$.
Sugestão*: calcule* s^2 *como uma função de* t *ao longo desta curva.*

(*Cf. Exercício 6.3.5, do livro-texto.*)

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = \frac{(2s\sec t)^2}{4} - \frac{(3s\tan t)^2}{9} = \frac{4s^2\sec^2 t}{4} - \frac{9s^2\tan^2 t}{9} = s^2(\sec^2 t - \tan^2 t) = s^2 = z.$ **0,5**

Substituindo as equações paramétricas na equação do cone, temos:

$s^2 = 1 - s^2\sec^2 t - s^2\tan^2 t$, $s^2(1 + \sec^2 t + \tan^2 t) = 1$, logo, $s^2 = 1/(1 + \sec^2 t + \tan^2 t)$ ou $s = \pm 1/\sqrt{1 + \sec^2 t + \tan^2 t}$. $+$ **0,2**

Então uma parametrização da curva é

$x = \pm\frac{2\sec t}{\sqrt{1+\sec^2 t+\tan^2 t}}$, $y = \pm\frac{3\tan t}{\sqrt{1+\sec^2 t+\tan^2 t}}$, $z = 1/(1 + \sec^2 t + \tan^2 t)$,

$+$ **0,3**

fixando o sinal $+$ ou o sinal $-$ nas equações para x e y.

2. a) (1,0) *Determine a equação (em coordenadas cartesianas) da superfície de revolução obtida pela rotação da curva* $z = \ln y$, $x = 0$, *em torno do eixo* z.

Seja $f(y, z) = z - \ln y$ $(y > 0)$. A diretriz é dada pela curva $f(y, z) = 0$, no plano yz, **0,3**
e o eixo z é o eixo de rotação. Então, a equação da superfície é $f(y', z) = 0$, sendo $y' = \pm\sqrt{x^2 + z^2}$. + **0,4**
Aqui tomamos o sinal $+$, pois a curva está no semi-plano yz, $y > 0$. Então a equação da superfície é $f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$, i.e. $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$. + **0,3**

b) (1,0) *Dê a equação dessa superfície em coordenadas cilíndricas.*

Relações enre coordenadas cilíndricas e cartesianas:

$$\begin{cases} z &= z \\ x &= r\cos\theta \quad , \quad \sqrt{x^2 + y^2} = r. \\ y &= r\text{sen}\theta \end{cases}$$ **0,4**

Substituindo na equação, encontramos: $z = \ln r$. $+\ \mathbf{0,6}$

3. (2,0) *Mostre que a equação* $xy + xz + yz = 0$ *representa uma superfície cônica. Determine a equação de uma curva diretriz e reescreva a equação dada da superfície usando a equação obtida da diretriz.*

(*Exercício 6.2.4.*)

Seja $F(x, y, z) = xy + xz + yz$. Notemos que $F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^2(xy + xz + yz)$, logo $F(x, y, z) = xy + xz + yz = 0 \Rightarrow F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = 0$, ou seja, a equação cumpre a condição para que a mesma represente uma superfície cônica, com vértice na origem. **0,2**
Tomando $z = 1$ na equação obtemos $f(x, y) := xy + x + y = 0$. $+\ \mathbf{0,4}$
A superfície cônica com esta diretriz é dada por $f(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) = 0$. $+\ \mathbf{0,6}$

$f(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) = \frac{x}{z}\frac{y}{z} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$, logo, esta última equação é equivalente a $\frac{x}{z}\frac{y}{z} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} = 0$, $+\ \mathbf{0,6}$
e, multiplicando por z^2, a $xy + xz + yz = 0$, ou seja, coincide com a equação dada. Portanto, a mesma representa a superfície cônica com diretriz $xy + x + y = 0$, $z = 1$ $+\ \mathbf{0,2}$
e vértice na origem.

4. (2,0) *Escreva a equação* $2z^2 - x^2 - y^2 + y - z = 9$ *na forma* $a(x-x_0)^2 + b(y-y_0)^2 + c(z-z_0)^2 = d$ *e identifique a superfície que a mesma representa. Faça um esboço do seu 'gráfico'. Calcule as interseções com os eixos coordenados.*

$$2(z^2 - \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{16}) - \tfrac{1}{8} - x^2 - (y^2 - y + \tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{4} = 9$$
$$2(z - \tfrac{1}{4})^2 - x^2 - (y - \tfrac{1}{2})^2 = 9 + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{4}$$
$$2(z - \tfrac{1}{4})^2 - x^2 - (y - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{71}{8}$$

0,5

Hiperbolóide de duas folhas com eixo paralelo ao eixo z, "centrada" no ponto $P_0 := (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. $+\ \mathbf{0,5}$

