Campos log-lipschizianos e estrutura lagrangiana na dinâmica de fluidos

Marcelo M. Santos[1]

Este texto foi motivado pelo minicurso de duas palestras ministrado na *XXVI Semana da Matemática do IBILCE*[2], de 13 a 17 de outubro de 2014, e na *XXVI Semana de Matemática do IME/UFG*[3], de 20 a 23 de outubro de 2014.

Resumo. Fazemos uma apresentação dos campos log-lipschitzianos em conjuntos abertos do $\mathbb{R}^n$, incluindo exemplos, uma exposição sobre a validade do Teorema de Picard para campos log-lipschitzianos, o lema de Osgood (uma generalização "não linear" do lema de Gronwall) e mostramos que o produto de convolução do gradiente da solução fundamental do laplaciano com uma função em L^p é um campo log-lipschitziano. Veremos como este resultado tem aplicação na dinâmica de fluidos, para as soluções obtidas por D. Hoff para fluidos compressíveis com viscosidade, ou seja, falaremos sobre o seguinte resultado: se a velocidade inicial estiver em um espaço de Sobolev com um índice positivo adequado então o fluido correspondente tem estrutura lagrangiana, i.e. as curvas integrais do campo de velocidade são únicas. Também falaremos sobre a imersão de espaços de Sobolev no conjunto das funções log-lipschitzianas.

Esperamos que este texto tenha sido útil para o melhor entendimento das palestras e para ampliar o conhecimento sobre o assunto.

[1]IMECC–Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP–Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP

[2]Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, UNESP–Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, SP

[3]Instituto de Matemática e Estatística, UFG–Universidade Federal de Goiás, Goiânia, GO

Capítulo 1

1.1 Os campos log-lipschitzianos

Antes de definirmos os campos log-lipschitzianos, conceito básico deste texto, como motivação vamos lembrar a definição de campos lipschitzianos e o Teorema de Picard, sobre a existência e unicidade de curvas integrais (ou trajetórias, trajetórias de partículas, ou fluxo) desses campos. Naturalmente, como o nome indica, campos log-lipschitzianos estão relacionados com campos lipschitzianos. Como veremos, eles são uma generalização destes, no sentido de que o conjunto dos campos lipschitzianos está contido no conjunto dos campos log-lipschitzianos.

Em todo o texto, Ω denotará um aberto do $\mathbb{R}^n$ e I um intervalo aberto da reta.

Como sabemos, um campo de vetores v em Ω (i.e. uma aplicação $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$) é dito um campo lipschitziano quando para alguma constante C ($C > 0$) temos que

$$|v(x_1) - v(x_2)| \leq C|x_1 - x_2| \tag{1}$$

para quaisquer pontos x_1, x_2 em Ω. Se o campo v for limitado, esta condição é equivalente a

$$\sup_{\substack{0 < |x_1 - x_2| \leq 1 \\ x_1, x_2 \in \Omega}} \frac{|v(x_1) - v(x_2)|}{|x_1 - x_2|} < \infty.$$

Considerando o campo v também dependente de uma segunda variável real $t \in I$ (fisicamente, essa variável denota o tempo) o Teorema de Picard, nos diz que se $v : \Omega \times I \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua, e uniformemente lipschitziana em relação a t, i.e. para alguma constante C,

$$|v(x_1, t) - v(x_2, t)| \leq C|x_1 - x_2| \tag{2}$$

para quaisquer pontos x_1, x_2 em Ω e qualquer t em I, então para todo par de pontos (x_0, t_0) em $\Omega \times I$, existe uma única solução do problema

$$x' = v(x, t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{3}$$

onde $x' \equiv \partial x/\partial t$, definida em algum intervalo aberto $I_0 \equiv I(x_0, t_0) \subset I$. Denotaremos esta solução por $X(\cdot\,; x_0, t_0)$. A aplicação $t \in I_0 \mapsto X(t; x_0, t_0)$ é dita a curva integral do campo v, passando pelo ponto x_0 no instante t_0 (ou, fisicamente, na dinâmica de fluidos, a trajetória da partícula que no instante t_0 encontrava-se no ponto x_0, se $v(x, t)$ representa a velocidade de uma partícula do fluido que no instante t encontra-se no ponto x). E a aplicação $(t, x_0) \in I(x_0, t_0) \times \Omega \mapsto X(t; x_0, t_0)$, chama-se o fluxo do campo v. Como se vê, temos a dependência dessa aplicação em relação ao ponto (instante) t_0, mas, geralmente vamos considerá-lo fixado, tomando, por exemplo, como sendo o instante zero. Se o campo v for também limitado, temos $I_0 = I$, para todo $(x_0, t_0) \in \Omega \times I$.

Quando, para qualquer $(x_0, t_0) \in \Omega \times I$, o problema (3) admitir uma única solução $X(\cdot\,; x_0, t_0)$, definida em algum intervalo aberto I_0, diremos que o campo v tem *estrutura lagrangiana.*

Uma questão interessante é perguntar se a condição de Lipschitz (2) é necessária para o campo v ter estrutura lagrangiana. Um contra-exemplo simples[4] é dado pela função (campo escalar) definida(o) por $v(x,t) = x \log|x|$, se $x \neq 0$ e $v(0,t) = 0$, com $t \in \mathbb{R}$. (Vale observar que a função $-x \log x,\ x \geq 0,\ 0 \log 0 := 0$, é usada na Teoria da Informação, para definir a *entropia de Shannon*; v. [17] ou e.g. [22, §4.1], e $x \log x$ é usada em Otimização; v. e.g. [14, 6].) Podemos verificar que esta função é contínua, mas ela não satisfaz a condição de Lipschitz (2), para x em nenhuma vizinhança do zero. Com efeito, para $x \neq 0$ temos que $\partial v/\partial x = \log|x| + 1$, logo, não é uma função limitada para $x \neq 0$ em nenhuma vizinhança do zero. Notemos que a condição (2) implica que nos pontos onde v possuir derivada em relação a x, esta é uniformemente limitada (em norma) pela constante C. (Na verdade, para quem conhece Teoria da Medida e derivada fraca, podemos dizer que a condição (2) é equivalente a v ter derivada fraca $\partial v/\partial x$ no espaço L^∞ com $\|(\partial v/\partial x)(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$ para todo $t \in I$; cf. Teorema de Rademacher, v. e.g. [5].) Apesar dessa função não ser lipschitziana, i.e. não satisfazer (2), para x em nenhuma vizinhança do zero, digamos em $\Omega \times I = (-1,1) \times \mathbb{R}$, para fixar as ideias, ela tem estrutura lagrangiana em $(-1,1) \times \mathbb{R}$, ou seja, o problema

$$x' = x \log|x|, \quad x(t_0) = x_0$$

tem solução única, para qualquer $(x_0, t_0) \in (-1,1) \times \mathbb{R}$, onde, por definição, $0 \log 0 := 0$. Para demonstrar este fato, em primeiro lugar notamos que se $x_0 \neq 0$, isto é uma consequência do Teorema de Picard, pois $v(x,t) = x \log|x|$ é lipschitziana para x numa vizinhança de $x_0 \neq 0$ ($\partial v/\partial x$ é limitada para $x \approx x_0 \neq 0$). Na verdade, neste caso, podemos calcular a solução explicitamente (separando as variáveis) encontrando que a solução do problema é a função

$$X(t; x_0, t_0) = \pm|x_0|^{\mathrm{e}^{(t-t_0)}},$$

com domínio $I_0 = \mathbb{R}$, onde o sinal $\pm$ é $+$ se $x_0 > 0$ e $-$ se $x_0 < 0$. No caso $x_0 = 0$, é claro que $x(t) \equiv 0$ é uma solução. Esta solução é a única solução, pois se outra solução $\varphi(t) \equiv X(\cdot\,; 0, t_0)$ não fosse nula em algum ponto t_1, pondo $x_1 = \varphi(t_1)$, teríamos que ela coincidiria com a função acima $X(\cdot;\, x_1, t_1)$ (com x_1, t_1 no lugar de x_0, t_0) o que seria uma contradição, pois esta não se anula em

[4]Há muitos outros exemplos, simples, como é o caso da função $v(x) = 1 + 2x^{2/3}$ [1, Exemplo 1.2.1].

nenhum ponto. (Em resumo, $X(t;x_0,t_0) = (\mathrm{sgn} x_0)|x_0|^{\mathrm{e}^{(t-t_0)}}$ é a solução, qualquer que seja $x_0 \in \mathbb{R}$, onde $\mathrm{sgn} x_0 = 1$ se $x_0 > 0$, 0 se $x_0 = 0$ e -1 se $x_0 < 0$.)

