DM–IMECC–UNICAMP – Cálculo III - MA311 - T. Z
Prof. Marcelo M. Santos – **2a. prova, 18/10/2010**
Aluno: ____________________________ RA: ___________
Assinatura (idêntica à do RG): ________________________________

Observações: ***Tempo de prova: 100min. Justifique sucintamente todas as suas afirmações. É proibido o uso de qualquer equipamento eletrônico; em particular do celular ou calculadora. Desligue o celular! Não destaque o grampo da prova.***

1. a) (1,0 ponto) Calcule a transformada de Laplace da função
$f(t) = 1 - \cos t - \dfrac{1}{2}t\mathrm{sen}t.$ (*Dica*: $\mathcal{L}\{-tf(t)\} = \frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f\}$.)

b) (1,0 ponto) Calcule a transformada inversa da função
$F(s) = \dfrac{1}{(s-3)[(s-3)^2+1]}.$ (*Dica*: $\dfrac{1}{s(s^2+1)} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+1}$.)

2. a) (1,0 ponto) Seja $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \le t \le 1 \\ \mathrm{senh}5t, & \text{se } t > 1 \end{cases}$. Usando a teoria (um teorema) mostre que a transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f\}(s)$ existe para todo $s > 5$ (sem calcular a transformada de Laplace, nem usando a definição da transformada de Laplace).

b) (1,0 ponto) Seja $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \le t \le 1 \\ e^{5t}, & \text{se } t > 1 \end{cases}$. Usando diretamente a definição da transformada de Laplace, calcule $\mathcal{L}\{f\}(s)$ para $s > 5$, qualquer.

c) (1,0 ponto) Expresse a função do item **b)** como uma combinação linear de funções degrau e/ou do tipo $u_c(t)g(t-c)$ e daí calcule a sua transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f\}(s)$ para $s > 5$, qualquer.

3. (2,0 pontos) Resolva o problema de valor inicial abaixo, expressando a solução em termos de uma convolução com a função g, a qual é uma função contínua (arbitrária) definida no intervalo $[0, \infty)$:

$$\begin{cases} y^{(4)} - y = \delta(t-1) + g(t) \\ y^{(j)}(0) = 0, \ j = 0, 1, 2, 3. \end{cases}$$

(*Dica*: $\dfrac{1}{s^4-1} = \dfrac{1/4}{s-1} - \dfrac{1/4}{s+1} - \dfrac{1/2}{s^2+1}$.)

4. (2,0 pontos) Resolva o seguinte sistema, via autovalores e autovetores:

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad \left(\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}\right).$$

5. a) (1,0 ponto) Mostre que $\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} t^2 \\ 2t \end{bmatrix}$ formam um conjunto fundamental de soluções para o sistema

$$\mathbf{x}' = P(t)\mathbf{x}, \qquad P(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2t^{-2} & 2t^{-1} \end{bmatrix}$$

no intervalo $I = (0, \infty)$ (ou $I = (-\infty, 0)$).

b) (1,0 ponto) Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = P(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{x}(1) = \mathbf{x}^0 \end{cases}.$$

onde $P(t)$ é a matriz (função matricial) dada no item **a)**, $\mathbf{x}^0$ é um vetor (ponto) arbitrário do $\mathbb{R}^2$, e $\mathbf{g}(t)$ é a seguinte função (vetorial):
$\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$ se $t \leq 1$, $\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} 1/(2-t) \\ (t-1)\text{sen}(\frac{1}{t-1}) \end{bmatrix}$ se $t > 1$ e $t \neq 2$, e $\mathbf{g}(2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Mostre que a solução existe e é única no intervalo $I = (0, 2)$.
(*Dica*: Não tente resolver o problema.)

6. (2,0 pontos) Sabendo que $V_1 = (1, 0, 2)$ e $V_2 = (0, 2, -3)$ são autovetores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{bmatrix},$$

associados ao (mesmo) autovalor $r = 1$, e que a dimensão do autoespaço associado $\mathcal{V}_1 := \{V \in \mathbb{R}^3;\, AV = V\}$ é 2 (dois), encontre um conjunto fundamental de soluções para o sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

BOA PROVA!

