MA720/MM720 – Análise no $\mathbb{R}^n$, 1s2016

2a. prova, 17/5/2016

Questão 1.(a)(0,5 pontos) Enuncie a *Formal Local das Submersões* (FLS).

(b) (1,0) Demonstre a FLS usando o Teorema da Aplicação Inversa.

(c) (1,0) Seja $f : \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Mostre que se f tem posto n em um ponto $a \in \mathbb{R}^{k+n}$ então a equação $f(x) = c$ tem solução para todo c numa vizinhança (em $\mathbb{R}^n$) de $f(a)$.

2. (a) (1,5) Sejam $C \subset \mathbb{R}^m$ um compacto e $f : C \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua. Mostre que o gráfico de f, $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; x \in C, y = f(x)\}$, tem medida nula (em $\mathbb{R}^{m+n}$).

(b) (1,0) Sejam $C \subset \mathbb{R}^m$ um compacto J-mensurável, $\varphi : C \to \mathbb{R}$ uma aplicação contínua não negativa e S a *região simples* $\{(x, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}; x \in C, 0 \leq t \leq \varphi(x)\}$. Sabendo que S é J-mensurável (em $\mathbb{R}^{m+1}$), mostre que se $g : S \to \mathbb{R}$ é uma função integrável em S então a integral $\int_{t=0}^{t=\varphi(x)} g(x,t)$ existe para todo $x \in C - E$, onde E é um conjunto de medida nula.

3. (a) (0,5) Enuncie a *Forma Local das Imersões.*

(b) (2,0) Seja A um aberto em $\mathbb{R}^m$. Se $f : A \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 e, num ponto $a \in A$, a derivada $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tem posto p, então existe um mergulho $\varphi : V \to A$, de classe C^1, definido num aberto $V \subset \mathbb{R}^p$, tal que $(f \circ \varphi) : V \to \mathbb{R}^n$ também é um mergulho, e, com inversa sendo a restrição de uma aplicação de classe C^1, definida num aberto em $\mathbb{R}^n$ contendo a imagem $(f \circ \varphi)(V)$. (*Um megulho $V \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação diferenciável de posto constante igual à dimensão do domínio, p, invertível sobre a imagem, com a inversa contínua.*)

4. (2,5) Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto J-mensurável. Mostre que para todo $\varepsilon > 0$ existe um compacto J-mensurável $C \subset S$ tal que $\mathrm{vol}(S - C) = \int_{S-C} 1 < \varepsilon$.

Boa prova!