DM–IMECC–UNICAMP – Geometria Analítica e Vetores - MA141 - T. Z
Prof. Marcelo M. Santos – **1a. prova,** **05/04/2010**
Aluno: ____________________________ RA: ___________
Assinatura (idêntica à do RG): ________________________________

Observações: *Tempo de prova: 100min. Justifique sucintamente todas as suas afirmações.* ***É proibido o uso de qualquer equipamento eletrônico; em particular do celular ou calculadora. Desligar o celular!***
Cada questão vale 2,5 pontos.

Questão 1. **<u>Usando o método de escalonamento de Gauss-Jordan</u>**, resolva o sistema abaixo e descreva (matematicamente) o seu conjunto solução:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + 2z &= 6 \end{cases}$$

2. **<u>Usando o processo de linha equivalência (escalonamento)</u>**, calcule a inversa da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$ (quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$).

3. **a) (1,25 pontos)** Sejam A e B matrizes diagonais (i.e. elementos de posição ij com $i \neq j$ são nulos) de ordem $n \times n$ ($n \in \mathbb{N}$ arbitrário). Mostre (prove) que o produto AB também é uma matriz diagonal e exiba o elemento $[AB]_{ii}$ em termos dos elementos de A e B, para $i \in \{1, \cdots, n\}$ qualquer.
b) (1,25 pontos) Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz diagonal $n \times n$ ($n \in \mathbb{N}$ qualquer) com $a_{ii} \neq a_{jj}$ sempre que $i \neq j$. Dada uma matriz B de ordem $n \times n$ arbitrária, prove que $AB = BA$ se, e somente se, B também é uma matriz diagonal.

4. Uma matriz é dita *elementar* se é obtida da matriz Identidade por uma (única) operação elementar sobre as linhas da matriz Identidade. Denota-se por $E_{i,j}$, $E_i(\alpha)$ e $E_{i,j}(\alpha)$ as matrizes obtidas da Identidade respectivamente da seguinte maneira: permutando-se a linha i com a linha j, multiplicando-se a linha i pelo escalar não nulo α e adicionando-se à linha j a linha i multiplicada por α. **<u>Usando as propriedades (os teoremas e similares) do determinante e da inversa vistas em aula</u>**, mostre que
a) (1,0 ponto) $\det E_{i,j} = -1$, $\det E_i(\alpha) = \alpha$ e $\det E_{i,j}(\alpha) = 1$;
b) (1,5 pontos) $E_{i,j}$, $E_i(\alpha)$ e $E_{i,j}(\alpha)$ são matrizes invertíveis e determine as suas inversas.

Não se esqueça de justificar todas as suas afirmações. **Boa prova!**

Gabarito

Questão1. Matriz do sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

0,25 pontos até aqui.

Matriz aumentada:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 4 \\ 3 & -1 & 5 & | & 2 \\ 4 & 1 & 2 & | & 6 \end{pmatrix}$$

\+ **0,25 pontos** até aqui.

Fazendo operações elementares com as linhas de $(A|B)$ (devem constar na prova) chegamos à matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 8/7 \\ 0 & 1 & -2 & | & 10/7 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix},$$

a qual é a forma escalonada reduzida da matriz ampliada do sistema dado.

\+ **1,25 pontos**

Daí, o sistema é equivalente a

$$\begin{cases} x + z &= \frac{8}{7} \\ y - 2z &= -\frac{10}{7} \end{cases}$$

\+ **0,25 pontos**

Pondo as variáveis com pivôs, x e y, em termo da "variável livre" (sem pivô), z, obtemos

$$\begin{cases} x = & \frac{8}{7} - z \\ y = & \frac{10}{7} + 2z \end{cases}$$

O conjunto solução é então

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} ; \text{valem as equações acima} \right\}$$

ou seja, o seguinte conjunto de matrizes colunas

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{8}{7} \\ \frac{10}{7} \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} ; z \text{ é um escalar qualquer} \right\}.$$

+ 0,5 pontos

Questão 2. Consideramos a matriz aumentada

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ b & c & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

0,25 pontos

Fazendo operações elementares com as linhas desta matriz (devem constar na prova) chegamos a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & ac-b & -c & 1 \end{pmatrix}.$$

+ 2,0 pontos

Logo, a inversa da matriz dada é a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac-b & -c & 1 \end{pmatrix}.$$

+ 0,25 pontos

Questão 3. **a)** Pela definição do produto de matrizes, temos que

$$[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}[B]_{kj}.$$

0,3 pontos

Daí, como A é diagonal, $[A]_{ik} = 0$ se $k \neq i$, vem que

$$[AB]_{ij} = [A]_{ii}[B]_{ij}.$$

+ 0,3 pontos

Mas B também é diagonal, então, $[AB]_{ij} = [A]_{ii} \cdot 0 = 0$ se $i \neq j$,