Gabarito

Questão 1. a) (1,0 ponto) *Calcule a transformada de Laplace da função* $f(t) = 1 - \cos t - \dfrac{1}{2}t\text{sen}t.$ *(*Dica*: $\mathcal{L}\{-tf(t)\} = \frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f\}$.)*

Pela linearidade, temos:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{\cos t\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{t\text{sen}t\}$$

0,2 pontos até aqui.

Daí, usando a tabela e a *Dica*,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right), \quad s > 0.$$

$+$ $\mathbf{0,2}$ **pontos** por cada transformada.

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) \quad (= \frac{d}{ds}\left(s^2+1\right)^{-1}) \;= -\frac{2s}{(s^2+1)^2},$$

logo,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{(s^2+1)^2}$$

$+$ $\mathbf{0,2}$ **até aqui**.

$$= \frac{(s^2+1)^2 - s^2(s^2+1) - s^2}{s(s^2+1)^2} = \frac{(s^2+1)(s^2+1-s^2) - s^2}{s(s^2+1)^2} = \frac{1}{s(s^2+1)^2}.$$

b) (1,0 ponto) *Calcule a transformada inversa da função* $F(s) = \dfrac{1}{(s-3)[(s-3)^2+1]}.$ (*Dica*: $\dfrac{1}{s(s^2+1)} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+1}$.)

$$F(s) = G(s-3), \qquad G(s) := \frac{1}{s(s^2+1)}$$

0,2 pontos

logo usando a teoria (a tabela),

$$\mathcal{L}^{-1}\{F\} = \mathrm{e}^{3t}\mathcal{L}^{-1}\{G\}.$$

$+$ $\mathbf{0,3}$

Usando a *Dica* e a linearidade (da transformada de Laplace inversa), temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\{G\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} - \{\frac{s}{s^2+1}\}$$

$+\ \mathbf{0,2}$

$$= 1 - \cos t,$$

logo, substituindo este resultado acima, obtemos:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F\} = \mathrm{e}^{3t}(1 - \cos t).$$

$+\ \mathbf{0,3}$

Questão 2. a) (1,0 ponto) *Seja* $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \le t \le 1 \\ \mathrm{senh} 5t, & \text{se } t > 1 \end{cases}.$ *Usando a teoria (um teorema) mostre que a transformada de Laplace* $\mathcal{L}\{f\}(s)$ *existe para todo* $s > 5$ *(sem calcular a transformada de Laplace, nem usando a definição da transformada de Laplace).*

A função é seccionalmente contínua, pois o único ponto de descontinuidade é $t = 1$ (só tem um ponto de descontinuidade) e neste ponto existem os limites laterais ($\lim_{t\to 1-} f(t) = \lim_{t\to 1} 1 = 1$, $\lim_{t\to 1+} f(t) = \lim_{t\to 1} \mathrm{senh} 5t = \mathrm{senh} 5$). **0,5 pontos**
Aém disso, pelas definições de f e do seno hiperbólico ($\mathrm{senh} 5t = (\mathrm{e}^{5t} - \mathrm{e}^{-5t})/2$), temos a estimativa $|f(t)| \le \frac{1}{2}\mathrm{e}^{5t}$ para todo $t > 0$, logo, por um teorema (da teoria), concluímos o resultado (pedido). $+\ \mathbf{0,5}$

b) (1,0 ponto) *Seja* $f(t) = \begin{cases} 1, & se\ 0 \le t \le 1 \\ e^{5t}, & se\ t > 1 \end{cases}.$ *Usando diretamente a definição da transformada de Laplace, calcule* $\mathcal{L}\{f\}(s)$ *para* $s > 5$*, qualquer.*

$$\mathcal{L}\{f\}(s) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\, dt$$

0,2

$$= \int_0^1 \mathrm{e}^{-st}\, dt + \int_1^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{e}^{5t}\, dt$$

+ 0,2

$$= -\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_{t=0}^{t=1} + \int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-(s-5)t}\,dt$$

+ 0,2

$$= -\frac{1}{s}(\mathrm{e}^{-s} - 1) - \frac{1}{s-5}\mathrm{e}^{-(s-5)t}\Big|_{t=1}^{t=\infty}$$

+ 0,2

$$= -\frac{1}{s}(\mathrm{e}^{-s} - 1) + \frac{1}{s-5}\mathrm{e}^{-(s-5)}$$

onde para a última igualdade usamos que
$\mathrm{e}^{-(s-5)t}\big|^{t=\infty}$ $(= \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-(s-5)t})$ $= 0$, visto que $s > 5$. **+ 0,2**

c) (1,0 ponto) *Expresse a função do item* **b)** *como uma combinação linear de funções degrau e/ou do tipo $u_c(t)g(t-c)$ e daí calcule a sua transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f\}(s)$ para $s > 5$, qualquer.*