Outra propriedade interessante da função (do campo escalar) $v(x) \equiv v(x,t) = x \log |x|$ é que apesar de não satisfazer a condição de Lipschitz (1) (ou (2)), ela satisfaz a condição modificada: existe uma constante C tal que

$$|v(x_1) - v(x_2)| \leq C|x_1 - x_2| \left(1 - \log |x_1 - x_2|\right) \tag{4}$$

para todo $x_1, x_2 \in (-1,1)$ tal que $0 < |x_1 - x_2| \leq 1$. (Notemos que o lado direito de (1) foi modificado pelo acréscimo da quantidade $-C|x_1 - x_2| \log |x_1 - x_2|$, a qual é não negativa, visto que $|x_1 - x_2| \leq 1$.) Podemos demonstrar esta desigualdade da seguinte maneira: para x_1 e x_2 no intervalo $(0,1)$, supondo $x_1 < x_2$, s.p.g.[5], temos que

$$\begin{aligned}
|v(x_1) - v(x_2)| &= |\textstyle\int_0^1 \frac{d}{ds} v\left(x_1 + s(x_2 - x_1)\right) ds| \\
&= |(x_2 - x_1) \textstyle\int_0^1 v'\left(x_1 + s(x_2 - x_1)\right) ds| \\
&= |(x_2 - x_1) \textstyle\int_0^1 \left(1 + \log(x_1 + s(x_2 - x_1))\right) ds| \\
&\leq |x_2 - x_1| (1 - \textstyle\int_0^1 \log(x_1 + s(x_2 - x_1))\, ds) \\
&\leq |x_2 - x_1| (1 - \textstyle\int_0^1 \log s(x_2 - x_1) ds) \\
&= |x_2 - x_1| (1 - \textstyle\int_0^1 \left(\log s + \log(x_2 - x_1)\right) ds) \\
&= |x_2 - x_1| (1 - \textstyle\int_0^1 \log s\, ds - \int_0^1 \log |x_2 - x_1|\, ds) \\
&= |x_2 - x_1| (2 - \log |x_2 - x_1|) \\
&\leq 2|x_2 - x_1| (1 - \log |x_2 - x_1|)
\end{aligned}$$

[6]; daí, como a função $v(x) = x \log |x|$ é uma função ímpar, temos também a mesma desigualdade para x_1, x_2 no intervalo $(-1,0)$; e para x_1 no intervalo $(-1,0)$ e x_2 no intervalo $(0,1)$, se $|x_1 - x_2| = x_2 - x_1 \leq \mathrm{e}^{-1}$, usando que a função $-x \log |x|$ é crescente no intervalo $[-\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^{-1}]$, temos:

$$\begin{aligned}
|v(x_1) - v(x_2)| &= x_1 \log(-x_1) - x_2 \log x_2 \\
&\leq -(-x_1 + x_2) \log(-x_1 + x_2) - (x_2 - x_1) \log(x_2 - x_1) \\
&= -2(x_2 - x_1) \log(x_2 - x_1) \leq 2 \left(1 - (x_2 - x_1) \log(x_2 - x_1)\right).
\end{aligned}$$

[5]sem perda de generalidade

[6]Aqui, supondo $0 < x_2 - x_1 \leq 1/2$ (ou menor do que qualquer constante positiva menor do que 1), também poderíamos fazer as contas analisando o quociente $\frac{|v(x_1)-v(x_2)|}{-(x_2-x_1)\log(x_2-x_1)} = \frac{|\int_0^1 v'(x_1+s(x_2-x_1))ds|}{-\log(x_2-x_1)} = \frac{|\int_0^1 1+\log(x_1+s(x_2-x_1))ds|}{-\log(x_2-x_1)} \leq \frac{1}{\log 2} + \frac{\int_0^1 |\log(x_1+s(x_2-x_1))|ds}{-\log(x_2-x_1)} \leq \cdots \leq 1 + \frac{2}{\log 2}$.

Caso $|x_1 - x_2| > \mathrm{e}^{-1}$, usando que a função $v(x)$ é limitada no intervalo $(-1, 1)$, temos

$$\begin{aligned} |v(x_1) - v(x_2)| &= \tfrac{|v(x_1)-v(x_2)|}{|x_1-x_2|}|x_1 - x_2| \\ &\le 2(\max|v|)\mathrm{e}|x_1 - x_2| \le 2(\max|v|)\mathrm{e}|x_1 - x_2|\left(1 - \log|x_1 - x_2|\right). \end{aligned}$$

Na verdade, como se vê por esse argumento, para mostrarmos (4) basta considerarmos a desigualdade para $|x_1 - x_2|$ menor do que uma certa constante arbitrária, uma vez que a função v é limitada. Além disso, notemos também que para $|x| \le \mathrm{e}^{-1}$ vale que $|x| \le -|x|\log|x|$. Então, a condição (4) é equivalente a

$$|v(x_1) - v(x_2)| \le -C|x_1 - x_2|\log|x_1 - x_2| \tag{5}$$

para $|x_1 - x_2| \le \mathrm{e}^{-1}$, uma vez que v é uma função limitada. Finalmente, observamos que se $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$, a condição (4) se verifica trivialmente, pois $v(0) = 0$.

Também pode-se mostrar que $v(x) = x\log|x|$ satisfaz a condição (7) usando a propriedade de concavidade; cf. [1, Exemplo 1.4.2]. Outra característica desta função é que sua derivada é uma função absolutamente integrável, localmente, logo é de variação limitada, também localmente, i.e. para qualquer intervalo limitado $I \subset \mathbb{R}$ temos que o conjunto das somas $\sum|v(x_j) - v(x_{j-1}|,\ x_1, \cdots, x_j \in I,\ j \in \mathbb{N}$, é limitado. Um exemplo de uma função que satisfaz (4) mas não é de variação limitada localmente é dado por [4], $f(x) = x_+ e^{-1/x}\mathrm{sin}(e^{1/x}),\quad x_+ := x,\ \text{se}\ x > 0,\ \text{e}\ 0,\ \text{se}\ x \le 0.$

Definição 1 (Campos log-lipschitzianos). *Dizemos que um campo v é* log-lipschitziano *em Ω se ele satisfaz* (4)*, para quaisquer $x_1, x_2 \in \Omega$ tal que $0 < |x_1 - x_2| \le 1$, ou, equivalentemente, se*

$$\sup_{\substack{0 < |x_1 - x_2| \le 1 \\ x_1, x_2 \in \Omega}} \frac{|v(x_1) - v(x_2)|}{|x_1 - x_2|(1 - \log|x_1 - x_2|)} < \infty \tag{6}$$

e (por conveniência) se também é limitado em Ω.

Como estamos supondo que o campo v é limitado, a condição (6) também é equivalente a $|v(x_1) - v(x_2)| \le -C\log|x_1 - x_2|$, para alguma constante C, para quaisquer $x_1, x_2 \in \Omega$ tal que $0 < |x_1 - x_2| \le \mathrm{e}^{-1}$, i.e.

$$\sup_{\substack{0 < |x_1 - x_2| \le \mathrm{e}^{-1} \\ x_1, x_2 \in \Omega}} -\frac{|v(x_1) - v(x_2)|}{|x_1 - x_2|\log|x_1 - x_2|} < \infty. \tag{7}$$

O conjunto dos campos log-lipschitzianos em Ω é um espaço vetorial normado, com a norma

$$\|v\|_{LL} \equiv \|v\|_{LL(\Omega)} := \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \langle v \rangle_{LL} \tag{8}$$

onde $\langle v \rangle_{LL}$ é a seminorma definida em (6) e $\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \|v\|_{\sup} := \sup_{x\in\Omega} |v(x)|$. Denotaremos este espaço, munido desta norma, por LL ou, mais precisamente, por $LL(\Omega)$. (A quantidade definida em (7) também é uma seminorma, mas achamos mais conveniente trabalhar com a seminorma definida em (6).) Quando necessário denotaremos $\langle v \rangle_{LL}$, mais precisamente, por $\langle v \rangle_{LL(\Omega)}$. Não é difícil mostrar que LL é um espaço de Banach (um espaço vetorial completo).

A propriedade principal dos campos log-lipschitzianos é que eles têm estrutura lagrangiana, ou seja, o Teorema de Picard vale para os mesmos. Mais geral e precisamente, se $v : \Omega \times I \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua tal que, para alguma constante C,

$$|v(x_1, t) - v(x_2, t)| \leq C|x_1 - x_2|(1 - \log |x_1 - x_2|), \tag{9}$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in \Omega$ com $0 < |x_1 - x_2| \leq 1$, i.e. se $\sup_{t\in I} \langle v(\cdot, t) \rangle_{LL} < \infty$ então o campo v tem estrutura lagrangiana. Em [3] foi feita uma demonstração deste resultado que vale também em espaços de dimensão infinita (i.e. com Ω sendo um aberto de um espaço de Banach E e o campo $v : \Omega \times I \to E$). Comparando com, por exemplo, a demonstração em [18] do Teorema de Picard para campos lipschitzianos, no que se refere à existência de solução do problema (3) a diferença da demonstração em [3] está na forma de mostrar que a iteração de Picard é convergente. Quanto a esta parte, a demonstração em [3], a qual é reproduzida exatamente da mesma forma na seção 5.2 do livro [2], é a seguinte: dado $(x_0, t_0) \in \Omega \times I$, tomemos a sequência, iteração de Picard, $\varphi_0 = x_0$, $\varphi_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(\varphi_{k-1}(s), s)ds$, $k = 1, 2, \cdots$, para t em um intervalo I_0 contendo t_0 suficientemente pequeno de forma que $\varphi_k(t) \in \overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$, para alguma bola fechada $\overline{B_r(x_0)}$ de raio $r > 0$ e centro x_0 e para todo $t \in \overline{I_0}$. Devemos mostrar que a mesma converge para a solução do problema (3). Para mostrarmos isso, e para facilitar a notação no restante do texto, introduzimos a função

$$m(r) = \begin{cases} r(1 - \log r), & \text{se } 0 < r < 1 \\ r, & \text{se } r \geq 1\,. \end{cases} \tag{10}$$

