MA720/MM720 – Análise no $\mathbb{R}^n$, 1s2016 **1a. prova, 05/04/2016**

Questão 1. (a) (0,5 pontos) Defina aplicação contínua ($f : X \to \mathbb{R}^n$, $X \subset \mathbb{R}^m$).

(b) (1,0) Mostre que a aplicação projeção $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\pi(x, y) = x$, é contínua.

(c) (1,0) Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto. Mostre que se F é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^{m+n}$ contido em $\mathbb{R}^m \times K$, então $\pi(F)$ é fechado (em $\mathbb{R}^m$), sendo π a projeção definida no item **(b)**.

2. (2,5) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$, se $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - 0$, e $f(0) = 0$. Mostre que f não é de classe C^2 em nenhuma vizinhança contendo a origem 0.

3. (a) (0,5) Enuncie a Regra da Cadeia (cf. livro-texto).

(b) (1,0) Sejam U e V conjuntos abertos em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, respectivamente, e $f : U \to \mathbb{R}^n$, $g : V \to \mathbb{R}^p$, aplicações de classe C^1, com $f(U) \subset V$. Denotando por $x \equiv (x_1, \cdots, x_m)$ um ponto qualquer em U, $y = f(x)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$, e $z = g(f(x))$, $z = (z_1, \cdots, z_p)$, usando a Regra da Cadeia, mostre que

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j}, \qquad i = 1, \cdots, p, \quad j = 1, \cdots, m$$

onde $\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = D_j(g \circ f)_i(x)$, $\frac{\partial z_i}{\partial y_k} = D_k g_i(f(x))$ e $\frac{\partial y_k}{\partial x_j} = D_j f_k(x)$, $x \in U$.

(c) (1,0) Sejam U um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e $f : U \to \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável. Mostre que se, para $a, b \in U$, o segmento $[a, b] := \{a + t(b - a); t \in [0, 1]\}$ está contido em U, então a função $\phi(t) = f(a + t(b - a))$ é diferenciável em todo ponto $t \in [0, 1]$ e que existe um ponto $s \in (0, 1)$ tal que $f(b) - f(a) = \nabla f(a + s(b - a)) \cdot (b - a)$. (*Teorema do Valor Médio para funções de várias variáveis.*)

4. Seja U um subconjunto aberto e conexo do $\mathbb{R}^n$.

(a) (1,0) Mostre que se $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e localmente constante (i.e. para todo $x \in U$ existe um aberto contendo x em que f é constante) então f é constante (em U).

(b) (1,5) Mostre que se $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 com derivadas parciais nulas em U ($D_i f(x) = 0$ para todo $i = 1, \cdots, n$ e todo $x \in U$) então f é uma função constante.

Boa prova!

1. **(a)** (*Cf. livro-texto [Munkres].*) Uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, é contínua em um ponto $x_0 \in X$ se, para todo conjunto aberto V (aberto em $\mathbb{R}^n$) contendo a imagem $f(x_0)$, existir um conjunto aberto U em X, contendo x_0, tal que $f(U) \subset V$. **0,3 pontos até aqui.**

A aplicação f é contínua se for contínua em todo ponto do seu domínio X. $+\,\mathbf{0,2}$

(b) *Uma maneira.*

Sejam $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e V um aberto em $\mathbb{R}^m$ contendo $\pi(z_0) = x_0$. O produto cartesiano $V \times \mathbb{R}^n$ é um aberto em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ (em geral o produto cartesiano de abertos quaisquer é um aberto), pois se $(a, b) \in V \times \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \cdots, a_m), b = (b_1, \cdots, b_n)$, sendo V aberto em $\mathbb{R}^m$, existe $\varepsilon > 0$ tal que o cubo $(a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon) \times \cdots \times (a_m - \varepsilon, a_m + \varepsilon)$ (bola aberta na norma do máximo) está contido em V, e daí, temos que o cubo $(a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon) \times \cdots \times (a_m - \varepsilon, a_m + \varepsilon) \times (b_1 - 1, b_1 + 1) \times \cdots \times (b_n - 1, b_n + 1)$ está contido em $V \times \mathbb{R}^n$. **0,5**

Além disso, o ponto $z_0 = (x_0, y_0)$ pertence a $V \times \mathbb{R}^n$ (pois $x_0 \in V$) e $\pi(V \times \mathbb{R}^n) = V \subset V$. $+\mathbf{0,5}$

(c) (*Cf. exercício da Lista - [Elon].*)

Devemos mostrar que $\overline{\pi(F)} \subset \pi(F)$.

