DM–IMECC–UNICAMP – Cálculo III - MA311 - T. Z
Prof. Marcelo M. Santos – **1a. prova, 13/09/2010**
Aluno: ____________________________ RA: ___________
Assinatura (idêntica à do RG): ________________________________

Observações: ***Tempo de prova: 100min. Justifique sucintamente todas as suas afirmações. É proibido o uso de qualquer equipamento eletrônico; em particular do celular ou calculadora. Desligue o celular! Não destaque o grampo da prova. Cada questão vale 2,0 pontos.***

1. a) (1,0 ponto) Resolva a equação $y' + \dfrac{1-2x}{x}y = \mathrm{e}^{2x}$.

b) (1,0 ponto) Sem resolver o problema, determine o intervalo dado pelo Teorema de Existência e Unicidade (TEU) no qual a solução do PVI

$$(\ln x)y' + y = \mathrm{cotg}x, \quad y(2) = 3$$

está definida. *Não se esqueça de justificar suas afirmações.*

2. a) (1,0 ponto) Resolva a equação $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{1+y^2}$.

b) (1,0 ponto) Mostre que a equação $ydx + (2xy - \mathrm{e}^{-2y})dy = 0$ não é exata e determine um fator integrante.

3. a) (1,0 ponto) Resolva a equação homogênea $y''' + y' = 0$.

b) (0,5 pontos) Dê a forma de uma solução particular da equação

$$y''' + y' = \cos x$$

que pode ser determinada pelo método dos coeficientes indeterminados.

c) (0,5 pontos) Determine uma solução particular desta equação.

4. a) (1,0 ponto) Resolva a equação de Euler $x^2y'' + 3xy' + y = 0$, $x > 0$.

b) (1,0 ponto) Transforme esta equação numa equação com coeficientes constantes fazendo a mudança de variável $x = \mathrm{e}^z$ (ou $z = \ln x$).

5. a) (1,0 ponto) Verifique que $y_1 = \mathrm{e}^x$ é uma solução da equação $xy'' - (x+N)y' + Ny = 0$, qualquer que seja $N \in \mathbb{R}$. Para $N = 1$, determine outra solução y_2 tal que $\{y_1, y_2\}$ seja um conjunto fundamental de soluções, pelo método de redução de ordem ("variação do parâmetro").

b) (1,0 ponto) Sejam y_1 e v funções diferenciáveis (não particularizar) num intervalo aberto não-degenerado I tais que $y_1(x_0) \neq 0$ e $v'(x_0) \neq 0$, para algum $x_0 \in I$. Mostre que y_1 e $y_2 = vy_1$ são linearmente independentes em I, calculando o Wronskiano $W(y_1, y_2)$. Mostre também que se y_1 e $y_2 = vy_1$ são soluções de uma EDO linear homogênea de segunda ordem $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (qualquer), com os coeficientes $p(x), q(x)$ sendo funções contínuas em I, e se y_1 não se anula em I, então

$$v'(x) = \frac{y_1(x_0)^2 v'(x_0)}{y_1(x)^2} \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}, \quad x \in I.$$

BOA PROVA!

Gabarito

1. a) (1,0 ponto) *Resolva a equação* $y' + \dfrac{1-2x}{x} y = \mathrm{e}^{2x}$.

Fator integrante:

$$\begin{aligned} \mu = \mathrm{e}^{\int \frac{1-2x}{x} dx} &= \mathrm{e}^{\int (\frac{1}{x} - 2) dx} \\ &\mathrm{e}^{\ln|x| - 2x} = \mathrm{e}^{\ln|x|}\mathrm{e}^{-2x} \\ &|x|\mathrm{e}^{-2x} = \pm x\mathrm{e}^{-2x} \end{aligned}$$

0,5 pontos até aqui.

