MA/MM720 – Análise no $\mathbb{R}^n$, 1s2016 **3a. prova**, 1/7/16

1. **(a) (0,5)** Enuncie o Teorema de Mudança de Variáveis.

(b) (1,0) Calcule o volume de uma bola unitária em $\mathbb{R}^3$.

(c) (1,0) Mostre que o centróide da bola unitária $B^n = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n; |x| \leq 1\}$, $c(B^n) = \frac{1}{v(B^n)}(\int_{B^n} x_1 dx, \cdots, \int_{B^n} x_n dx)$, é o vetor nulo.

2. **(2,5)** Sejam M e N variedades compactas sem bordo em $\mathbb{R}^n$ e $f : M \to \mathbb{R}$, $g : N \to \mathbb{R}$ funções contínuas com spt$f$ contido na imagem de uma parametrização (local) de M e spt$g$ contido na imagem de uma parametrização (local) de N. Mostre que $\int_{M\times N} f \cdot g dV = (\int_M f dV)(\int_N g dV)$.

3. **(a) (0,5)** Defina k-forma em um aberto do $\mathbb{R}^n$.

(b) (1,0) Dê a forma geral de uma 2-forma ω em $\mathbb{R}^n$ (em termos dos 2-tensores alternados elementares) e escreva a integral $\int_{Y_\alpha} \omega$ sobre uma 2-variedade parametrizada em $\mathbb{R}^n$ como uma soma de integrais de funções escalares em um aberto do $\mathbb{R}^2$.

(c) (1,0) Sejam Y_α uma 2-variedade parametrizada em $\mathbb{R}^3$ e $\omega = f dy \wedge dz - g dx \wedge dz + h dx \wedge dy$ uma 2-forma definida em um aberto (do $\mathbb{R}^3$) contendo Y_α. Mostre que $\int_{Y_\alpha} \omega = \int_{Y_\alpha} \langle Z, \mathbf{n} \rangle dV$, onde Z é o campo (f, g, h) e $\mathbf{n}$ é o campo normal (a Y_α) unitário $\frac{\partial\alpha}{\partial u} \times \frac{\partial\alpha}{\partial v} / |\frac{\partial\alpha}{\partial u} \times \frac{\partial\alpha}{\partial v}|$.

4. **(a) (0,5)** Enuncie o Teorema (generalizado/para formas) de Stokes.

(b) (1,0) Seja M o semielipsóide (em $\mathbb{R}^3$) $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$, $y \geq 0$. Mostre que M é uma 2-variedade orientável e descreva o bordo de M.

(c) (0,5) Seja ω a 1-forma $y dx + 3x dz$. Calcule $d\omega$.

(d) (0,5) Escolha uma orientação para M e calcule $\int_M d\omega$. (M e ω definidas acima.)

Boa prova!