Seja $a \in \overline{\pi(F)}$. *Então, pela definição de fecho, existe uma sequência* $x_k = \pi(x_k, y_k) \in \pi(F)$, $(x_k, y_k) \in F$, *tal que* $x_k = \pi(x_k, y_k) \to a$. **0,2**

Como $F \subset \mathbb{R}^m \times K$ *e* $(x_k, y_k) \in F$, *temos que* $y_k \in K$, *para todo* k $(k \in \mathbb{N})$. $+\mathbf{0,1}$

Sendo K *compacto, segue-se que existe uma subsequência* $\{y_{k_j}\}$ *e um ponto* $b \in K$ *tal que* $y_{k_j} \to b$. *(Usamos o teorema que diz que todo compacto num espaço euclidiano é "sequencialmente compacto".)* $+\mathbf{0,3}$

Então, passando-se ao limite na subsequência $x_{k_j} = \pi(x_{k_j}, y_{k_j})$ *e usando que* $(a, b) = \lim(x_{k_j}, y_{k_j})$ *(convergência é equivalente a convergência das coordenadas) e que a aplicação* π *é contínua (item* **(b)**), *obtemos que* $a = \pi(a, b)$. $+\mathbf{0,2}$

Além disso, F *é fechado, então* $(a, b) = \lim(x_{k_j}, y_{k_j}) \in \overline{F} = F$ *(lembrando que* $(x_k, y_k) \in F$ *para todo* k*).* $+\mathbf{0,1}$

Portanto, $a = \pi(a, b)$ *pertence a* $\pi(F)$ *(visto que* $(a, b) \in F$*).* $+\mathbf{0,1}$

2. *Cf. exercício da Lista - [Munkres].*

$D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0.$ **0,2**

$D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0.$ **0,2**

$D_1 f(0,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,y)-f(0,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,y)-0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,y)}{t}$
$= \lim_{t\to 0} \frac{ty(t^2-y^2)}{t(t^2+y^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{y(t^2-y^2)}{(t^2+y^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{-y^3}{y^2} = -y, \quad y \neq 0.$ **0,4**

$D_2 f(x,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x,t)-f(x,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x,t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{xt(x^2-t^2)}{t(x^2+t^2)}$
$= \lim_{t\to 0} \frac{x(x^2-t^2)}{(x^2+t^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{x^3}{x^2} = x, \quad x \neq 0.$ **0,4**

$D_2 D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{D_1 f(0,t)-D_1 f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-t-0}{t} = \lim_{t\to 0}(-1) = -1.$
0,4

$D_1 D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{D_2 f(t,0)-D_2 f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t-0}{t} = \lim_{t\to 0} 1 = 1.$ **0,4**

Como $D_2 D_1 f(0,0) \neq D_1 D_2 f(0,0)$, pelo Teorema de Schwarz, concluímos que f não é de classe C^2 em nenhuma vizinhança da origem $0 = (0,0)$. **0,5**

3. **(a)** *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ com $f(A) \subset B$. Se f é diferenciável em a ($a \in IntA$) e g é diferenciável em $b = f(a)$ ($b \in IntB$) então $g \circ f$ é diferenciável em a e $Dg \circ f(a) = Dg(b) \cdot Df(a)$.*

