DM–IMECC–UNICAMP – Cálculo III - MA311 - T. Z
Prof. Marcelo M. Santos – **3a. prova, 01/12/2011**
Aluno: ______________________________ RA: ____________
Assinatura - igual à do RG: ___________________________________

Tempo de prova: 100min. Justifique sucintamente todas as suas afirmações. É proibido o uso de qualquer equipamento eletrônico; em particular do celular ou calculadora. Desligue o celular! Não destaque o grampo da prova.

Questão 1. a) (0,5 pontos). Calcule o limite da sequencia $\{\frac{\cos n}{\sqrt{n}}\}$.

b) (0,5). **Usando a definição de limite**, mostre que $\lim \frac{4n+2}{n-1} = 4,$.

c) (1,0) Encontre o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n3^n}.$$

2. a) (0,5) Defina ponto ordinário e justifiqe que $x = 0$ é um ponto ordinário para a equação

$$y'' - xy' - y = 0; \tag{1}$$

b) (1,5) Determine a fórmula de recorrência da solução em série de potências da equação (1) em torno de $x = 0$;

c) (0,5) Determine a fórmula para o coeficiente geral da solução da equação (1);

d) (0,5) Encontre a solução geral por série de potências da equação (1).

3. a) (0,5). Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular da equação de Bessel $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$. ($\nu$ é uma constante não negativa.)

b) (0,5). **No caso $\nu = 1$** (equação de Bessel de *ordem* 1), usando a teoria, dê a forma de duas soluções linearmente independentes no intervalo $(0, \infty)$. (*Nao precisa calcular.*)

c) (0,5). Só também usando a teoria (sem fazer cálculos) ou o item **b)**, justifique que a equação de Bessel de ordem 1 ($\nu = 1$) tem uma solução dada por uma série de potências e convergente em toda a reta (com raio de convergência infinito).

4. a) (2,0). Encontre a série de Fourier **em senos** da função $f(x) = 1 - x^2$ **no intervalo** $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$;

b) (0,5). Esboce o gráfico **da extensão** de f para a qual tal série converge.

5. a) (1,0). Mostre que o método de separação de variáveis se aplica para a equação $u_{tt} + u_{xx} + tu = 0$, substituindo-a por um par de EDOs no caso de soluções de variáveis separadas.

b) (1,0). Considere a equação da onda

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad 0 < x < 30, \ t > 0,$$

com as condições de contorno $u(0,t) = u_x(30,t) = 0, \ t > 0$. ($u$ nula em $x = 0$ e a derivada u_x nula em $x = 30$, para todo tempo $t > 0$). Tomando $u(x,t) = X(x)T(t)$, mostre que X deve satisfazer o problema de autovalores (autofunções)

$$-X'' = \lambda X, \quad X(0) = X'(30) = 0.$$

c) (1,0). Resolva o problema de autovalores e autofunções

$$-X'' = \lambda X, \quad X(0) = X'(30) = 0.$$

(Encontre todos os autovalores λ's e autofunções associadas.)

Não se esqueça de justificar todas as suas afirmações.

Boa prova.

GABARITO

Questão 1. **a) (0,5 pontos)** *Calcule o limite da sequencia* $\{\frac{\cos n}{\sqrt{n}}\}$.

$$|\frac{\cos n}{\sqrt{n}}| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

0, 1 pontos até aqui

$\frac{1}{\sqrt{n}} = f(n)$, para $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0, \infty)$ + **0, 1**

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ (limite da forma $1/\infty$; Cálculo I). Então $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, já que esta sequencia é a restrição da função f a $\mathbb{N}$ (v. Teorema).

+ **0, 1**

Daí e da estimativa acima, temos também que $\lim \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}} = 0$, pelo Teorema do Confronto.

+ **0, 2**

b) (0,5). **Usando a definição de limite**, *mostre que* $\lim \dfrac{4n+2}{n-1} = 4$.

