DM–IMECC–UNICAMP, MA720/Análise no $\mathbb{R}^n$, Prof. Marcelo M. Santos
1a. prova, 04/09/2013
Aluno: ______________________________________ RA: ____________
Assinatura como no RG: _________________________________

Justifique (de forma sucinta) todas as suas afirmações.

Questão 1. a) (0,5 pontos) Defina conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$.

b) (0,5) Defina conjunto fechado.

b) (1,5) Mostre que um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se, e somente se, contém todos os seus pontos de fronteira.

2. a) (0,5) Defina conjunto conexo.

b) (1,0) Mostre que uma união qualquer de conjuntos conexos que possuem um ponto em comum é um conjunto conexo.

c) (1,0) Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto *conexo por caminhos*, i.e. para quaisquer $x, y \in X$ existe uma aplicação contínua $\lambda : [0,1] \to X$ tal que $\lambda(0) = x$ e $\lambda(1) = y$. Mostre que X é conexo. Sugestão: escreva X como uma união de caminhos (imagens de aplicações contínuas $\lambda : [0,1] \to X$); justifique que cada caminho é um conjunto conexo.

3. Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e $x \notin K$.

a) (0,5) Mostre que $d(x, K) := \inf\{|y - x|\,;\, y \in K\}$ é um número estritamente maior do que zero.

b) (1,0) Mostre que existem $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^n$ abertos, disjuntos, tais que $K \subset A$ e $x \in B$.

c) (0,5) Mostre que o conjunto A no item **b)** pode ser tomado como uma união finita de bolas.

4. Dados $m > 0$ e $n > 0$, quaisquer, seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \frac{|x|^m |y|^n}{x^{2m} + y^{2n}} \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0) \text{ e } f(0,0) = 0.$$

a) (0,5) Mostre que f é contínua na origem $(0,0)$.

b) (0,5) Calcule $f(x,0)$, $f(0,y)$ e daí, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

c) (1,0) f é diferenciável em $(0,0)$?

5. (1,0) Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $f : X \times K \to \mathbb{R}^p$ contínua. Suponha que para cada $x \in X$ a equação $f(x,y) = 0$ tenha uma única solução $y = g(x)$. Mostre que a função $g : X \to \mathbb{R}^n$ assim definida é uma aplicação contínua.

Boa prova!