(também podemos escrever $m(r) = r \log(1/r)$, para $0 \leq r \leq 1$) e notamos que, para $k, l \in \{1, 2, \cdots\}$, temos a desigualdade

$$|\varphi_{k+l}(t) - \varphi_k(t)| \leq |\int_{t_0}^t \langle v(\cdot, s) \rangle_{LL} m(|\varphi_{k+l-1}(s) - \varphi_{k-1}(s)|)ds|, \tag{11}$$

para todo $t \in \overline{I_0}$. Logo, definindo $\rho_k(t) = \sup_l |\varphi_{k+l}(t) - \varphi_k(t)|$ e observando que a função m é crescente, obtemos

$$\rho_k(t) \leq C|\int_{t_0}^{t} m(\rho_{k-1}(s))ds|, \quad \forall\, t \in \overline{I_0}.$$

e, tomando o lim sup com a relação a k, que

$$\rho(t) \leq C|\int_{t_0}^{t} m(\rho(s))ds|, \quad \forall\, t \in \overline{I_0}, \tag{12}$$

com $\rho(t) := \limsup_k \rho_k(t)$, observando que passamos o lim sup para dentro da integral tendo em vista que $\limsup_k \rho_k$ é o limite da sequência $\zeta_k := \sup_k\{\varphi_k, \varphi_{k+1}, \cdots\}$, logo, como m é uma função crescente, $\rho_k(t) \leq C|\int_{t_0}^{t} m(\zeta_{k-1}(s))ds|$, e daí, pelo "Lema de Fatou reverso"[7], $\limsup_k \rho_k(t) \leq C|\int_{t_0}^{t} \limsup_k m(\zeta_{k-1}(s))ds| = C|\int_{t_0}^{t} \lim_k m(\zeta_{k-1}(s))ds| = C|\int_{t_0}^{t} \lim_k m(\rho(s))ds|$.

A desigualdade (12), como veremos, implica que ρ é a função nula (em $\overline{I_0}$), e isto que dizer que existe o limite $\lim_k \rho_k(t) = \lim_k \sup_l |\varphi_{k+l}(t) - \varphi_k(t)|$ e é nulo, para qualquer $t \in I_0$, logo a sequência $\{\varphi_k(t)\}$ é de Cauchy em $\overline{B_r(x_0)}$, então temos definida a função $\varphi(t) = \lim_k \varphi(t), \quad t \in I_0$, tomando valores em $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$. Para concluir que $\varphi(t)$ é uma solução do problema (3), basta usar o Teorema da Convergência Dominada na iteração de Picard, $\varphi_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(\varphi_{k-1}(s), s)ds$, passando ao limite quando $k \to \infty$. Notamos que a sequência $\{v(\varphi_{k-1}, \cdot)\}$ é uniformemente limitada por uma função constante (integrável) no intervalo $\overline{I_0}$, visto que v é contínua e $\varphi_k(t) \in \overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ para todo $k = 1, 2, \cdots$ e todo $t \in \overline{I_0}$.

Que a desigualdade (12) implica que ρ é a função nula pode ser visto como consequência de um teorema antigo, que tem sido bastante usado nos últimos anos, pelo menos na matemática da Mecânica dos Fluidos, conhecido, na sua forma mais geral, como Lema de Osgood, devido a [15], e o qual generaliza o teorema mais conhecido como Lema de Gronwall. O seu enunciado e demonstração (simples), essencialmente como estão em [2] (ou [3])[8], são os seguintes:

Teorema 2 (Lema de Osgood). *Sejam $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ uma função localmente integrável, e $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ uma função contínua não decrescente com $\omega(r) > 0$ se $r > 0$. Suponhamos que uma função contínua não negativa ρ satisfaça a desigualdade $\rho(t) \leq a + \int_{t_0}^{t} \gamma(s)\omega(\rho(s))ds$, para um número real $a \geq 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, e todo $t \geq t_0$ em um intervalo J contendo t_0. Se $a > 0$ então, pondo $M(x) := \int_x^1 \frac{dr}{\omega(r)}$, para $x > 0$, temos que $-M(\rho(t)) + M(a) \leq \int_{t_0}^{t} \gamma(s)ds$, para todo $t \geq t_0$ em J. Se $a = 0$ e ω satisfaz $\int_0^1 \frac{1}{\omega(r)}dr = \infty$, então $\rho(t) = 0$ para todo $t \geq t_0$ em J.*

[7] v. e.g. na Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Fatou's_lemma#Reverse_Fatou_lemma. Notemos que $\{m(\zeta_{k-1})\}$ é uniformente limitada por uma constante em I_0, já que $\varphi_k(t) \in \overline{B_r(x_0)}$ para todo $k = 1, 2, \cdots$ e $t \in \overline{I_0}$.

[8] V. [1, 7] para casos relacionados. Em particular, para a condição (12) tendo no lugar de m a função identidade, o resultado parece ser devido a Lindelöf, como está dito, incluindo a demonstração nesse caso, em [7, p. 162, 163].

Demonstração: Definindo $R(t) = a + \int_{t_0}^{t} \gamma(s)\omega(\rho(s))ds$, $t \in J \cap [t_0, \infty)$, temos que $\rho(t) \leq R(t)$ e $R'(t) = \gamma(t)\omega(\rho(t)) \leq \gamma(t)\omega(R(t))$, q.t.p.[9]. Caso $a > 0$, temos $R(t) > 0$, logo,

$$-\frac{d}{dt}M(R(t)) = \frac{1}{\omega(R(t))}R'(t) \leq \gamma(t).$$

Então, integrando de t_0 a t, obtemos a desigualdade $-M(\rho(t)) + M(a) \leq \int_{t_0}^{t} \gamma(s)ds$.

Caso $a = 0$, temos obviamente que $\rho(t) \leq a' + \int_{t_0}^{t} \gamma(s)\omega(\rho(s))ds$, para qualquer $a' > 0$, logo, pelo caso $a > 0$, vem que

$$M(a') \leq \int_{t_0}^{t} \gamma(s)\, ds + M(\rho(t))$$

para todo $a' > 0$. Daí, fazendo a' tender para zero, obtemos que $\int_0^1 \frac{1}{\omega(r)}dr < \infty$ se $\rho(t) > 0$ para algum $t \in J \cap [t_0, \infty)$. ■

Aplicando o Lema de Osgood à desigualdade (12), obtemos que $\rho(t) = 0$ para todo $t \geq t_0$ em I_0. Para obter o mesmo resultado para $t \leq t_0$ basta tomar $\rho(-t)$ no lugar de $\rho(t)$ e aplicar o Lema de Osgood no intervalo $-I_0 := \{-t; t \in I_0\}$ e com $-t_0$ no lugar de t_0.

Observamos que tomando, no enunciado do Lema de Osgood, a função $\omega = \text{id.}$ ($\omega(r) = r$, $\forall\, r \in \mathbb{R}_+$), obtemos o Lema de Gronwall. Outra observação é a seguinte: pela definição da função M, temos que ela é estritamente decrescente ($M'(x) = -1/\omega(x) < 0$ para $x > 0$), logo tem uma inversa M^{-1} (definida no intervalo $(-\int_1^{\infty} \frac{dr}{\omega(r)}, \int_0^1 \frac{dr}{\omega(r)})$. Então no caso em que $M(a) - \int_{t_0}^{t} \gamma(s)ds \in \text{Dom.}M^{-1}$, a desigualdade dada quando $a > 0$ equivale a $\rho(t) \leq M^{-1}(M(a) - \int_{t_0}^{t} \gamma(s)ds)$. Para a função $\omega = m$ dada em (10), temos que M e a sua inversa são dadas por

$$M(x) = \begin{cases} \ln(1 - \ln x), & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ -\ln x, & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad M^{-1}(y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-y}, & \text{se } y \leq 0 \\ \mathrm{e}^{(1-\exp(y))}, & \text{se } y \geq 0 \end{cases}.$$

Logo, se $M(a) - \int_{t_0}^{t} \gamma(s)ds \geq 0$ e $a \leq 1$, i.e. $a \leq \min\{1, \mathrm{e}^{(1-\exp(\int_{t_0}^{t} \gamma(s)ds))}\}$, temos que

$$\rho(t) \leq \mathrm{e}^{1-\exp(M(a)-\int_{t_0}^{t} \gamma(s)ds)} = \mathrm{e}^{1-(1-\ln a)\exp(-\int_{t_0}^{t} \gamma(s)ds)},$$

i.e.

$$\rho(t) \leq a^{\exp(-\int_{t_0}^{t} \gamma(s)ds)}\mathrm{e}^{1-\exp(-\int_{t_0}^{t} \gamma(s)ds)}. \tag{13}$$

Quanto à unicidade de solução do problema (3) para campos log-lipschitzianos, de forma similar a que obtemos (11), temos que se ψ_1 e ψ_2 são duas soluções de (3) definidas em um intervalo I_0

[9] em quase todo ponto, i.e. exceto fora de um subconjunto de J com medida de Lebesgue nula

contendo t_0 tais que $\psi_1(t_0) = \psi_2(t_0)$, então

$$|\psi_1(t) - \psi_2(t)| \le \int_{t_0}^{t} \langle v(\cdot, s)\rangle_{LL} m(|\psi_1(s) - \psi_2(s))|)ds,$$

para todo $t \in I_0$, logo $\psi_1 = \psi_2$ em I_0, pelo Lema de Osgood.

