MA311 – GABARITO COM PONTUAÇÃO DA PROVA 2 – 2017s1 – TURMAS P e Q.

$\boxed{1.}$ Seja a_n o termo geral da série.

$$|a_{n+1}|/|a_n| = \left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)(2n+3)}\right| / \left|\frac{(-1)^n n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\right| \quad \Big]\ 0{,}2$$

$$= \frac{(n+1)!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{1\cdot 3\cdots(2n+1)}{n!} \quad \Big]\ 0{,}2$$

$$= \frac{n+1}{2n+3} \quad \Big]\ 0{,}2$$

$$\therefore \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{2} \quad \Big]\ 0{,}2$$

Daí, como $|1/2| < 1$, pelo T. Razão concluímos que a série é convergente.] 0,2

$\boxed{2.}$ (a)

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 7-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(7-\lambda) + 9$$

$$= \lambda^2 - 8\lambda + 7 + 9 = \lambda^2 - 8\lambda + 16$$

$$= (\lambda - 4)^2 \quad \Big]\ 0{,}1$$

$\therefore$ $\lambda = 4$ é raiz deste polinômio (é autovalor) de mult. 2.

Autovetores $V = (a, b) \equiv \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 1-4 & -3 \\ 3 & 7-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-3a + 3b = 0 \quad \Big]\ 0{,}1$$

0,1 [$b = -a$ $\therefore$ $V_1 = (1, -1)$ é um autovetor (associado ao autovalor $\lambda = 4$) e não existe mais do que um autovetor L.I.

$$x^1 = e^{4t} V_1 = e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ é uma solução.} \quad \Big]\ 0{,}1$$

0,1 [Outra solução L.I. de x^1: $x^2 = t e^{4t} V_1 + e^{4t} V_2$, $(A-4)V_2 = V_1$

$$\left(A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \right)$$

$\boxed{\text{Cont. } 2(a)}$:

Cálculando V_2, temos:

$$V_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}}_{A-4 (\equiv A-4I)} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$3a + 3b = -1$$

0,1

Tomando (e.g.) $b = 0$, obtemos $a = -1/3$.

Assim, obtemos $V_2 = (-1/3, 0)$. 0,1

$$\therefore \quad x^2 = t\, e^{4t} V_1 + e^{4t} V_2$$

$$= e^{4t} \left(\begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/3 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = e^{4t} \begin{bmatrix} t - 1/3 \\ -t \end{bmatrix}.$$ 0,1

Solução geral: $x = c_1 x^1 + c_2 x^2$ 0,1

$$= c_1 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{bmatrix} t - 1/3 \\ -t \end{bmatrix}$$ 0,1

ou

$$x = \begin{bmatrix} c_1 e^{4t} + c_2 (t - 1/3) e^{4t} \\ -c_1 e^{4t} - c_2 t e^{4t} \end{bmatrix}$$

ou

$$x = e^{4t} \begin{bmatrix} 1 & t - 1/3 \\ -1 & -t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{2.}$ (b) $\Psi(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} 1 & t - 1/3 \\ -1 & -t \end{bmatrix}$ é uma m. f. 0,2

Uma solução particular: $x_p = \Psi(t) U(t)$, $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ 0,2

$$\Psi U' = \begin{bmatrix} t e^{4t} \\ t^2 e^{4t} \end{bmatrix}$$ 0,2

Calculando U, temos:

$$\cancel{e^{4t}} \begin{bmatrix} 1 & t - 1/3 \\ -1 & -t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \cancel{e^{4t}} \\ t^2 \cancel{e^{4t}} \end{bmatrix}$$ 0,1

$$\begin{cases} u_1' + (t - 1/3) u_2' = t \\ -u_1' - t u_2' = t^2 \end{cases}$$ 0,1

$\boxed{\text{Cont. } 2(b)}$: Somando as equações acima, obtemos

$$-\frac{1}{3}u_2' = t + t^2 \qquad]\ 0{,}1$$

$$u_2' = -3t - 3t^2$$

$$u_2 = \int(-3t - 3t^2)\,dt$$

$$\boxed{u_2 = -\frac{3}{2}t^2 - t^3} \quad (+c) \qquad]\ 0{,}1$$

Subst. $u_2' = -3t - 3t^2$ na segunda equação acima, obtemos

$$-u_1' - t\cdot(-3t - 3t^2) = t^2$$

$$-u_1' + 3t^2 + 3t^3 = t^2$$

$$u_1' = 2t^2 + 3t^3 \qquad]\ 0{,}1$$

$$u_1 = \int(2t^2 + 3t^3)\,dt$$

$$\boxed{u_1 = \frac{2t^3}{3} + \frac{3}{4}t^4} \quad (+c). \qquad]\ 0{,}1$$

Portanto,

$$x_p = e^{4t}\begin{bmatrix} 1 & t - 1/3 \\ -1 & -t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{3}{2}t^2 - t^3 \\ \frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{4}t^4 \end{bmatrix} \qquad]\ 0{,}1$$