Esboço do gráfico: $+\ \mathbf{0,5}$

Interseções com os eixos:

com o eixo x ($y = z = 0$): $-x^2 = 9$, não há (conjunto vazio);

com o eixo y ($x = z = 0$): $-y^2 + y = 9$, $-(y^2 - y + \frac{1}{4}) = 9 - \frac{1}{4}$, $-(y - \frac{1}{2})^2 = \frac{35}{4}$, conjunto vazio;

com o eixo z ($x = y = 0$): $2z^2 - z = 9$, $2(z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{16}) = 9 + \frac{1}{8}$, $2(z - \frac{1}{4})^2 = \frac{73}{8}$, $(z - \frac{1}{4})^2 = \frac{73}{16}$, $z = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{73}}{4}$, os pontos $(0, 0, \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{73}}{4})$.

$+\ \mathbf{0,5}$

5. (2,0) *Escreva a equação* $5x^2 + 5y^2 - 6xy = 16$ *na forma matricial* $X^tAX + KX = 16$. *(***0,5 pontos***) Dado que* $AV_j = \lambda_j V_j$, *em que* $\lambda_1 = 2$, $V_1 = (1,1)$, $\lambda_2 = 8$ *e* $V_2 = (1,-1)$, **sem fazer conta (usando a teoria/teorema)** *identifique a cônica que a equação representa. (***0,5 pontos***) Calcule as coordenadas dos focos e a equação de uma diretriz desta cônica,* **no sistema xy**. *(***1,0 ponto***)*

Sejam $A = \begin{bmatrix} 5 & -6/2 \\ -6/2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Temos que

$$X^tAX + KX = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5x - 3y \\ -3x + 5y \end{bmatrix} + 0 = x(5x - 3y) + y(-3x + 5y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2,$$

logo, a equação se escreve como $X^tAX + KX = 16$. $\mathbf{0,5}$

Pela teoria (Teorema 7.2), como os autovalores λ_1, λ_2 são positivos, a equação representa uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio. $\mathbf{0,3}$
Não é um ponto nem o conjunto vazio, pois (por exemplo) tomando $y = 0$ obtemos $x = \pm\frac{4}{\sqrt{5}}$. Portanto é uma elipse. $+\ \mathbf{0,2}$

OU (outra maneira):

Pelo Teorema 7.1 e considerando que K é nula, temos que a equação se escreve como $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = 16$, ou $\frac{\lambda_1}{16}(x')^2 + \frac{\lambda_2}{16}(y')^2 = 1$, em um novo sistema de coordenadas cartesianas $x'y'$. Daí, como $\frac{\lambda_1}{16}$ e $\frac{\lambda_2}{16}$ são ambos positivos, concluimos que é uma elipse. **0, 5**

Tomando o sistema $x'y'$ de coordenadas cartesianas com a origem do sistema xy e vetores diretores $U_1 = \frac{1}{\|V_1\|}V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ e $U_2 = \frac{1}{\|V_2\|}V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$, a relação entre as coordenadas $X \equiv (x,y)$ e $X' \equiv (x',y')$ é dada pela relação $X = QX'$, em que Q é a matriz cujas colunas são as coordenas de U_1 e U_2. **0, 4**

A equação no sistema $x'y'$ é $2(x')^2 + 8(y')^2 = 16$, logo da forma $(x')^2/a^2 + (y')^2/b^2 = 1$ com $a^2 = 16/2 = 8$ e $b^2 = 16/8 = 2$. As coordenadas dos focos no sistema $x'y'$ são então $F_{1,2} = (\pm c, 0)$ em que $c^2 = a^2 - b^2 = 6$, i.e. $F_{1,2} = (\pm\sqrt{6}, 0)$. Pela relação acima, obtemos as coordenadas dos focos no sistema xy:

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ \sqrt{6} \end{bmatrix} \equiv \left(\sqrt{\frac{6}{2}}, \sqrt{\frac{6}{2}}\right) = (\sqrt{3}, \sqrt{3}).$$

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\sqrt{6} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \end{bmatrix} \equiv (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}).$$

\+ **0, 4**

A equação de uma diretriz (a diretriz em relação ao foco F_1) no sistema $x'y'$ é dada por $x' = c/e^2$, onde $e = c/a$ é a excentricidade; $e^2 = c^2/a^2 = 6/8 = 3/4$. Logo, no sistema $x'y'$ uma diretriz é a reta $x' = \sqrt{6}/(3/4) = 4\sqrt{6}/3$. Usando as relações entre as coordenadas

$$X' = Q^{-1}X = Q^tX = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X,$$

donde $x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$, obtemos que uma diretriz tem equação $4\sqrt{6}/3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$, no sistema xy, ou seja, $x + y = 8\sqrt{3}/3$. + **0, 2**