Tomando $\mu = x\mathrm{e}^{-2x}$ (se μ é um fator integrante então $c\mu$ também é, para qualquer constante c) e mutiplicando a equação por μ, temos:

$$\begin{aligned} (x\mathrm{e}^{-2x} y)' &= \mathrm{e}^{2x} x\mathrm{e}^{-2x} = x \\ x\mathrm{e}^{-2x} y &= \int x dx + c = \tfrac{x^2}{2} + c \\ y &= \tfrac{x}{2}\mathrm{e}^{2x} + \tfrac{c}{x}\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

$+ \mathbf{0,5}$

b) (1,0 ponto) *Sem resolver o problema, determine o intervalo dado pelo Teorema de Existência e Unicidade (TEU) no qual a solução do PVI*

$$(\ln x)y' + y = \mathrm{cotg} x, \quad y(2) = 3$$

está definida.

A equação é linear **0,3 pontos**

e os coeficientes $\ln x$ e $\mathrm{cotg} x = \cos x / \mathrm{sen} x$ são funções contínuas, respectivamente, nos intervalos $(0, \infty)$ e $(0, \pi)$, contendo o ponto $x_0 = 2$. $+ \mathbf{0,4}$

Além disso, a função $\ln x$ (coeficiente de y') não se anula no intervalo $(1, \pi)$, ainda contendo o ponto $x_0 = 2$. Então, pelo T.E.U., concluimos que a solução do PVI está definida no intervalo $(1, \pi)$. $+ \mathbf{0,3}$

2. a) (1,0 ponto) *Resolva a equação* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{1+y^2}$.

A equação é separável. De fato, podemos escrevê-la como

$$(1+y^2)dy = x^2 dx$$

0,5

logo, a sua solução é dada (implicitamente) por

$$\int (1+y^2)dy = \int x^2 dx$$

+ 0,3

Resolvendo as integrais, obtemos

$$y + \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + c.$$

+ 0,2

b) (1,0 ponto) *Mostre que a equação* $ydx + (2xy - \mathrm{e}^{-2y})dy = 0$ *não é exata e determine um fator integrante.*

$M = y, \quad N = 2xy - \mathrm{e}^{-2y}.$

$$M_y = 1, \quad N_x = 2y$$

logo $M_y \neq N_x$ para todo (x, y) no plano ($\mathbb{R}^2$) tal $y \neq 1/2$. Então, por um Teorema visto em aula (no livro-texto), a equação não é exata (em nenhum retângulo aberto do plano).

0,4

Fator integrante: (equação do fator integrante μ:

$$\begin{gathered}(\mu M)_y = (\mu N)_x, \qquad M\mu_y - N\mu_x + (M_y - N_x)\mu = 0; \\ \mu = \mu(y) \Rightarrow \quad M\mu' + (M_y - N_x)\mu = 0)\end{gathered}$$

$$\frac{M_y - N_x}{M} = \frac{1-2y}{y}$$

é uma função dependente apenas da variável y. Então a equação admite um fator integrante $\mu = \mu(y)$ solução da edo de primeira ordem

$$\mu' + \frac{1-2y}{y}\mu = 0.$$

+ **0,3**

Resolvendo esta edo (v. questão 1a)), obtemos que $\mu = \frac{1}{y}\mathrm{e}^{2y}$ é um fator integrante da equação $ydx + (2xy - \mathrm{e}^{-2y})dy = 0$. + **0,3**

3. **a)** **(1,0 ponto)** *Resolva a equação homogênea* $y''' + y' = 0$.

Equação característica: $r^3 + r = 0, \quad r(r^2+1) = 0$;
raízes: $0, \pm i$ - todas com multiplicidade 1.

0,5

$$y = c_1 + c_2\cos x + c_3\mathrm{sen} x$$

+ **0,5**

b) **(0,5 pontos)** *Dê a forma de uma solução particular da equação*
$$y''' + y' = \cos x$$
que pode ser determinada pelo método dos coeficientes indeterminados.

$$\cos x \equiv P_m(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$$

onde $P_m(x) = 1$, $m = 0$ (polinômio de grau $m = 0$ - uma constante), $\alpha = 0, \beta = 1$. $\alpha + i\beta = i$ é uma raiz de multiplicidade 1 da equação característica (v. item a)).