Seja $\epsilon > 0$.

$$|\tfrac{4n+2}{n-1} - 4| < \epsilon \Leftrightarrow 4 - \epsilon < \tfrac{4n+2}{n-1} < 4 + \epsilon \Leftrightarrow (4-\epsilon)(n-1) < 4n+2 < (4+\epsilon)(n-1)$$
$$\Leftrightarrow 4n - 4 - \epsilon(n-1) < 4n+2 < 4n - 4 + \epsilon(n-1) \Leftrightarrow -6 - \epsilon(n-1) < 0 < -6 + \epsilon(n-1)$$
$$\Leftrightarrow 0 < -6 + \epsilon(n-1) \Leftrightarrow 6 < +\epsilon(n-1) \Leftrightarrow n > 1 + 6/\epsilon;$$

0, 3

logo, tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \geq 1 + 6/\epsilon$, temos que $|\frac{4n+2}{n-1} - 4| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Como o número ϵ tomado é arbitrário, segue-se (da definição de limite) que $\frac{4n+2}{n-1} = 4$.
+ **0, 2**

c) (1,0) *Encontre o intervalo de convergência da série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n3^n}.$$

Seja $a_n = \frac{(2x+1)^n}{n3^n}$. Então

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{|2x+1|^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} \frac{n3^n}{|2x+1|^n} = \lim \frac{|2x+1|}{3} \frac{n}{n+1} = \frac{|2x+1|}{3}.$$

0, 2

Daí, pelo Teste da Razão, temos que a série é convergente (converge absolutamente) se $\frac{|2x+1|}{3} < 1$ e diverge, se $\frac{|2x+1|}{3} > 1$. + **0, 2**

Notemos que $\frac{|2x+1|}{3} < 1 \Leftrightarrow -3 < 2x+1 < 3 \Leftrightarrow -4 < 2x < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 1$. + **0, 1**

Além disso, nos pontos extremos deste intervalo, temos:

$$x = -2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

uma série convergente pelo Teste da Série Alternada; $\mathbf{+\ 0,2}$

$$x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

divergente - série harmônica (p-série com $p = 1$/divergente, pelo Teste da Integral). $\mathbf{+\ 0,2}$

Portanto, o intervalo de convergência é o intervalo $[-2, 1)$. $\mathbf{+\ 0,1}$

Questão 2. a) (0,5) *Defina ponto ordinário e justifiqe que $x = 0$ é um ponto ordinário para a equação*

$$y'' - xy' - y = 0; \tag{1}$$

$x = x_0$ é um ponto ordinário para a equação $Py'' + Qy' + Ry = 0$ se as funções Q/P e R/P são analíticas em x_0. $\mathbf{0,25}$

Para a equação dada, as funções $Q/P = x$ e $R/P = -1$ são polinômios, logo, analíticas (em qualquer ponto). $\mathbf{+\ 0,25}$

b) (1,5) *Determine a fórmula de recorrência da solução em série de potências da equação (1) em torno de $x = 0$;*

Substituindo $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ e $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$ $\mathbf{0,3}$
na equação, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

$\mathbf{+\ 0,2}$

donde vem que $2a_2 - a_0 = 0$, logo, $a_2 = a_0/2$, e $(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_n = 0,\ \ n \geq 1$, ou seja,

$$\boxed{a_{n+2} = \frac{a_n}{n+2}, \quad n \geq 0}.$$

$\mathbf{+1,0}$

c) (0,5) *Determine a fórmula para o coeficiente geral da solução da equação (1)*;

Pela relação recorrência (item **b)**), temos:

$$a_2 = \frac{a_0}{2},\ a_4 = \frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{4 \cdot 2}, a_6 = \frac{a_4}{4} = \frac{a_0}{6 \cdot 4 \cdot 2}, \cdots$$
$$a_3 = \frac{a_1}{3},\ a_5 = \frac{a_3}{5} = \frac{a_1}{5 \cdot 3}, \cdots$$

$\mathbf{0,3}$

$$\boxed{a_{2n} = \frac{a_0}{2n \cdot (2n-2) \cdot \cdots \cdot 2}}, \quad \boxed{a_{2n-1} = \frac{a_1}{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \cdots \cdot 3}}$$

+0,2

(Prova (por indução):

$$\begin{aligned}
n = 1: \quad & a_2 = \frac{a_0}{2} & \checkmark \\
n = k+1: \quad & a_2(k+1) = a_{2k+2} & \\
& = \frac{a_{2k}}{2k+2} & \text{(relação de recorrência)} \\
& = \frac{1}{2(k+1)} a_{2k} & \\
& = \frac{1}{2(k+1)} \frac{a_0}{(2k) \cdot (2k-2) \cdot \cdots \cdot 2} & \text{(hipótese da indução)} \\
& = \frac{a_0}{2(k+1)(2k) \cdot (2k-2) \cdot \cdots \cdot 2} & \checkmark
\end{aligned}$$