Observando que que e^{5t} pode ser escrito como $\mathrm{e}^{5}\mathrm{e}^{5(t-1)}$ (ou fazendo $\mathrm{e}^{5t} = g(t-1),\ t > 1 \ \Rightarrow\ g(t) = \mathrm{e}^{5(t+1)} = \mathrm{e}^{5}\mathrm{e}^{5t},\ t > 0$) e analisando a função, obtemos:

$$f(t) = 1 - u_1(t) + \mathrm{e}^{5}u_1(t)\mathrm{e}^{5(t-1)}$$

(exceto para $t = 1$*; $1 \equiv u_0(t)$). **0,5**

Daí,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f\} &= \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{u_1\} + \mathrm{e}^{5}\mathcal{L}\{u_1(t)\mathrm{e}^{5(t-1)}\} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s} + \mathrm{e}^{5}\mathrm{e}^{-s}\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{5t}\} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s} + \mathrm{e}^{5}\mathrm{e}^{-s}\frac{1}{s-5} \end{aligned}$$

+ 0,5

*Para que $f(1) = 1$, podemos escrever $f(t) = 1 - u_1(t) + \mathrm{e}^{5}u_1(t)g(t-1)$, sendo $g(t) := \mathrm{e}^{5t}$ se $t > 0$ e $g(0) := \mathrm{e}^{-5}$. Este detalhe não será considerado e nem faz diferença no cálculo das integrais, da transformada de Laplace.

Questão 3. **(2,0 pontos)** *Resolva o problema de valor inicial abaixo, expressando a solução em termos de uma convolução com a função g, a qual é uma função contínua (arbitrária) definida no intervalo $[0,\infty)$:*

$$\begin{cases} y^{(4)} - y = \delta(t-1) + g(t) \\ y^{(j)}(0) = 0, \ j = 0,1,2,3. \end{cases}$$

*(*Dica*:* $\dfrac{1}{s^4-1} = \dfrac{1/4}{s-1} - \dfrac{1/4}{s+1} - \dfrac{1/2}{s^2+1}$ *.)*

Aplicando a transformada de Laplace à equação, obtemos:

$$s^4\mathcal{L}\{y\} - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0) - \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-1)\} + G(s), \quad G := \mathcal{L}\{g\}.$$

0,3

Usando os dados iniciais $y^{(j)}(0) = 0, \ j = 0,1,2,3$ e $\mathcal{L}\{\delta(t-1)\} = \mathrm{e}^{-s}$, segue-se que

$$(s^4-1)\mathcal{L}\{y\} = \mathrm{e}^{-s} + G(s)$$

+ 0,2

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s^4-1} + \frac{G(s)}{s^4-1}$$

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{\mathrm{e}^{-s}}{s^4-1}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{G(s)}{s^4-1}\} \\ y &= u_1(t)\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^4-1}\}(t-1) + \mathcal{L}^{-1}\{G\} * \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^4-1}\}. \end{aligned}$$

+ 0,6

Usando a *Dica*,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^4-1}\} &= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1/4}{s-1}\} - \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1/4}{s+1}\} - \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1/2}{s^2+1}\} \\ &= \frac{1}{4}\mathrm{e}^{t} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{2}\mathrm{sen}t =: h(t). \end{aligned}$$

+ 0,6

Substituindo acima, obtemos:

$$y = u_1(t)h(t-1) + (g*h)(t)$$

+ 0,3

$$(= u_1(t)[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{t-1} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-(t-1)} - \frac{1}{2}\mathrm{sen}(t-1)] + \int_0^t [\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\tau} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\tau} - \frac{1}{2}\mathrm{sen}\tau] g(t-\tau)\, d\tau).$$

Questão 4. (2,0 pontos) *Resolva o seguinte sistema, via autovalores e autovetores:*

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}) \; .$$

Autovalores:

$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & -2-r \end{vmatrix} = r^2 + r - 6$$

$$\Delta = 25; \; r = -3, \; 2.$$

0,5

Autovetores:

$$r = -3: \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$4c_1 + c_2 = 0, \; c_2 = -4c_1; \; V_1 = (1, -4);$$

$$r = 2: \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-c_1 + c_2 = 0, \; c_1 = c_2; \; V_2 = (1, 1).$$