0,25

Logo, uma solução particular dada pelo método dos coeficientes indeterminados é
$$Y = x^s(Q_0(x)\cos x + R_0(x)\mathrm{sen} x)$$
onde $s = 1$ e Q_0, R_0 são polinômios de grau 0 (ou seja, constantes) i.e.

$$Y = x(a\cos x + b\mathrm{sen} x)$$

onde a e b são constantes (a serem determinadas por substituição na equação).
+ **0,25**

c) **(0,5 pontos)** *Determine uma solução particular desta equação.*

Pelo método dos coeficientes indeterminados[1]:

$$\begin{aligned}
Y' &= (a\cos x + b\mathrm{sen}) + x(-a\mathrm{sen} x + b\mathrm{cox} x)\\
Y'' &= 2(-a\mathrm{sen} x + b\mathrm{cox}) + x(-a\mathrm{cox} x - b\mathrm{sen} x)\\
Y''' &= 3(-a\mathrm{sen} x - b\mathrm{cox}) + x(a\mathrm{sen} x - b\mathrm{cox} x)
\end{aligned}$$

[1]Pelo método da variação dos parâmetros a resolução fica mais longa.

0,25

Daí, $Y''' + Y' = -2(a\text{sen}x + b\text{cox})$; substituindo na equação, obtemos

$$-2a\text{sen}x - 2b\text{cox} = \cos x\,.$$

Como as funções seno e cosseno são linearmente independentes, segue-se que $-2a = 1$ e $-2b = 0$, i.e. $a = -1/2$ e $b = 0$. Então uma solução particular é

$$Y = -\frac{1}{2}x\cos x\,.$$

+ 0,25

4. a) (1,0 ponto) *Resolva a equação de Euler* $x^2y'' + 3xy' + y = 0$, $x > 0$.

Equação indicial (substituindo $y = x^r$ na equação, obtemos $r(r-1)x^r + 3rx^r + x^r = 0$): $r(r-1) + 3r + 1 = 0$, $r^2 + 2r + 1 = 0$, $(r+1)^2 = 0$;

0,5

raízes: $r = -1$, com multiplicidade 2.
Logo,

$$y = c_1x^{-1} + c_2x^{-1}\text{ln}x\,.$$

+ 0,5

b) (1,0 ponto) *Transforme esta equação numa equação com coeficientes constantes fazendo a mudança de variável* $x = \mathrm{e}^z$ (*ou* $z = \text{ln}x$).

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} = \text{(pela Regra da Cadeia) } \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dz}$$

+ 0,2

$$\begin{aligned} y'' &= \tfrac{d}{dx}\left(\tfrac{dy}{dx}\right) = \tfrac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{x}\tfrac{dy}{dz}\right) = -\tfrac{1}{x^2}\tfrac{dy}{dz} + \tfrac{1}{x}\tfrac{d}{dx}\tfrac{dy}{dz} \\ &= -\tfrac{1}{x^2}\tfrac{dy}{dz} + \tfrac{1}{x}\left(\tfrac{d}{dz}\tfrac{dy}{dz}\right)\tfrac{dz}{dx} \\ &= -\tfrac{1}{x^2}\tfrac{dy}{dz} + \tfrac{1}{x^2}\tfrac{d^2y}{dz^2} \end{aligned}$$

+ 0,3

Substituindo estas expressões na equação, obtemos

$$x^2\left(-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2}\right) + 3x\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\right) + y = 0$$

logo,

$$\frac{d^2y}{dz^2} + 2\frac{dy}{dz} + y = 0\,.$$

+ 0,5

5. a) (1,0 ponto) *Verifique que* $y_1 = e^x$ *é uma solução da equação* $xy'' - (x+N)y' + Ny = 0$, *qualquer que seja* $N \in \mathbb{R}$. *Para* $N = 1$, *determine outra solução* y_2 *tal que* $\{y_1, y_2\}$ *seja um conjunto fundamental de soluções, pelo método de redução de ordem ("variação do parâmetro").*

$y_1 = y_1' = y_2'' = \mathrm{e}^x$; substituindo no lado esquerdo da equação, temos

$$x\mathrm{e}^x - (x+N)\mathrm{e}^x + N\mathrm{e}^x = (x - x - N + N)\mathrm{e}^x = 0,$$

logo y_1 é uma solução.