Enunciado correto: **0,5**; *parcialment correto:* **0,25**

(b) Como aplicações de classe C^1 são diferenciáveis (Teorema), **0,3**
pela Regra da Cadeia, podemos escrever $Dg \circ f(x) = Dg(y)Df(x)$, para todo $x \in U$, $y = f(x)$, **0,2**
e como a derivada é a matriz jacobiana (ou pode ser identificada com a mesma), ou seja, $Dg \circ f(x) = (D_j(g \circ f)_i(x))$, $i = 1, \cdots, p$, $j = 1, \cdots, m$, $Df(x) = (D_j f_i(x))$, $i = 1, \cdots, n$, $j = 1, \cdots, m$, $Dg(y) = (D_j g_i(y))$, $i = 1, \cdots, p$, $j = 1, \cdots, n$, **0,2**
usando a definição do produto de matrizes, obtemos
$D_j(g \circ f)_i(x) = \sum_{k=1}^{n} D_k g_i(y) D_j f_k(x)$ **0,2**
o que, usando a notação introduzida, nos dá o resultado. **0,1**

(c) $\phi(t) = f \circ g(t)$, onde $g(t) = a + t(b-a)$, para $t \in (-\varepsilon, 1+\epsilon)$, para algum $\varepsilon > 0$. (Aqui usamos que $[a,b] \subset U$ e que U é aberto.) **0,1**
A função g é diferenciável (é linear), logo, pela Regra da Cadeia, temos que ϕ também o é, em todo ponto do intervalo $(-\varepsilon, 1+\epsilon)$, **0,2**
e $\phi'(t) = D\phi(t) = Df(g(t))Dg(t) = \nabla f(g(t)) \cdot (b-a)$. **0,2**
Aplicando o Teorema do Valor Médio (para funções reais de uma variável) a função ϕ no intervalo $[0,1]$, obtemos que existe um ponto $s \in (0,1)$ tal que $\phi(1) - \phi(0) = \phi'(s)(1-0)$. **0,3**

Então, como $\phi(1) = f(b)$, $\phi(0) = f(a)$ e $\phi'(s) = \nabla f(g(s)) \cdot (b - a) = \nabla f(a + s(b - a)) \cdot (b - a)$, obtemos o resultado. **0,2**

4. **(a)** Fixando um ponto $x_0 \in U$, seja $A = \{x \in U; f(x) = f(x_0)\}$ $(= f^{-1}(\{f(x_0)\})$). Vejamos que A é aberto e fechado em U. **0,3**

Dado $a \in A$, pela hipótese, existe uma bola aberta B com centro em a em que f é constante. Como $a \in A$, temos que $f(a) = f(x_0)$ e, sendo, f constante em B, temos também $f(x) = f(x_0)$, para todo $x \in B$. Logo, $B \subset A$. Portanto, A é aberto. **0,3**

Seja $b \in \overline{A}$, sendo o fecho relativo a U, logo, $b \in U$ e existe uma sequência $\{x_k\}$ de pontos em A com limite sendo b. Pela definição de A, temos que $f(x_k) = f(x_0)$ para todo k. Daí, pela continuidade de f, passando ao limite, obtemos que $f(b) = \lim f(x_k) = \lim f(x_0) = f(x_0)$, logo, $b \in A$. Portanto, A também é fechado em U. **0,3**

Sendo A um subconjunto aberto e fechado em U, e U conexo, concluímos que $A = \emptyset$ ou $U - A = \emptyset$. (Caso contrário, teríamos a cisão $U = A \cup (U - A)$.) Como $A \neq \emptyset$ (pois $x_0 \in A$), segue-se que $U - A = \emptyset$, donde $A = U$, e, portanto, $f(x) = f(x_0)$ para todo $x \in U$. **0,1**

(b) Dado $x \in U$, seja B uma bola aberta de centro x e contida em U (U é aberto). Como qualquer segmento de reta $[a, b]$ ligando os pontos a, b em B está contido em B, **0,3**
pelo Teorema do valor médio para funções reais (questão **3.(c)**) (notando que f é diferenciável, pois é de classe C^1), temos que dados quaisquer $a, b \in B$ existe um ponto c no interior do segmento $[a, b]$ tal que $f(b) - f(a) = \nabla f(c) \cdot (b - a)$. **0,3**
Mas sendo todas as derivadas parciais de f nulas (em qualquer ponto de U), concluímos então que $f(b) = f(a)$, para quaisquer $a, b \in B$, ou seja, dado qualquer $x \in U$, a função f é constante em qualquer bola de centro x contida em U. Portanto, f é localmente constante, e segue-se então, pelo item **(a)**, que f é constante (em U). **0,4**