Analogamente, prova-se a fórmula para a_{2n-1}.)

d) (0,5) *Encontre a solução geral por série de potências da equação (1).*

Pela relação de recorrência (item **b)**),

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4 \cdot 2}x^4 + \cdots\right) + a_1 \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5 \cdot 3}x^5 + \cdots\right)$$

0,5

3. a) (0,5). *Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular da equação de Bessel $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$. ($\nu$ é uma constante não negativa.)*

$p = \frac{Q}{P} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ não é analítica em $x = 0$, já que não existe o limite $\lim_{x\to 0} p$, logo $x = 0$ é um ponto singular. **0,25**

Mas

$$xp = 1 \quad \text{e} \quad x^2 q = x^2 \frac{R}{P} = x^2 \frac{x^2 - \nu^2}{x^2} = x^2 - \nu^2$$

são funções analíticas em $x = 0$, já que são polinômios, então 0 é um ponto singular regular. **+0,25**

b) (0,5). **No caso $\boldsymbol{\nu = 1}$** *(equação de Bessel de* ordem *1), usando a teoria, dê a forma de duas soluções linearmente independentes no intervalo* $(0, \infty)$. *(*Nao precisa calcular.*)*

$$p_0 = \lim_{x\to} xp = \lim_{x\to 0} 1 = 1 \quad \text{e} \quad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2 q = \lim_{x\to 0}(x^2 - 1) = -1,$$

logo as raízes da equação indicial $F(r) = r(r-1)+p_0r+q_0 = r(r-1)+r-1 = r^2-1 = 0$ são $r_1 = 1$ e $r_2 = -1$. **$0,1$**

Então, como a diferença entre as raízes $r_2 - r_1 = 2$ é um número natural e 0 é um ponto singular regular (item **a)**), pelo Teorema de Frobenius, concluimos que a equação de Bessel de ordem 1 tem duas soluções L.I., definidas para $x \stackrel{>}{\approx} 0$, da forma

$$y_1 = x^{r_1}\big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\big) = x\big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\big)$$

$+0,2$

e

$$y_2 = ay_1 \ln x + x^{r_2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = ay_1 \ln x + x^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n.$$

$+0,2$

c) (0,5). *Só também usando a teoria (sem fazer cálculos) ou o item* **b)**, *justifique que a equação de Bessel de ordem 1 ($\nu = 1$) tem uma solução dada por uma série de potências e convergente em toda a reta (com raio de convergência infinito).*

A solução $y_1 = x\big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\big) = x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1}$ é uma série de potências. **$0,25$**

Além disso, pelo Teorema de Frobenius (teoria), a série de potências presente em $y_1 = x^{r_1}\big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\big)$ tem raio de convergência maior do que ou igual ao menor dos raios de convergências das séries de p e q em torno do ponto sigunlar regular x_0 (0 no caso em questão). Como p e q aqui (nesta Questão) são polinômios (raios de convergência obviamente infinitos), temos que a série $1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ tem raio de convergência infinito, ou seja converge em toda a reta. Daí, $x\big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\big) = y_1$ também está definida (é uma série convergente) em toda a reta. **$+0,25$**

4. a) (2,0). *Encontre a série de Fourier* ***em senos*** *da função* $f(x) = 1 - x^2$ ***no intervalo*** $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$;