+ 0,3 pontos

e

$$[AB]_{ii} = [A]_{ii}[B]_{ii}.$$

+ 0,35 pontos

b) *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz diagonal $n \times n$ ($n \in \mathbb{N}$ qualquer) com $a_{ii} \neq a_{jj}$ sempre que $i \neq j$. Dada uma matriz B de ordem $n \times n$ arbitrária, prove que $AB = BA$ se, e somente se, B também é uma matriz diagonal.*

Suponhamos que $AB = BA$. Pela definição do produto de matrizes, temos que

$$[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}[B]_{kj} \ \text{ e } \ [BA]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [B]_{ik}[A]_{kj}.$$

0,3 pontos

Daí, como A é diagonal, $[A]_{ik} = 0$ se $k \neq i$ ($[A]_{kj} = 0$ se $k \neq j$), vem que

$$[AB]_{ij} = [A]_{ii}[B]_{ij} \ \text{ e } \ [BA]_{ij} = [B]_{ij}[A]_{jj}.$$

+ 0,2 pontos.

Como $AB = BA$ significa $[AB]_{ij} = [BA]_{ij}$ para qualquer $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ (definição da igualdade de matrizes) segue-se que

$$[A]_{ii}[B]_{ij} = [B]_{ij}[A]_{jj}$$

i.e.

$$([A]_{ii} - [A]_{jj})[B]_{ij} = 0.$$

+ 0,2 pontos

Mas $[A]_{ii} - [A]_{jj} \neq 0$ sempre que $i \neq j$, por hipótese. Então $[B]_{ij} = 0$ também sempre que $i \neq j$, ou seja, B é uma matriz diagonal. **+ 0,2 pontos**

Reciprocamente, suponhamos que B seja uma matriz diagonal. Vimos acima que

$$[AB]_{ij} = [A]_{ii}[B]_{ij} \ \text{ e } \ [BA]_{ij} = [B]_{ij}[A]_{jj}.$$

Sendo B diagonal, segue-se daí que $[AB]_{ij} = 0$ e $[BA]_{ij} = 0$, logo, $[AB]_{ij} = [BA]_{ij}$ (ambos são nulos), se $i \neq j$, e se $i = j$, temos $[AB]_{ij} = [A]_{ii}[B]_{ii}$ e $[BA]_{ij} = [B]_{ii}[A]_{ii}$, logo $[AB]_{ij} = [BA]_{ij}$ também neste caso. Então $[AB]_{ij} =$

$[BA]_{ij}$, para quaisquer $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, ou seja, $AB = BA$ (pela definição da igualdade de matrizes). **+ 0,35 pontos**

Questão 4. **a)** Por um teorema que vimos em aula (do livro-texto) e pela definição dada das matrizes, temos que

$$\det E_{i,j} = \det \mathrm{I}, \quad \det E_i(\alpha) = \alpha \det \mathrm{I} \ \text{ e } \ \det E_{i,j}(\alpha) = \det \mathrm{I},$$

0,5 pontos

onde I denota a matriz Identidade. Mas podemos mostrar (pelo método da indução) que $\det \mathrm{I} = 1$ – exercício deixado em aula –, **+0,3 pontos**
então das fórmulas acima, segue-se o resultado. **+0,2 pontos**

b) <u>Teorema</u> (visto em aula): *Uma matriz $(n \times n)$ é invertível se, e somente se, o seu determinante é diferente de zero.* **0,3 pontos**
Por outro teorema que vimos em aula e pela definição dada das matrizes, temos que

$$\det E_{i,j} = \det \mathrm{I}, \quad \det E_i(\alpha) = \alpha \det \mathrm{I} \ \text{ e } \ \det E_{i,j}(\alpha) = \det \mathrm{I},$$

onde I denota a matriz Identidade. Mas podemos mostrar (pelo método da indução) que $\det \mathrm{I} = 1$ – exercício deixado em aula –,

QUEM FEZ O ITEM a) PODE USÁ-LO AQUI

então os determinantes das matrizes $E_{i,j}, E_i(\alpha), E_{i,j}(\alpha)$ são não nulos, logo, pelo teorema enunciado acima, temos que estas matrizes são invertíveis.
+0,45 pontos

Quanto às inversas, podemos determiná-las usando que a inversa pode ser obtida fazendo-se com a matriz Identidade as mesmas operações linhas que fazemos com a matriz para chegarmos na Identidade (resultado visto em aula).

Notemos que para chegarmos na Identidade, com operações linhas (operações elementares sobre as linhas da matriz), a partir da matriz $E_{i,j}$, basta permutarmos (novamente) as linhas i e j de $E_{i,j}$. Esta operação na Identidade resulta novamente na matriz $E_{i,j}$, logo, a inversa da matriz $E_{i,j}$ é ela própria.
+0,25 pontos

Analogamente, temos que a inversa da matriz $E_i(\alpha)$ é a matriz $E_i(\frac{1}{\alpha})$,
+0,25 pontos

e a inversa de $E_{i,j}(\alpha)$ é $E_{i,j}(-\alpha)$. **+0,25 pontos**