Além disso, como uma aplicação da desigualdade (13), obtemos a dependência contínua da solução do problema (3) em relação às condições iniciais, para campos log-lipschitzianos. Com efeito, tomando a solução $X(\cdot; x_0, t_0)$ do problema (3) (o fluxo do campo v), analogamente a (11), temos

$$|X(t; x_1, t_0) - X(t; x_2, t_0)| \le |x_1 - x_2| + \int_{t_0}^{t} \langle v(\cdot, s)\rangle_{LL} m(|X(s; x_1, t_0) - X(s; x_2, t_0)|)ds,$$

logo, de (13), obtemos

$$|X(t; x_1, t_0) - X(t; x_2, t_0)| \le |x_1 - x_2|^{\exp(-\int_{t_0}^{t}\gamma(s)ds)} \mathrm{e}^{1-\exp(-\int_{t_0}^{t}\gamma(s)ds)}, \tag{14}$$

para $0 < |x_1 - x_2| \le \min\{1, \mathrm{e}^{1-\exp(\int_{t_0}^{t}\gamma(s)ds)}\}$, onde $\gamma(s) := \langle v(\cdot, s)\rangle_{LL}$, desde que esta função seja localmente integrável (integrável em (t_0, t), para quaisquer $t_0, t \in I$), o que ocorre naturalmente se esta função for limitada em I, como é o caso, e.g. do campo v ser uniformemente lipschtziano, como em (2), ou, mais geralmente, uniformemente log-lipschitziano, como em (9). Aqui cabe a seguinte observação: na verdade, para a validade do Teorema de Picard, a constante C em (2), ou, mais geralmente, em (9), pode ser substituída por uma função localmente integrável na variável t, como se pode concluir analisando a convergência da iteração de Picard mostrada acima. Em outras palavras, um campo v em $\Omega \times I$ tem estrutura lagrangiana se a seminorma $\langle v(\cdot, s)\rangle_{LL(\Omega)}$ for uma função localmente integrável em I, e, além disso, nesse caso, temos a dependência contínua em relação às condições iniciais, dada explicitamente por (14). Em resumo, e mais precisamente, temos o seguinte teorema:

Teorema 3 *Seja* $v : \Omega \times I \to \mathbb{R}^n$ *uma aplicação em* $L^1_{\mathrm{loc}}(I; LL(\Omega))$, *i.e. tal que a função* $t \in I \mapsto \|v(\cdot, t)\|_{LL(\Omega)}$ *seja localmente integrável em* I. *Então, para qualquer* $t_0 \in I$, *existe uma única aplicação* $X(\cdot\,; \cdot, t_0) : I \times \Omega \to \Omega$ *contínua tal que*

$$X(t; x, t_0) = x + \int_{t_0}^{t} v(X((s; x, t_0), s)ds, \quad (t, x) \in I \times \Omega. \tag{15}$$

Além disso, vale a estimativa (14), *com* $\gamma(s) = \langle v(\cdot, s)\rangle_{LL}$, *para quaisquer* $x_1, x_2 \in \Omega$ *tal que* $0 < |x_1 - x_2| \le \min\{1, e^{1-\exp(\int_{t_0}^{t}\gamma(s)ds)}\}$.

Observamos que a estimativa (14) quer dizer que, para cada $t \in I$, a aplicação $x \in \Omega \mapsto X(t; x, t_0)$ é Hölder contínua com expoente de Hölder dado por $\alpha = \exp(-\int_{t_0}^{t} \langle v(\cdot, s)\rangle_{LL} ds)$.

Na próxima seção vamos mostrar que o produto de convolução do gradiente da solução fundamental do laplaciano em $\mathbb{R}^n$ com uma função em uma interseção de espaços de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$, para p's adequados, resulta em um campo log-lipschitziano em $\mathbb{R}^n$. Para encerrar esta seção, vamos fazer o seguinte comentário sobre a relação do espaço LL com o espaço C^α das funções (ou campos) Hölder contínuas, $0 < \alpha < 1$, e com o espaço Lip das funções lipschitzianas: como $r \leq m(r)$, $r \geq 0$, temos que toda função lipschitziana é log-lipschitziana, ou seja, temos a inclusão $Lip \subset LL$. Essa inclusão é própria, i.e. $Lip \neq LL$, como podemos ver pelos exemplos dados acima. Por outro lado, não é difícil verificar, usando por exemplo a Regra de L'Hôpital que para $\alpha \in (0, 1)$, a função $m(r)/r^\alpha = r^{1-\alpha} \log(1/r)$, $r \in (0, 1)$, é limitada no intervalo $(0, 1)$. Então, podemos concluir que $LL \subset C^\alpha$, para todo $\alpha \in (0, 1)$. Fixado qualquer $\alpha \in (0, 1)$, temos que essa inclusão também é própria; por exemplo, a função $f(x) = |x|^\alpha$ é Hölder contínua, mas não é log-lipschtziana, visto que o problema $x' = |x|^\alpha, \quad x(0) = 0$, tem mais de uma solução (na verdade, tem infinitas soluções; cf. [18, Exemplo 2, §I.2]). Em resumo, temos a seguinte relação com as duas inclusões próprias:

$$Lip \subset LL \subset C^\alpha$$

para todo $\alpha \in (0, 1)$. A inclusão $LL \subset C^\alpha$ é interessante na área das equações elípticas para se obter regularidade melhor do que C^α, de fronteiras livres e de soluções de equações totalmente não lineares; v. [13, 21].

1.2 O campo gerado pelo gradiente da solução fundamental do laplaciano

Nesta seção consideramos a solução fundamental do laplaciano em $\mathbb{R}^n$,

$$\Gamma(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x|, & \text{se } n = 2 \\ \frac{1}{(2-n)\omega_n} |x|^{2-n}, & \text{se } n \geq 3, \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, onde ω_n é área da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$, e mostraremos a seguinte proposição:

Proposição 4 *Seja $1 \leq p < n$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ então o produto de convolução $\nabla\Gamma * f$ (i.e. $(\nabla\Gamma * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \nabla\Gamma(x-y) f(y) dy$) é um campo log-lipschitziano em $\mathbb{R}^n$ e satisfaz a desigualdade $\|\nabla\Gamma * f\|_{LL(\mathbb{R}^n)} \leq C(\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)})$, onde C é uma constante que só depende de p e n.*

Demonstração: Primeiramente temos que

$$\|\nabla\Gamma * f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\left(\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
|(\Gamma_{x_i} * f)(y)| &= |\int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n} f(x)dx| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{|x-y|^{n-1}} dx \\
&= \int_{B_1(y)} \frac{|f(x)|}{|x-y|^{n-1}} dx + \int_{B_1(y)^c} \frac{|f(x)|}{|x-y|^{n-1}} dx \\
&\leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B_1(y)} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} dx + \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{B_1(y)^c} \frac{1}{|x-y|^{\frac{(n-1)p}{p-1}}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq C_1\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + C_2\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Notemos que $\dfrac{(n-1)p}{p-1} > n$, visto que $p < n$.

Resta mostrar a segunda estimativa, ou seja,

$$\langle \nabla\Gamma * f\rangle_{LL} \leq C(\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}).$$

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ com $\varepsilon \equiv |x-y| \leq 1$. Para $\bar{x} = \dfrac{x-y}{2}$ e $j = 1, 2, ..., n$, escrevemos

$$\begin{aligned}
|(\Gamma_{x_j} * f)(x) - (\Gamma_{x_j} * f)(y)| &= |\int\limits_{B_\varepsilon(\bar{x}) \cup [B_2(\bar{x}) \setminus B_\varepsilon(\bar{x})^c] \cup B_2(\bar{x})} [\Gamma_{x_j}(x-z) - \Gamma_{x_j}(y-z)] f(z)dz| \\
&\leq I + II + III,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
I &:= |\int_{B_\varepsilon(\bar{x})} [\Gamma_{x_j}(x-z) - \Gamma_{x_j}(y-z)] f(z)dz| \\
&= |\int_{B_\varepsilon(\bar{x})} \left[\frac{x_j - z_j}{|x-z|^n} - \frac{y_j - z_j}{|y-z|^n}\right] f(z)dz| \\
&\leq C\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B_{2\varepsilon}(x)} \frac{1}{|x-z|^{n-1}} dz \\
&= C\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_0^{2\varepsilon} \frac{r^{n-1}}{r^{n-1}} dr \\
&= C\varepsilon\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)};
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
II \ &:= |\int_{B_2(\bar{x})\setminus B_\varepsilon(\bar{x})} [\Gamma_{x_j}(x-z) - \Gamma_{x_j}(y-z)]f(z)dz| \\
&\leq C\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B_2(\bar{x})\setminus B_\varepsilon(\bar{x})} |\frac{x_j - z_j}{|x-z|^n} - \frac{y_j - z_j}{|y-z|^n}|dz \\
&\leq C\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\varepsilon \int_0^1 \int_{B_2(\bar{x})\setminus B_\varepsilon(\bar{x})} |x_\theta - z|^{-n} dz d\theta,
\end{aligned}
$$

onde $x_\theta = x + \theta(y-x)$, para algum $\theta \in (0,1)$. Uma vez que

$$
B_2(\bar{x}) \setminus B_\varepsilon(\bar{x}) \subset B_3(x_\theta) \setminus B_{\varepsilon/2}(x_\theta),
$$

segue que

$$
\begin{aligned}
II \ &\leq C\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\varepsilon \int_0^1 \int_{B_3(x_\theta)\setminus B_{\varepsilon/2}(x_\theta)} |x_\theta - z|^{-n} dz d\theta \\
&= C\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\varepsilon \int_0^1 \int_{\varepsilon/2}^3 \frac{r^{n-1}}{r^n} dr d\theta \\
&= C\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\varepsilon \ln r \Big|_{\varepsilon/2}^{3} \\
&= C\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\varepsilon(\ln 3 + \ln 2 - \ln \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Por fim,

$$
\begin{aligned}
III \ &:= |\int_{B_2(\bar{x})^c} [\Gamma_{x_j}(x-z) - \Gamma_{x_j}(y-z)]f(z)dz| \\
&\leq \int_{B_2(\bar{x})^c} |\frac{x_j - z_j}{|x-z|^n} - \frac{y_j - z_j}{|y-z|^n}||f(z)|dz \\
&\leq C\varepsilon \int_0^1 \int_{B_1^c(x_\theta)} |x_\theta - z|^{-n}|f(z)| dz d\theta \\
&\leq C\varepsilon \int_0^1 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{B_1^c(x_\theta)} |x_\theta - z|^{-n\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} d\theta \\
&\leq C\varepsilon \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