$$\begin{aligned}
b_n &= 2\int_0^1 f(x) \operatorname{sen} n\pi x \, dx = 2\int_0^1 (1-x^2) \operatorname{sen} n\pi x \, dx \\
&= -\tfrac{2}{n\pi} \cos n\pi x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 x^2 \operatorname{sen} n\pi x \, dx && \mathbf{0,5} \\
&\quad (u = x^2,\ dv = \operatorname{sen} n\pi x \, dx;\ du = 2x dx,\ v = -\tfrac{1}{n\pi}\cos n\pi x) \\
&= -\tfrac{2}{n\pi}(\cos n\pi - 1) - 2\left(x^2(-\tfrac{1}{n\pi}\cos n\pi x)\Big|_0^1 + \tfrac{2}{n\pi}\int_0^1 x \cos n\pi x \, dx\right) && \mathbf{+0,4} \\
&\quad (u = x,\ dv = \cos n\pi x \, dx;\ du = dx,\ v = \tfrac{1}{n\pi}\operatorname{sen} n\pi x) \\
&= -\tfrac{2}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) - 2\left(-\tfrac{1}{n\pi}(-1)^n + \tfrac{2}{n\pi} x \tfrac{1}{n\pi}\operatorname{sen} n\pi x\Big|_0^1 - \tfrac{2}{(n\pi)^2}\int_0^1 \operatorname{sen} n\pi x \, dx\right) && \mathbf{+0,4} \\
&= -\tfrac{2}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) + \tfrac{2}{n\pi}(-1)^n - \tfrac{4}{(n\pi)^3}\cos n\pi x\,\Big|_0^1 \\
&= \tfrac{2}{n\pi}(-1)^n - \tfrac{4}{(n\pi)^3}\left((-1)^n - 1\right) \\
&= \begin{cases} \tfrac{2}{n\pi}, & n \text{ par} \\ -\tfrac{2}{n\pi} + \tfrac{8}{(n\pi)^3}, & n \text{ ímpar} \end{cases} && \mathbf{+0,2}
\end{aligned}$$

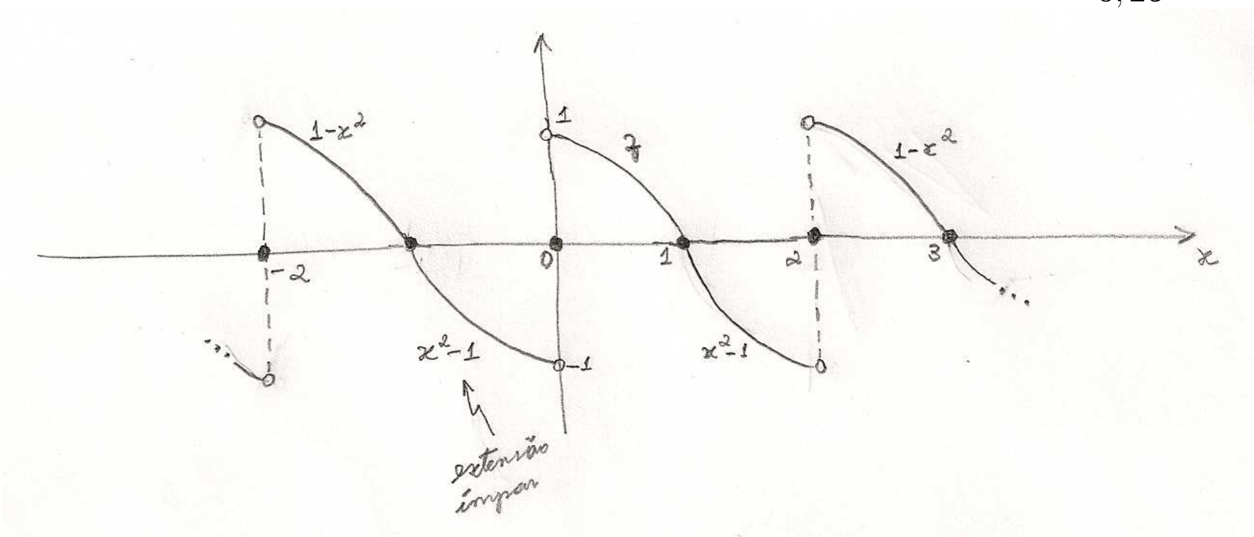
Então a série de Fourier pedida é a série

$$
\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \tfrac{n\pi}{l} x, \qquad b_n = \tfrac{2}{l}\int_0^l f(x) \operatorname{sen} \tfrac{n\pi}{l} x, \qquad l = 1 \qquad +\mathbf{0,2} \\
= \; & \Big(\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ par}}}^{\infty} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \Big) b_n \operatorname{sen} \tfrac{n\pi}{l} x \\
= \; & \tfrac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n} \operatorname{sen} 2n\pi x + \tfrac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \big(\tfrac{4}{(2n-1)^3\pi^2} - \tfrac{1}{2n-1} \big) \operatorname{sen}(2n-1)\pi x. \quad +\mathbf{0,4}
\end{aligned}
$$

b) (0,5). *Esboce o gráfico* ***da extensão*** *de f para a qual tal série converge.*

Como f é uma função seccionalmente contínua, com derivada também seccionalmente contínua, no intervalo $(0,1)$, pelo Teorema de Fourier temos que a série de Fourier em senos de f converge para a 'média dos saltos' da extensão ímpar de f, com período 2.