<u>Solução geral</u>: $x = \Psi(t)\,C + x_p, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$ $\quad]\ 0{,}2$

$\boxed{3.}$ (a) $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$x^2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 6x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 12\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \qquad]\ 0{,}2$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 6n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 12 a_n x^n = 0 \qquad]\ 0{,}1$$

$$-2a_2 + 12a_0 - 3\cdot 2a_3 x - 6a_1 x + 12a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty}\left\{-(n+2)(n+1)a_{n+2} + [n(n-1) - 6n + 12]a_n\right\}x^n = 0 \qquad]\ 0{,}1$$

$\boxed{\text{Cont. } 3\ (a)}$:

$$-2a_2 + 12a_0 = 0 \quad \therefore \quad \boxed{a_2 = 6a_0}$$
$$-6a_3 + 6a_1 = 0 \quad \therefore \quad \boxed{a_3 = a_1} \quad \Big] \ 0{,}1$$

$$-(n+2)(n+1)a_{n+2} + [\underbrace{n(n-1) - 6n + 12}_{\substack{\shortparallel \\ n^2 - 7n + 12}}]a_n = 0 \quad \Big] \ 0{,}1$$

$$\Delta = 49 - 48 = 1$$
$$\text{raízes: } \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases}$$
$$\therefore n^2 - 7n + 12 = (n-4)(n-3) \quad \Big] \ 0{,}1$$

$$\therefore -(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n-4)(n-3)a_n = 0$$

$$\text{(RC)} \qquad \boxed{a_{n+2} = \frac{(n-4)(n-3)}{(n+2)(n+1)} a_n} \quad \Big] \ 0{,}1$$

$\boxed{3\ (b)}$ De (RC), tomando

$$n = 2: \quad a_4 = \frac{(2-4)(2-3)}{4 \cdot 3} a_2 = \frac{2}{4 \cdot 3} 6a_0 = a_0 \quad \Big] \ 0{,}2$$
$$n = 3: \quad a_5 = 0 \cdot a_3 = 0 \quad \Big] \ 0{,}2$$
$$n = 4: \quad a_6 = 0 \cdot a_4 = 0 \quad \Big] \ 0{,}2$$

Daí, como a diferença de índices em (RC) entre a_{n+2} e a_n é 2, concluímos que

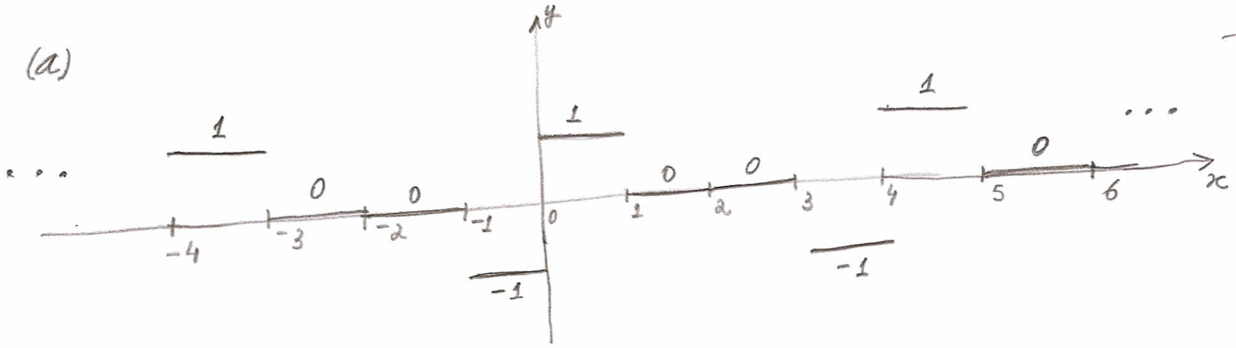
$$a_n = 0, \quad \forall\, n \geq 5 \quad \Big] \ 0{,}2$$

ou seja $a_2 = 6a_0$, $a_4 = a_0$, $a_3 = a_1$ e $a_n = 0$, $\forall n \geq 5$.