Desta forma,

$$
\begin{aligned}
|(\Gamma_{x_j} * f)(x) - (\Gamma_{x_j} * f)(y)| \ &\leq C\varepsilon(1 - \ln \varepsilon)(\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}) \\
&= C|x-y|(1 - \ln|x-y|)(\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)})
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\langle \nabla\Gamma * f \rangle_{LL} \leq C(\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}),
$$

o que conclui a demonstração. ∎

A Proposição 4 e a sua demonstração acima valem em outros domínios no lugar do $\mathbb{R}^n$, com a função de Green do domínio no lugar de Γ. Para o resultado com a função de Green explícita no semiespaço, com a condição de fronteira de Dirichlet ou Neumann, v. [20, Corolário 1.18], onde se mostra, que a função de Green, neste caso, sastisfaz as mesmas estimativas satisfeitas pela solução fundamental Γ que foram usadas na demonstração da Proposição 4, o que é suficiente para se obter o resultado.

A integral $\nabla\Gamma * f$ é um operador do tipo *potencial de Riesz*.

1.3 Imersão dos espaços de Sobolev em *LL*

Nesta seção vamos mostrar que o espaço de Sobolev $H^{\frac{n}{2}+1}(\mathbb{R}^n)$ está imerso em $LL(\mathbb{R}^n)$.

Sabemos que o espaço $H^{\frac{n}{2}+\alpha}(\mathbb{R}^n) \subset C^\alpha(\mathbb{R}^n)$, [10] se $0 < \alpha < 1$. A demonstração deste resultado dada no livro [19, Proposição 1.5, Cap.4, p. 318], como é observado pelo autor na mesma, mostra também que no caso $\alpha = 1$ temos que $H^{n/2+1}(\mathbb{R}^n) \subset LL(\mathbb{R}^n)$. Esta demonstração é a seguinte, onde escrevemos $\int = \int_{\mathbb{R}^n}$: dada $u \in H^{n/2+1}(\mathbb{R}^n)$, pela fórmula de inversão da transformada de Fourier $\hat{\cdot}$, temos que

$$\begin{aligned}
|u(x+y)-u(x)| &= (2\pi)^{-n/2}|\textstyle\int \hat{u}(\xi)\mathrm{e}^{ix\cdot\xi}(\mathrm{e}^{y\cdot\xi}-1)d\xi| \\
&= (2\pi)^{-n/2}|\textstyle\int \hat{u}(\xi)(1+|\xi|^2)^{(n+2)/4}\mathrm{e}^{ix\cdot\xi}(\mathrm{e}^{y\cdot\xi}-1)(1+|\xi|^2)^{-(n+2)/4}d\xi| \\
&\leq (2\pi)^{-n/2}(\textstyle\int |\hat{u}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^{n/2+1}d\xi)^{1/2}(\int |\mathrm{e}^{y\cdot\xi}-1|^2(1+|\xi|^2)^{-n/2-1}d\xi)^{1/2} \\
&= (2\pi)^{-n/2}\|u\|_{H^{n/2+1}}(\textstyle\int |\mathrm{e}^{y\cdot\xi}-1|^2(1+|\xi|^2)^{-n/2-1}d\xi)^{1/2},
\end{aligned}$$

e podemos estimar a última integral estimando-a nos conjuntos $\{\xi; |\xi| \leq 1/|y|\}$ e complemento. No primeiro, usando que $|\mathrm{e}^{y\cdot\xi}-1| \leq |y||\xi|$ e coordenadas polares, obtemos

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_{|\xi|\leq 1/|y|} |\mathrm{e}^{y\cdot\xi}-1|^2(1+|\xi|^2)^{-n/2-1}d\xi &\leq |y|^2 \textstyle\int_0^{1/|y|} \frac{r^2}{(1+r^2)^{n/2+1}} r^{n-1}dr \\
&\leq |y|^2 \textstyle\int_0^{1/|y|} \frac{r}{1+r^2}dr = \frac{1}{2}|y|^2 \log(1+1/|y|^2) \\
&\leq \tfrac{1}{2}|y|^2 \log \tfrac{2}{|y|^2}, \quad \text{se } |y| \leq 1,
\end{aligned}$$

e no segundo, usando que $|\mathrm{e}^{y\cdot\xi}-1| \leq 2$ e também coordenadas polares, podemos estimar a integral por

$$4\int_{1/|y|}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{n/2+1}}dr \leq 4\int_{1/|y|}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{r^{n+2}}dr = 2|y|^2.$$

Isso encerra a demonstração de que $H^{n/2+1}(\mathbb{R}^n) \subset LL(\mathbb{R}^n)$.

Mais geralmente, vale que o espaço de Sobolev $W^{n/p+1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ está imerso em LL; v. [23].

[10] com a inclusão $\subset$ usada no sentido de imersão: toda função em $H^{\frac{n}{2}+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ é igual q.t.p. a uma função em $C^\alpha(\mathbb{R}^n)$.

Capítulo 2 – Uma aplicação na matemática da mecânica dos fluidos

Uma aplicação de campos log-lipschitzianos em mecânica dos fluidos ou às equações de Navier-Stokes, foi feita por Chemin e Lerner no artigo [3], em que foi também generalizado o Teorema de Picard, como expomos acima. Nesse artigo, eles demonstram que o campo de velocidade v nas soluções das equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis em $\mathbb{R}^n$, com velocidade inicial no espaço de Sobolev $H^{n/2}(\mathbb{R}^n)$, é um campo log-lipschitziano, em relação à variável espacial, com $\langle v(\cdot, t)\rangle_{LL}$ localmente integrável, em relação ao tempo t, logo, tem estrutura lagrangiana. (Na verdade, eles mostram este resultado com a função $r(1 - \log r)^{\varepsilon+1/2}$ no lugar de $r(1 - \log r)$, para $\varepsilon > 0$ arbitrário.) Aqui vamos falar em mais detalhes de uma aplicação a fluidos incompressíveis.

Consideramos a solução (ρ, v) para as equações de Navier-Stokes,

$$\begin{gathered} \rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \\ (\rho v^j)_t + \operatorname{div}(\rho v^j v) + P(\rho)_{x_j} = \mu \Delta v^j + \lambda \operatorname{div} v_{x_j} + \rho f^j, \end{gathered} \tag{16}$$

obtida por David Hoff em [9, 10, 11], no espaço $\mathbb{R}^n$, para $n = 2, 3$, com a condição inicial

$$(\rho(x, 0), v(x, 0)) = (\rho_0(x), v_0(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{17}$$

As condições e propriedades dessa solução podem ser vistas na seção 2 do artigo [12], mas vamos destacar abaixo as propriedades relevantes para o nosso propósito aqui, que é explicar como obtemos a estrutura lagrangiana para a componente v. Antes disso, detalhamos melhor o sistema (16): a primeira equação representa a conservação de massa do fluido, a segunda (na verdade um sistema; $j = 1, \cdots, n$), a conservação de momento; $t > 0$ é o tempo, $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, é a variável espacial, e $\rho(x, t)$, $v(x, t) = (v^1(x, t), \dots)$, e $P = P(\rho)$ são a densidade do fluido, a velocidade e a pressão, respectivamente, e, μ e λ são parâmetros de viscosidade, constantes e estritamente positivos. Por fim, $f = (f^1, \dots)$ é uma força externa, e div e Δ são os operadores usuais da divergência e de Laplace.

