MA/MM720 – Análise no $\mathbb{R}^n$ 12/7/16 Prof. Marcelo Santos

Prova substitutiva

- **Resolver as 2 questões da prova em que você obteve a menor nota.**
- **Resolver mais 2 questões de provas distintas.**

P1.1. Sejam $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$, $f(\mathbf{0}) = 0$, $g(x,y) = (x, y+x^2)$ e $h = f \circ g$, $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$.

(a) (0,5) Mostre que h não é contínua em $\mathbf{0}$. $(\mathbf{0} = (0,0))$.

(b) (2,0) Mostre que existem as derivadas direcionais $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}$ e $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}}$, para qualquer $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$, e que isso não é verdade para h, i.e. mostre também que, para algum $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$, não existe a derivada direcional $\frac{\partial h}{\partial \mathbf{u}}$.

P1.2. (2,5) Sejam X um subconjunto limitado do $\mathbb{R}^n$ e A um aberto contendo a fronteira de A. Mostre que $X - A$ é compacto.

P2.1. (a) (0,5) Enuncie a *Forma Local das Imersões*.

(b) (2,0) Sejam A um aberto em $\mathbb{R}^m$ e $f : A \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Mostre que o conjunto dos pontos em que f' é injetiva é aberto (em $\mathbb{R}^m$).

P2.2. (2,5) Seja S um subconjunto limitado do $\mathbb{R}^n$. Mostre que se f é uma função integrável em S então f é integrável em Int$S$ e $\int_{\mathrm{Int}S} f = \int_S f$.

P3.1. (a) (0,5) Mostre a fórmula $d(fg) = fdg + gdf$, para funções diferenciáveis $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(b) (0,5) Mostre a fórmula ("regra do produto" para formas) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$, para $\omega = f dx_I$, $\eta = g dx_J$, $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$, $J = \{j_1 < \cdots < j_l\}$, e $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis.
(*Use as propriedades de produto exterior.*)

(c) (1,5) Sejam M uma k-variedade compacta orientada em $\mathbb{R}^n$, com o ∂M com a orientação induzida, se $\partial M \neq \emptyset$, e, ω e η formas de classe C^1 de ordem k e l, respectivamente, definidas numa vizinhança de M. Mostre a "fórmula de integração por partes" para formas
$\int_M d\omega \wedge \eta = \int_{\partial M} \omega \wedge \eta - (-1)^k \int_M \omega \wedge d\eta$ (pondo $\int_{\partial M} \omega \wedge \eta = 0$ se $\partial M = \emptyset$).

P3.2. (2,5) Sejam M uma $(n-1)$-variedade em $\mathbb{R}^n$ (uma *hiperfície*/variedade de codimensão 1 em $\mathbb{R}^n$) (com bordo ou sem bordo). Mostre que se M admite um campo de vetores normais contínuo (i.e. se existe $\nu : M \to \mathbb{R}^n$ contínuo tal que $\nu(p) \perp T_pM$ para todo $p \in M$) então M é orientável.

Boa prova!