0,2

$y_2 = vy_1 = v\mathrm{e}^x$
(cy_1 é solução para qualquer constante c; v é a variação do "parâmetro" c)
$y_2' = v'\mathrm{e}^x + v\mathrm{e}^x$
$y_2'' = v''\mathrm{e}^x + 2v'\mathrm{e}^x + v\mathrm{e}^x$;

substituindo na equação, obtemos

$$x\left(v''\mathrm{e}^x + 2v'\mathrm{e}^x + v\mathrm{e}^x\right) - (x+1)\left(v'\mathrm{e}^x + v\mathrm{e}^x\right) + v\mathrm{e}^x = 0$$
$$x(v'' + 2v' + v) - (x+1)(v' + v) + v = 0$$
$$xv'' + (x-1)v' = 0$$
$$v'' + (1 - \tfrac{1}{x})v' = 0$$

(equação de ordem reduzida/de ordem 1 para v')

+ 0,3

(fator integrante: $\mathrm{e}^{\int (1-\frac{1}{x})dx} = \mathrm{e}^{x - \ln x} = x\mathrm{e}^x$)

$$\begin{aligned}
(x\mathrm{e}^x v')' &= 0 \\
x\mathrm{e}^x v' &= c_1 \\
v' &= c_1 x\mathrm{e}^{-x} \\
v &= c_1 \int x\mathrm{e}^{-x}dx \ (\equiv \textstyle\int u dv) \\
v &= c_1(-x\mathrm{e}^{-x} + \textstyle\int \mathrm{e}^{-x}dx) = -c_1 x\mathrm{e}^{-x} - c_1\mathrm{e}^{-x} + c_2 \\
v &= x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

+ 0,3

$$y_2 = (x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^x$$
$$y_2 = 1 + x$$

+ 0,2

b) (1,0 ponto) *Sejam y_1 e v funções diferenciáveis (não particularizar) num intervalo aberto não-degenerado I tais que $y_1(x_0) \neq 0$ e $v'(x_0) \neq 0$, para algum $x_0 \in I$. Mostre que y_1 e $y_2 = vy_1$ são linearmente independentes em I, calculando o Wronskiano $W(y_1, y_2)$. Mostre também que se y_1 e $y_2 = vy_1$ são soluções de uma EDO linear homogênea de segunda ordem $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (qualquer), com os coeficientes $p(x), q(x)$ sendo funções contínuas em I, e se y_1 não se anula em I, então*

$$v'(x) = \tfrac{y_1(x_0)^2 v'(x_0)}{y_1(x)^2} e^{-\int_{x_0}^x p(s)ds}, \quad x \in I.$$

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & vy_1 \\ y_1' & v'y_1 + vy_1' \end{vmatrix} \\ &= v'y_1^2 \end{aligned}$$

Daí, temos que $W(y_1, y_2)(x_0) = v'(x_0)y_1(x_0)^2 \neq 0$, pois por hipótese $v'(x_0) \neq 0$ e $y_1(x_0) \neq 0$, logo as funções são linearmente independentes (v. Teorema dado em aula e no livro-texto).

0,5

Se y_1 e $y_2 = vy_1$ são soluções de uma EDO linear homogênea de segunda ordem $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, com os coeficientes $p(x), q(x)$ sendo funções contínuas em I, então $W(y_1, y_2) = c\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}$, para alguma constante c e qualquer primitiva $\int p(x)dx$ de p (fórmula de Abel).

+ 0,2

Tomando a primitiva $\int_{x_0}^x p(s)ds$, ficamos com $W(y_1, y_2) = c\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^x p(s)ds}$ e $c = W(y_1, y_2)(x_0)$. Mas $W(y_1, y_2) = v'y_1^2$, então

$$v'(x)y_1(x)^2 = v'(x_0)y_1(x_0)^2\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^x p(s)ds},$$

logo,

$$v'(x) = \frac{v'(x_0)y_1(x_0)^2}{y_1(x)^2}\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^x p(s)ds}.$$

+ 0,3