+ 0,5

Conjunto Fundamental de Soluções:

$$\mathbf{x}^1 = \mathrm{e}^{-3t} V_1, \quad \mathbf{x}^2 = \mathrm{e}^{2t} V_2.$$

+ 0,5

Solução (geral):

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1 \mathbf{x}^1 + c_2 \mathbf{x}^2 \\ &= c_1 \mathrm{e}^{-3t} V_1 + c_2 \mathrm{e}^{2t} V_2 \\ &= c_1 \mathrm{e}^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1 \mathrm{e}^{-3t} + c_2 \mathrm{e}^{2t} \\ -4c_1 \mathrm{e}^{-3t} + c_2 \mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix} \qquad (\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \quad c_1 \mathrm{e}^{-3t} + c_2 \mathrm{e}^{2t} \\ x_2 = -4c_1 \mathrm{e}^{-3t} + c_2 \mathrm{e}^{2t} \end{array} \right.) \end{aligned}$$

+ 0,5

$$= \begin{bmatrix} e^{-3t} & e^{2t} \\ -4e^{-3t} & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \Psi(t)C; \qquad \Psi(t) := \begin{bmatrix} e^{-3t} & e^{2t} \\ -4e^{-3t} & e^{2t} \end{bmatrix}, \quad C := \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Questão 5. a) (1,0 ponto) *Mostre que* $\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$ *e* $\mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} t^2 \\ 2t \end{bmatrix}$ *formam um conjunto fundamental de soluções para o sistema*

$$\mathbf{x}' = P(t)\mathbf{x}, \qquad P(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2t^{-2} & 2t^{-1} \end{bmatrix}$$

no intervalo $I = (0, \infty)$ *(ou* $I = (-\infty, 0)$ *).*

$\mathbf{x}^1, \ \mathbf{x}^2$ são soluções:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}^1)' &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ P(t)\mathbf{x}^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2t^{-2} & 2t^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -2t^{-1} + 2t^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \therefore \quad & (\mathbf{x}^1)' = P(t)\mathbf{x}^1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}^2)' &= \begin{bmatrix} 2t \\ 2 \end{bmatrix}, \\ P(t)\mathbf{x}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2t^{-2} & 2t^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2 \\ 2t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2t \\ -2 + 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2t \\ 2 \end{bmatrix} \\ \therefore \quad & (\mathbf{x}^2)' = P(t)\mathbf{x}^2; \end{aligned}$$

0,5

$\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ são linearmente independentes:

$$W[\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2] = \begin{vmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = 2t^2 - t^2 = t^2 \neq 0 \text{ em } I.$$

Então, como (a função matricial) $P(t)$ é uma função contínua em I (seus elementos são funções contínuas em I), concluímos que $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2\}$ é um conjunto fundamental de soluções. **+ 0,5**

b) (1,0 ponto) *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = P(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{x}(1) = \mathbf{x}^0 \end{cases}.$$

onde $P(t)$ é a matriz (função matricial) dada no item **a)**, *$\mathbf{x}^0$ é um vetor (ponto) arbitrário do $\mathbb{R}^2$, e $\mathbf{g}(t)$ é a seguinte função (vetorial):*

$\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$ *se $t \leq 1$,* $\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} 1/(2-t) \\ (t-1)\text{sen}(\dfrac{1}{t-1}) \end{bmatrix}$ *se $t > 1$ e $t \neq 2$, e* $\mathbf{g}(2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. *Mostre que a solução existe e é única no intervalo $I = (0, 2)$.* (Dica*: Não tente resolver o problema.)*

$P(t)$ é (uma função) contínua no intervalo $I = (0, 2)$ (pois seus elementos são funções racionais, com o denominador diferente de zero em todo ponto deste intervalo), **0,2**
o ponto $t_0 = 1$, onde é tomada a condição inicial, pertence a este intervalo (aberto) **+ 0,2**
e a função $\mathbf{g}$ também é contínua neste intervalo, pois nos intervalos $(0, 1)$ e $(1, 2)$ ela ́dada por funções contínuas **+ 0,2**
e no ponto $t = 1$ ela também ćontínua. De fato,

$$\lim_{t\to 1-} \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} \lim_{t\to 1-} t \\ \lim_{t\to 1-} 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{g}(0)$$

e

$$\lim_{t\to 1+} \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} \lim_{t\to 1+} 1/(2-t) \\ \lim_{t\to 1+} (t-1)\text{sen}(\dfrac{1}{t-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{g}(0).$$