Sob certas condições nos dados (f, μ, λ, ρ_0, v_0 e a função de pressão $P(\rho)$; v. [12, Teorema 2.1, corolários 2.2 e 2.4]) D. Hoff mostrou que o sistema (16)-(17) tem uma solução (ρ, v) com as seguintes propriedades (dentre outras):

- $$\rho \in L^\infty \quad \text{e} \quad \rho \geq c \inf \rho_0 \text{ q.t.p.}^{11}, \tag{18}$$

onde c é uma constante estritamente positiva;[12]

- v é uma aplicação Hölder contínua em $\mathbb{R}^n \times [\tau, \infty)$, para qualquer $\tau > 0$;

- (estimativa de energia)

$$\sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\tfrac{1}{2}\, \rho(x,t)|v(x,t)|^2 + |\rho(x,t) - \widetilde{\rho}|^2\right] dx + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dxdt < \infty, \tag{19}$$

onde $\widetilde{\rho}$ é uma dada constante positiva[13];

$$\sup_{0\le t\le T} \int_{\mathbb{R}^2} (1+|x|^2)^a \left[\rho(x,t)|v(x,t)|^2 + |\rho(x,t) - \widetilde{\rho}|^2\right] dx < \infty \tag{20}$$

para cada $T > 0$, onde $a > 0$ é uma constante que pode ser arbitrariamente pequena [14];

- $$\sigma^{1-s}|\dot{v}|^2 \quad \text{e} \quad \sigma^{r_s}|\nabla \dot{v}|^2 \quad \in \; L^1(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)), \tag{21}$$

se $\inf \rho_0 > 0$ e v_0 pertence ao espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$, $0 \le s \le 1$, e onde σ é a função $\sigma(t) = \min\{1, t\}$, $t > 0$, $r_s = 2 - s$ se $n = 2$, $r_s = \max\{3 - 3s, 2 - s\}$ se $n = 3$, e $\dot{v}$ denota a chamada *derivada convectiva* ou *material* de v, i.e. $\dot{v} = (\dot{v}^1, \cdots)$, sendo que, para qualquer função diferenciável g, $\dot{g} := v \cdot \nabla g$ (é a 'derivada de g ao longo das trajetórias de partículas do fluido'). [15]

Além dessas propriedades temos também as seguintes: sejam F a função definida por

$$F := (\mu + \lambda)\mathrm{div}\, v - P(\rho) + P(\tilde{\rho})$$

e ω a chamada *matriz de vorticidade* do fluido, i.e. a matriz $n \times n$ definida por $\omega^{j,k} = v^j_{x_k} - v^k_{x_j}$. Então F e ω são funções Hölder contínuas em $\mathbb{R}^n \times [\tau, \infty)$, para qualquer $\tau > 0$, e pertencem

[12]Por hipótese, $\rho_0 \ge 0$ q.t.p.

[13]Por hipóste, $\sqrt{\rho_0}v_0$ e $\rho_0 - \widetilde{\rho}$ pertencem a $L^2(\mathbb{R}^n)$.

[14]Esta estimativa é apenas para a dimensão $n = 2$, assumindo, por hipótese, a mesma para $t = 0$, i.e. o dado inicial, no caso $n = 2$, também satisfaz $\int_{\mathbb{R}^2} (1 + |x|^2)^a [\rho_0(x)|v_0(x)|^2 + |\rho_0 - \widetilde{\rho}|^2]dx < \infty$. Esta condição se faz necessária para compensar o crescimento logarítmico no infinito da solução fundamental do laplaciano em $\mathbb{R}^2$.

[15]A presença dos "pesos" $\sigma^{1-s}, \sigma^{r_s}$ em (21) capta uma "camada limite" em $t = 0$ devido a que não é assumido inicialmente que o campo de velocidade do fluido v tenha derivada convectiva em H^1, i.e. não temos necessariamente $\dot{v}_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Naturalmente, se $\dot{v}_0 \notin L^2(\mathbb{R}^n)$ $(\nabla \dot{v}_0 \notin L^2(\mathbb{R}^n))$, devemos ter $\lim_{t\to 0} \|\dot{v}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \infty$ (respect., $\lim_{t\to 0} \|\nabla \dot{v}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \infty$) de alguma forma. A grosso modo, (21) nos diz que se $v_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $0 \le s \le 1$, então $\|\dot{v}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ $(\|\nabla \dot{v}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)})$ é limitada pela função $t^{(s-1)/2}$ (respect., $t^{-r_s/2}$) para t próximo do zero.

ao espaço $L^\infty((\tau,\infty);H^1(\mathbb{R}^n))$[16], também para qualquer $\tau>0$. Finalmente, temos que a solução (ρ,v) é o limite de soluções suaves (ρ^δ,v^δ)[17], $\delta>0$, quando δ tende a zero.

Para quem conhece o termo, podemos dizer que a solução obtida por D. Hoff é uma *solução fraca* com "boas" propriedades, mas não é, necessariamente, uma solução suave (de classe C^1 pelo menos). No entanto tem as propriedades acima, o que a torna uma solução numa classe intemediária, entre as soluções suaves e as fracas. Em particular, sendo v um campo locamente Hölder contínuo para $t>0$, podemos falar no valor do mesmo em cado ponto em $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$.

O que faz com que a solução de D. Hoff tenha as propriedades acima é a hipótese da *energia* ser suficientemente pequena inicialmente (v. o enunciado do Teorema 2.1 em [12]). Aqui, no que se segue neste capítulo, pretendemos explicar como se pode mostrar que um campo v, de uma solução fraca (ρ,v) das equações de Navier-Stokes (16), que possua as propriedades acima, tem estrutura lagrangiana, inclusive para trajetórias de partículas partindo do instante $t=0$, i.e. o problema (3) tem solução única para todo $t_0\geq 0$. Todas as contas abaixo devem ser feitas para as soluções regularizadas (ρ^δ,v^δ) e, posteriormente, mostrar que o resultado pode ser obtido para o campo v, tomando o limite quando δ tende a zero. Vamos omitir esta parte aqui (está feita em [12]) e vamos escrever (ρ,v) como se fosse (ρ^δ,v^δ).

Em primeiro lugar, notamos que podemos fazer a seguinte decomposição do campo v (válida para qualquer campo suave), onde vamos, doravante, usar a "notação do índice repetido"[18]:

$$\begin{aligned}\Delta v^j = v^j_{x_k,x_k} &= v^k_{x_k,x_j}+(v^j_{x_k}-v^k_{x_j})_{x_k}\\ &= \operatorname{div} v_{x_j}+\omega^{j,k}_{x_k}\\ &= (\mu+\lambda)^{-1}F_{x_j}+\omega^{j,k}_{x_k}+(\mu+\lambda)^{-1}P(\rho)_{x_j}\end{aligned}\tag{22}$$

logo, definindo campos $v_{F,\omega}=(v^1_{F,\omega},\cdots)$, $v_P=(v^1_P,\cdots)$ por

$$\begin{aligned}&v^j_{F,\omega}=\Gamma*\big((\mu+\lambda)^{-1}F_{x_j}+\omega^{j,k}_{x_k}\big)=(\mu+\lambda)^{-1}\Gamma_{x_j}*F+\Gamma_{x_k}*\omega^{j,k},\\ &v^j_P=(\mu+\lambda)^{-1}\Gamma*P(\rho)_{x_j}=(\mu+\lambda)^{-1}\Gamma*\left(P(\rho)-P(\widetilde{\rho})\right)_{x_j}=(\mu+\lambda)^{-1}\Gamma_{x_j}*\left(P(\rho)-P(\widetilde{\rho})\right),\end{aligned}$$

i.e. $v_{F,\omega}=(\mu+\lambda)^{-1}\nabla\Gamma*F+\Gamma_{x_k}*\omega^{\cdot,k}$, $v_P=\nabla\Gamma*(P(\rho)-P(\widetilde{\rho}))$, onde Γ é a solução fundamental do laplaciano em $\mathbb{R}^n$ (v. Seção 1.2), temos que $\Delta v^j=\Delta v^j_{F,\omega}+\Delta v^j_P$, ou, equivalentemente, já que estamos com funções integráveis em $\mathbb{R}^n$, $v=v_{F,\omega}+v_P$.

Usando que ρ é uma função limitada (mais precisamente, em L^∞; propriedade (18)) e que a

[16] i.e. $\sup_{t>\tau}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla F(x,t)|^2dx<\infty$, notando que a propriedade (19) implica que $F\in L^2(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))$; analogamente para a matriz de vorticidade ω.

[17] obtidas por regularização dos dados, i.e. tendo os dados iniciais $\rho_0^\delta=\rho_0*\eta_\delta+\delta$, $v_0^\delta=v_0*\eta_\delta$, onde $\{\eta_\delta\}$ é uma sequência regularizante ("mollifier") padrão

[18] $v^j_{x_k,x_k}\equiv\sum_{k=1}^n v^j_{x_k,x_k}$, etc.

pressão P é uma função suave (isto é uma hipótese), temos que $P(\rho) - P(\widetilde{\rho})$ é uma função em L^∞. Além disso, pela propriedade (19) e pela propriedade (20), no caso $n = 2$, podemos concluir que $\sup_{0\le t\le T} \|P(\rho(\cdot,t) - P(\widetilde{\rho})\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty$, para algum $p < n$, e qualquer $T > 0$. Então, pela Proposição 4, obtemos que o campo $v_P(\cdot,t)$ é um campo log-lipschitziano em $\mathbb{R}^n$, para todo $t \ge 0$, e $\sup_{0\le t\le T} \|v_P(\cdot,t)\|_{LL(\mathbb{R}^n)} < \infty$, para qualquer $T > 0$. Portanto, pelo Teorema 3, o campo v_P tem estrutura lagrangiana, inclusive em $t_0 = 0$. (Tudo que foi dito na Seção 1.1 para t no intervalo I_0 contendo t_0 vale para t no intervalo $I_0 \cap [t_0,\infty)$.)