$\boxed{3\ (c)}$ (Tomando $a_0 = a_1 = 1$, obtemos)

$$y_1 = 1 + 6x^2 + x^4 \quad \text{e} \quad y_2 = x + x^3 \quad \Big] \ 1{,}4$$

$\boxed{4.}$ (a)



0,2

(b) Como a função é ímpar e o período é 4, a série de Fourier será

$$S(f) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} x \,,$$

onde

$$b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} x \, dx$$

0,4

Calculando b_n, temos:

$$b_n = \int_0^1 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} x \, dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} x \Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right)$$

0,3

Caso n seja par: $n = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$

$$b_n = -\frac{2}{2k\pi} (\cos k\pi - 1) = \begin{cases} 0, & \text{se } k \text{ for par} \\ \frac{2}{k\pi}, & \text{se } k \text{ for ímpar}; \end{cases}$$

0,3

Caso n seja ímpar: $n = 2k-1$, $k = 1, 2, \ldots$

$$b_n = -\frac{2}{(2k-1)\pi} \Big(\underbrace{\cos \frac{(2k-1)\pi}{2}}_{=0} - 1 \Big) = \frac{2}{(2k-1)\pi}$$

0,3

$$\therefore \; S(f) = \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x + \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \frac{2 \cdot \pi}{2} x + \frac{2}{3\pi} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} x + \frac{2}{5} \operatorname{sen} \frac{5\pi}{2} x$$

$$+ \frac{2}{3\pi} \operatorname{sen} \frac{6\pi}{2} x + \cdots$$

$\boxed{4(c)}$

Separação de variáveis: $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$$u_t = X \cdot T', \quad u_{xx} = X'' \cdot T$$

$$u_t = u_{xx} \Rightarrow X \cdot T' = X'' \cdot T \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T}$$

$$\Rightarrow \frac{X''}{X} = -\lambda = \frac{T'}{T}$$

0,3

Condições de contorno:

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow X(0) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$u(2,t) = 0 \Rightarrow X(2) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow X(2) = 0$$

0,2

Problema de autovalores para X:

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X, & 0 < x < 2 \\ X(0) = X(2) = 0 \end{cases}$$

Usando a fórmula $\lambda = \int_0^2 X'(x)^2 dx / \int_0^2 X(x)^2 dx$ podemos descartar o caso $\lambda < 0$. 0,2

Caso $\lambda = 0$, temos $-X'' = 0$, $X = c_1 x + c_2$, $X(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$ $\Rightarrow X = c_1 x$, $X(2) = 0 \Rightarrow 2c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow X = 0 \therefore \lambda \neq 0$. 0,2

Caso $\lambda > 0$, resolvendo a equação $-X'' = \lambda X$, $X'' + \lambda X = 0$, temos: eq. caract.: $r^2 + \lambda = 0$; raízes: $r = \pm i\sqrt{\lambda}$. Pondo $\lambda = \mu^2$, $\mu > 0$, ficamos com $r = \pm i\mu$, logo, $X = c_1 \cos \mu x + c_2 \operatorname{sen} \mu x$. Impondo as C.C., obtemos: $X(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow X = c_2 \operatorname{sen} \mu x$, $X(2) = 0 \Rightarrow c_2 \operatorname{sen} 2\mu = 0 \Rightarrow$

$$2\mu = n\pi, \quad n = 1, 2, \ldots$$

0,3

Pondo $\lambda_n = \lambda = \mu^2 = n^2\pi^2/4$ e resolvendo a equação para T ($T' = -\lambda T$, $T = \text{const.}\, e^{-\lambda t}$) obtemos a sequência de soluções

$$u_n(x,t) = \left(\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} x\right) \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2}{4} t}$$

para o PVC $\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t) = u(2,t) = 0. \end{cases}$

0,2

Observando que vale o princípio da superposição para este problema, buscamos a solução u do problema dado da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{4} t} \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} x$$

0,2

$\boxed{\text{Cont. } 4(c)}$ Impondo a C.I. $u(x,0) = f(x)$, devemos ter

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} x$$ 0,2

logo, a solução do problema dado é $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} x$ 0,2

com $c_n = b_n$, calculado no item (b).