O último limite pode ser calculado usando o Teorema do Confronto ('Regra do Sanduíche'). **+ 0,2**
Além disso, o sistema (em questão) é linear. Então, pelo Teorema de Existência e Unicidade, temos o resultado. **+ 0,2**

Questão 6. (2,0 pontos) *Sabendo que* $V_1 = (1, 0, 2)$ *e* $V_2 = (0, 2, -3)$ *são autovetores da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{bmatrix},$$

associados ao (mesmo) autovalor $r = 1$*, e que a dimensão do autoespaço associado* $\mathcal{V}_1 := \{V \in \mathbb{R}^3\,;\, AV = V\}$ *é 2 (dois), encontre um conjunto fundamental de soluções para o sistema* $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.*

V_1, V_2 são linearmente indepentes. De fato, $c_1V_1+c_2V_2 = \mathbf{0} \Rightarrow (c_1, 2c_2, 2c_1-3c_2) = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$. Então, $\mathbf{x}^1 := \mathrm{e}^tV_1$, $\mathbf{x}^2 := \mathrm{e}^tV_2$ são soluções linearmente indepenpendentes. **0,6**

Autovalores:

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 5-r & -3 & -2 \\ 8 & -5-r & -4 \\ -4 & 3 & 3-r \end{vmatrix} \\
&= (5-r)\begin{vmatrix} -5-r & -4 \\ 3 & 3-r \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 3-r \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -5-r & -4 \end{vmatrix} \\
&= (5-r)(r^2+2r-3) - 8(3r-3) - 4(-2r+2) \\
&= -r^3 + (5-2)r^2 + (10+3-24+6)r + (-15+24-8) \\
&= -r^3 + 3r^2 - 3r + 1 = -(r-1)^3.
\end{aligned}$$

Logo, o único autovalor é $r = 1$. **+ 0,5***

Como $r = 1$ é o único autovalor e a dimensão do autoespaço associado $\mathcal{V}_1$ é $2 < 3$ (3 ó número de incógnitas), uma terceira solução linearmente independente de $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2\}$ é dada por

$$\mathbf{x}^3 = t\mathrm{e}^tV + \mathrm{e}^tV_3, \quad (A-1)V = 0 \text{ (i.e. } V \in \mathcal{V}_1), \ (A-1)V_3 = V.$$

+ 0,4

Como $V \in \mathcal{V}_1$ (V é autovetor associado ao autovalor 1) e a dimensão do autoespaço $\mathcal{V}_1$ é dois (temos dois, e não mais do que dois, autovetores linearmente independentes), temos que V é da forma $V = c_1V_1 + c_2V_2$ (combinação linear de V_1 e V_2), i.e.

$$V = (c_1, 2c_2, 2c_1 - 3c_2).$$

*Questão da Lista/do livro.

*Pontuação extra.

+ 0,2

<u>Cálculo de V_3:</u>

$$V_3 \equiv (a,b,c)$$

$$\begin{aligned} (A-1)V_3 &= V \\ \begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 8 & -6 & -4 \\ -4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_1 \\ 2c_2 \\ 2c_1 - 3c_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{rrrcc} 4 & -3 & -2 & | & c_1 \\ 8 & -6 & -4 & | & 2c_2 \\ -4 & 3 & 2 & | & 2c_1 - 3c_2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrcc} 4 & -3 & -2 & | & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2c_2 - 2c_1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3c_1 - 3c_2 \end{array}\right]$$

$$\therefore\ 4a - 3b - 2c = c_1, \quad c_1 = c_2$$

+ 0,4

Tomando $c_1 = 1$, $a = 1/4$ e $b = c = 0$, obtemos
$V = (1,2,-1)$ e $V_3 = (1/4,0,0)$, **+ 0,2**
logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^3 &= t\mathrm{e}^t(1,2,-1) + \mathrm{e}^t(1/4,0,0) \\ &= ((t+1/4)\mathrm{e}^t, 2t\mathrm{e}^t, -t\mathrm{e}^t) \end{aligned}$$

+ 0,2

$\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3\}$ é um conjunto fundamental de soluções.