Quanto ao campo $v_{F,\omega}$, pelo fato dele satisfazer a equação $\Delta v^j_{F,\omega} = (\mu+\lambda)^{-1}F_{x_j} + \omega^{j,k}_{x_k}$ e das funções F e matriz de vorticidade ω serem Hölder contínuas em relação à variável espacial $x \in \mathbb{R}^n$, para todo $t > 0$, usando a teoria de equações elípticas ou de operadores singulares, é possível mostrar que $v_{F,\omega}(\cdot,t)$ é um campo lipschtiziano em $\mathbb{R}^n$, para qualquer $t > 0$. (Para mais alguns detalhes, v. [12, 16, 20].) Mas não podemos daí concluir que ele tem estrutura lagrangiana. Falta mostrar que a função $t \to \|v_{F,\omega}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + |v_{F,\omega}(\cdot,t)|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n)}$ é uma função localmente integrável, onde $|g|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n)}$ denota a seminorma de Lipschitz de uma função g, i.e. $|g|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{0<|x_1-x_2|\le 1,\, x_1,x_2\in\mathbb{R}^n} |v(x_1) - v(x_2)|/|x_1 - x_2|$. Para isso é fundamental a observação de que a equação do momento (segunda equação em (16)) pode ser reescrita em termos da derivada convectiva, da função F e da matriz de vorticidade ω, da seguinte forma:

$$\rho\dot{v}^j = F_{x_j} + \mu\omega^{j,k}_{x_k} + \rho f^j, \qquad j = 1,\cdots,n.$$

Daí tomando o divergente e o rotacional obtemos que F e $\omega^{j,k}$ satisfazem as equações de Poisson $\Delta F = \mathrm{div}(\rho\dot{v} - \rho f)$, $\quad \mu\Delta\omega^{j,k} = \mathrm{rot}^{j,k}(\rho\dot{v} - \rho f)$. Em resumo, temos o seguinte quadro de equações elípticas[19]

$$\boxed{\begin{array}{c} \Delta v_{F,\omega} = (\mu+\lambda)^{-1}\nabla F + \omega^{;k}_{x_k} \\ \Delta F = \mathrm{div}(\rho\dot{v} - \rho f), \quad \mu\Delta\omega^{j,k} = \mathrm{rot}^{j,k}(\rho\dot{v} - \rho f) \end{array}} \tag{23}$$

que podemos explorar, continuando a usar estimativas de equações elípticas ou de operadores singulares. Aí, como já se pode perceber, é onde será útil a propriedade (21): da primeira equação em (23) estimamos $v_{F,\omega}$ em termos de F e ω, e da segunda, estes em termos da derivada convectiva $\dot{v}$ ...

Vejamos em mais detalhes. Usando (23), vamos explicar, no que se segue nesta seção, como mostramos que a função $t \to \|v_{F,\omega}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + |v_{F,\omega}(\cdot,t)|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n)}$ é uma função localmente integrável. Muitas vezes escreveremos $|\cdot|_{\mathrm{Lip}}$, no lugar de $|\cdot|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n)}$. Vamos explicar, na verdade, como se pode mostrar que esta função é localmente integrável em $[0,\infty)$, ou seja, que

[19] Com a notação $\omega^{;k}_{x_k} = (\omega^{1,k}_{x_k},\cdots)$.

$\int_{t_0}^T \|v_{F,\omega}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}dt < \infty$ e $\int_{t_0}^T |v_{F,\omega}(\cdot,t)|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n)}dt < \infty$, para quaisquer $0 \leq t_0 < T$. Isto mostrará que o campo $v_{F,\omega}$ tem estrutura lagrangiana também em $t_0 = 0$. Na verdade, $t_0 = 0$ é o ponto inicial mais difícil, no nosso caso. Assim sendo, e para simplificar a notação, vamos explicar o argumento de como mostramos que as integrais acima são finitas só com $t_0 = 0$ e $T = 1$. Vamos adotar a notação usual $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, para denotar $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Usaremos repetidas vezes, desigualdades com essa norma, do tipo imersões de Sobolev, e estimativas para a solução da equação de Poisson (para equações elípticas) ou para operadores integrais em $\mathbb{R}^n$, no caso $p < \infty$. Em qualquer lugar abaixo, $\int = \int_{\mathbb{R}^n}$, e C denotará uma constante (que não depende de t, nem de $v_{F,\omega}$, mas pode depender de p, n e dos dados ρ_0, v_0, f).

Quanto a mostrar que $\int_0^1 \|v_{F,\omega}(\cdot,t)\|_\infty dt < \infty$, é mais simples. Começamos com a desigualdade

$$\|v_{F,\omega}(\cdot,t)\|_\infty \leq C(\|v_{F,\omega}(\cdot,t)\|_2 + \|\nabla v_{F,\omega}(\cdot,t)\|_p), \tag{24}$$

a qual é válida para $p > n$ qualquer. Para limitar $\|v_{F,\omega}(\cdot,t)\|_2$ escrevemos

$$\begin{aligned}\widetilde{\rho}\int |v_{F,\omega}|^2dx \leq\ & \int \rho|v_{F,\omega}|^2dx + \left[\int(\rho-\widetilde{\rho})^2dx\right]^{1/2}\left(\int |v_{F,\omega}|^4dx\right)^{1/2}\\ \leq\ & \int \rho|v_{F,\omega}|^2dx + \left(\int(\rho-\widetilde{\rho})^2dx\right)^{1/2} C\left(\int |v_{F,\omega}|^2dx\right)^{(1-\eta)/2}\left(\int |\nabla v_{F,\omega}|^2dx\right)^{(\eta)/2}\end{aligned}$$

para algum $\eta \in (0,1)$ determinado por n e p, ou seja, usamos a desigualdade de interpolação $\|\cdot\|_4 \leq C\|\cdot\|_2^{1-\eta}\|\nabla\cdot\|_2^\eta$. Segue-se então, de (24), que

$$\|v_{F,\omega}(\cdot,t)\|_2 \leq C(1 + (\int |\nabla v_{F,\omega}(\cdot,t)|^2dx)^{1/2}) \tag{25}$$

onde usamos a propriedade (19). Para limitar o outro termo $\|\nabla v_{F,\omega}(\cdot,t)\|_p$ em (24), de (23) e usando interpolação, temos

$$\begin{aligned}\|\nabla v_{F,\omega}(\cdot,t)\|_p \leq\ & C\|(F+\omega)(\cdot,t)\|_p \leq C\|(F+\omega)(\cdot,t)\|_2^{1-\eta}\|\nabla(F+\omega)(\cdot,t)\|_2^\eta\\ \leq\ & C(1+\int|\nabla v_{F,\omega}(x,t)|^2dx)^{(1-\eta)/2}\\ & \times(\int(\rho|\dot{v}_{F,\omega}|^2)(x,t)dx + \int|f(x,t)|^2dx)^{\eta/2}\end{aligned} \tag{26}$$

para outro $\eta \in (0,1)$. Daí, estimamos $\int_0^1 \|\nabla v_{F,\omega}(\cdot,t)\|_p dt$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \|\nabla v_{F,\omega}(\cdot,t)\|_p dt\ & \leq C\int_0^1 \Big\{\left(1+\int|\nabla v_{F,\omega}(x,t)|^2dx\right)^{(1-\eta)/2}\\ \times\ & \qquad \left(t\int(\rho|\dot{v}_{F,\omega}|^2)(x,t)dx\right)^{\eta/2} t^{-\eta/2} + \left(\int|f(x,t)|^2dx\right)^{\eta/2}\Big\}\,dt\,.\end{aligned} \tag{27}$$

De (24), (25), (27) e das propriedades (19) e (21), com $s = 0$, obtemos que $\int_0^1 \|v_{F,\omega}(\cdot,t)\|_\infty dt < \infty$.

Observamos que para esta estimativa ser válida não é necessário que o dado inicial v_0 esteja em um espaço de Sobolev H^s com $s > 0$; é suficiente que pertença a L^2 (e satisfaça as demais condições de 'D. Hoff'; v. [12]).

Agora vejamos como podemos mostrar a integrabilidade local do termo $|v_{F,\omega}(\cdot,t)|_{\text{Lip}}$ em relação a t, para $t \geq 0$. Em primeiro lugar, sabemos que $|v_{F,\omega}|_{\text{Lip}} \leq \|\nabla v_{F,\omega}\|_\infty$, então, procedendo de forma análoga a como mostramos que podemos obter a integrabilidade local de $\|v_{F,\omega}(\cdot,t)\|_\infty$, temos, para qualquer $p > n$, que

$$\begin{aligned}
\|\nabla v_{F,\omega}\|_\infty &\leq C(\|\nabla v_{F,\omega}\|_2 + \|D^2 v_{F,\omega}\|_p) \\
&\leq C(\|(F+\omega)\|_2 + \|\nabla(F+\omega)\|_p) \\
&\leq C(1 + \|\nabla v\|_2 + \|\dot{v}\|_p + \|f\|_p) \\
&\leq C(1 + \|\nabla v\|_2 + \|\dot{v}\|_2^{1-\eta}\|\nabla\dot{v}\|_2^\eta + \|f\|_p),
\end{aligned}$$

para algum $\eta \in (0,1)$, onde usamos que a função ρ é limitada. Daí, a questão reduz-se a mostrar a integrabilidade local do termo $\|\dot{v}\|_2^{1-\eta}\|\nabla\dot{v}\|_2^\eta$. Inserindo a função $\sigma(t) = t$, $0 \leq t \leq 1$, de forma análoga como fizemos em (27), podemos estimá-lo da seguinte maneira:

$$\int_0^1 \|\dot{v}\|_2^{1-\eta}\|\nabla\dot{v}\|_2^\eta dt \leq (\int_0^1 t^{s-1-\eta}dt)^{1/2}[\int_0^1 (t^{1-s}\int|\dot{v}|^2dx)^{1-\eta}(t^{2-s}\int|\nabla\dot{v}|^2dx)^\eta dt]^{1/2}. \tag{28}$$

Daí, para obter condições suficientementes de integrabilidade, usamos o valor explícito do parâmetro de interpolação η. Esse valor é dado por $\eta = n(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})$, lembrando que $p > n$, mas pode ser tomado arbitrariamente próximo de n. Vemos que $\eta > 0$ e $\inf_{p>n}\eta = 0$, se $n = 2$, e, $\eta > 1/2$ e $\inf_{p>n}\eta = 1/2$, se $n = 3$. Então, para qualquer $s > 0$, no caso $n = 2$, e qualquer $s > 1/2$, no caso $n = 3$, podemos obter η (tomando $p > n$ suficientemente próximo de n) tal que $s - \eta > 0$, logo, com essa escolha do η em (28), concluímos, que $\int_0^1 \|\dot{v}\|_2^{1-\eta}\|\nabla\dot{v}\|_2^\eta dt < \infty$, se $\inf\rho_0 > 0$ e $v_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $s > 0$ se $n = 2$, $s > 1/2$ se $n = 3$, tendo em vista a propriedade (21). Consequetemente, também nessas condições, e em virtude das estimativas anteriores, concluímos que $\int_0^1 |v_{F,\omega}(\cdot,t)|_{\text{Lip}}dt < \infty$, como queríamos mostrar.

Uma vez estabelecida a estrutura lagrangiana, procuramos estudar as propriedades do fluxo $X(t;x_0,t_0)$. Acima, em (14), vimos que pelo fato do campo v ser log-lipschitziano, obtemos, usando o Lema de Osgood, que para cada $t > 0$ fixado, a aplicação $x \mapsto X(t;x,t_0)$ é Hölder contínua em $\mathbb{R}^n$, com a constante e expoente de Hölder dados explicitamente em termos da seminorma $\langle v(\cdot,t)\rangle_{LL}$. Algumas outras propriedades interessantes podem ser obtidas, inclusive admitindo a possibilidade da densidade inicialmente ser nula (existência de vácuo) no complementar de um subconjunto aberto V do $\mathbb{R}^n$, obtendo, neste caso, a estrutura lagrangiana para partículas que inicialmente encontram-se em V. Mais precisamente, em [12] foi demonstrado que se o dado inicial e a força externa f têm "energia" suficientemente pequena e se outras condições técnicas são satisfeitas (v. [12]), se $v_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$, onde $s > 0$ para $n = 2$ e $s > 1/2$ para $n = 3$, e, se $\inf_V \rho_0 > 0$ em um subconjunto aberto V do $\mathbb{R}^n$, então o fluido modelado pelo sistema (16) tem fluxo $X(t,x) = X(t;x,t_0)$, $t_0 \geq 0$, tal que [12, Corolário 2.3 e Teorema 2.5]

a) *Para cada $t > 0$, $V^t \equiv X(t,\cdot)V$ é aberto e a aplicação $x \mapsto X(t,x)$ é um homeomorfismo de V em V^t;*

b) *Se K é um compacto contido em V e $T > 0$, então para $0 \leq t_1,\ t_2 \leq T$, a aplicação $X(t_1,y) \mapsto X(t_2,y)$ é Hölder contínua de $K^{t_1} \equiv X(t_1,\cdot)K$ em K^{t_2}. Mais precisamente, para $y_1, y_2 \in K$ com $|y_1 - y_2| < \mathrm{dist}(K, \partial V)$, existem constantes $L > 0$ e $\gamma > 0$ tais que*

$$|X(t_2,y_2) - X(t_2,y_1)| \leq \exp\left(1 - e^{-LT^\gamma}\right)|X(t_1,y_2) - X(t_1,y_1)|^{e^{-L\,T^\gamma}};$$

c) *Seja $\mathcal{M} \subset K \subset V$ uma k–variedade parametrizada de classe C^α, onde $\alpha \in [0,1)$, $1 \leq k \leq n-1$ e K é compacto. Então existem constantes $L > 0$ e $\gamma > 0$ tais que para qualquer $t > 0$, $\mathcal{M}^t \equiv X(t,\cdot)\mathcal{M}$ é uma k–variedade de classe C^β, onde $\beta = \alpha e^{-Lt^\gamma}$.*

d) *Existe um número $\underset{\sim}{\rho} > 0$ tal que, para todo $t > 0$, $\inf \rho(\cdot,t)|_{V^t} \geq \underset{\sim}{\rho}$.*

Resultados semelhantes a estes, no caso $V = \mathbb{R}^n$,[20] foram obtidos em [16], para fluidos não barotrópicos[21] em $\mathbb{R}^2$, assumindo que a derivada convectiva da energia interna seja de quadrado integrável, e em [20], para fluidos barotrópicos no semiespaço $\mathbb{R}^3_+ = \{(x_1,x_2,x_3); x_3 \geq 0\}$, com a condição de fronteira de Navier.

Tendo o fluxo à disposição, também podemos estudar o comportamento de descontinuidades transportadas pelo mesmo ao longo do tempo; v. [12, Teoremas 2.6 e 2.7].

Referências

[1] Agarwal, R. P.; Lakshmikantham, V. *Uniqueness and Nonuniqueness Criteria for Ordinary Differential Equations.* World Scientific Publishing Co. Inc., Series in Real Analysis, **6**, (1993).

[2] Chemin, J. Y. *Perfect incompressible fluids.* Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, **14**. The Clarendon Press (1998).

[3] Chemin, J. Y.; Lerner, N. *Flot de champs de vecteurs non lipschitziens et équations de Navier-Stokes.* J. Differential Equations, **121** (1995), no. 2, 314-328.

[20] Neste caso, a afirmação d) já está dada pela propriedade (18).

[21] i.e. incluindo em (16) a equação de conservação da energia com a pressão também dependendo da temperatura

[4] Colombini, Ferruccio; Lerner, Nicolas. *Uniqueness of continuous solutions for BV vector fields*. Duke Math. J. **111** (2002), no. 2, 357-384.

[5] Evans, Lawrence C. *Partial differential equations*. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, **19**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[6] Ferreira, O. P.; Oliveira, P. R.; Silva, R. C. M. *On the convergence of the entropy-exponential penalty trajectories and generalized proximal point methods in semidefinite optimization.* J. Global Optim. 45 (2009), no. 2, 211-227.

[7] Flett, T. M. *Differential analysis: differentiation, differential equations and differential inequalities*. Cambridge University Press, 1980.

[8] Gilbarg, D.; Trudinger, N.S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-Verlag, 2001.

[9] Hoff, David. *Global solutions of the Navier-Stokes equations for multidimensional, compressible flow with discontinuous initial data*. J. Diff. Eqns. **120**, no. 1 (1995), 215-254.

[10] Hoff, David *Discontinuous solutions of the Navier-Stokes equations for multidimensional, heat-conducting flow*. Archive Rational Mech. Ana. **139** (1997), 303–354.

[11] Hoff, David *Compressible Flow in a Half-Space with Navier Boundary Conditions*. J. Math. Fluid Mech. **7** (2005), 315–338.

[12] Hoff, David; Santos, Marcelo M. *Lagrangean structure and propagation of singularities in multidimensional compressible flow*. Arch. Ration. Mech. Anal., **188**, no. 3, (2008) 509-543.

[13] Leitão, Raimundo; de Queiroz, Olivaine S.; Teixeira, Eduardo V. *Regularity for degenerate two-phase free boundary problems*, arXiv:1202.5264, 2013.

[14] Lopes, Marcos Vinícius. *Trajetória Central Associada à Entropia e o Método do Ponto Proximal em Programação Linear*. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Goiás. 2007. Orientador: Orizon Pereira Ferreira.

[15] Osgood, W. F. *Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung* $dydx = f(x, y)$ *ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitz'schen Bedingung*. Monatsh. Math. Phys. **9** (1898), no. 1, 331-345.

[16] Pardo, Pedro Nel Maluendas. *Estrutura Lagrangiana para Fluidos Compressíveis não Barotrópicos em Dimensão Dois*. Tese de doutorado, UNICAMP, 2013. Disponível em http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/.

[17] Shannon, C. E. *A mathematical theory of communication*. Bell System Technical Journal, **27** (1948) 379-424, 623-56.

[18] Sotomayor, Jorge. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Projeto Euclides, **11**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.

[19] Taylor, Michael E. *Partial differential equations I. Basic theory*. Second edition. Applied Mathematical Sciences, **115**. Springer, New York, 2011.

[20] Teixeira, Edson José. *Estrutura Lagrangiana para Fluidos Isentrópicos Compressíveis no Semiespaço com Condição de Fronteira de Navier*. Tese de doutorado, UNICAMP, 2014. Disponível em http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/.

[21] Teixeira, Eduardo V. *Universal moduli of continuity for solutions to fully nonlinear elliptic equations*. Arch. Ration. Mech. Anal. **211** (2014), no. 3, 911-927.

[22] Yockey, Hubert P. *Information theory, evolution, and the origin of life*. Cambridge University Press, 2005.

[23] Zuazua, Enrique. *Log-Lipschitz regularity and uniqueness of the flow for a field in* $(W^{n/p+1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n))^n$. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 335 (2002), no. 1, 17-22.