$\mathbf{0,25}$



$+\mathbf{0,25}$

5. a) (1,0). *Mostre que o método de separação de variáveis se aplica para a equação $u_{tt} + u_{xx} + tu = 0$, substituindo-a por um par de EDOs no caso de soluções de variáveis separadas.*

$u(x,t) = X(x)T(t)$ $\qquad \mathbf{0,1}$

$u_{xx} = X'T, \quad u_{tt} = XT''.$ $\qquad +\mathbf{0,1}$

Substituindo na equação, temos:

$$
\begin{aligned}
XT'' + X''T + tu &= 0 \\
\frac{T''}{T} + \frac{X''}{X} + t &= 0 \\
\frac{T''}{T} + t &= -\frac{X''}{X} && +\mathbf{0,3} \\
\frac{T''}{T} + t = \lambda &= -\frac{X''}{X}, \qquad \lambda: \text{ constante} && +\mathbf{0,3}
\end{aligned}
$$

$$
T'' + (t - \lambda)T = 0, \qquad -X'' = \lambda X. \qquad +\mathbf{0,2}
$$

b) (1,0). *Considere a equação da onda* $u_{tt} = 4u_{xx}, \quad 0 < x < 30, \ t > 0$, *com as condições de contorno* $u(0,t) = u_x(30,t) = 0, \ t > 0$. *(u nula em* $x = 0$ *e a derivada* u_x *nula em* $x = 30$*, para todo tempo* $t > 0$*). Tomando* $u(x,t) = X(x)T(t)$*, mostre que* X *deve satisfazer o problema de autovalores (autofunções)*

$$-X'' = \lambda X, \quad X(0) = X'(30) = 0.$$

Substituindo $u(x,t) = X(x)T(t)$ na equação, temos:

$$XT'' = 4X''T$$
$$\frac{1}{4}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X}$$
$$\frac{1}{4}\frac{T''}{T} = -\lambda = \frac{X''}{X}, \qquad \lambda: \text{ constante} \qquad \mathbf{0,3}$$

$$-X'' = \lambda X.$$

$+\mathbf{0,2}$

Impondo as condições de contorno, obtemos:

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0, \qquad u_x(30,t) = 0 \Rightarrow X'(30)T(t) = 0;$$

logo, $X(0) = 0$ e $X'(30) = 0$ (a não ser que $T(t) \equiv 0$ - caso sem interesse). $+\mathbf{0,5}$

c) (1,0). *Resolva o problema de autovalores e autofunções*

$$-X'' = \lambda X, \quad X(0) = X'(30) = 0.$$

(*Encontre todos os autovalores* λ*'s e autofunções associadas.*)

Solução geral da equação ($-X'' = \lambda X$):

equação característica: $r^2 + \lambda = 0$;
raízes: $r_1 = \sqrt{-\lambda}, \ r_2 = -\sqrt{-\lambda}$;
caso $\lambda = 0$: $r_1 = r_2 = 0$; solução geral:

$$X = c_1 + c_2 x;$$

$\mathbf{0,1}$

caso $\lambda > 0$ - raízes complexas: $r_1 = i\mu$ ($r_2 = \overline{r_1} = -i\mu$), $\lambda = \mu^2, \ \mu > 0$; solução geral:

$$X = c_1 \cos \mu x + c_2 \operatorname{sen} \mu x;$$

$+\mathbf{0,1}$

Como as condições de contorno satisfazem $X'X\big|_0^{30} = 0$ e X é autofunção para o operador $-D^2$ (menos a derivada segunda), temos que o autovalor é maior do que ou igual a zero (não pode ser negativo; Proposição vista em aula). $+\mathbf{0,1}$

Impondo as condições de contorno, temos:

$\lambda = 0$: $X(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow X = c_2 x \Rightarrow X' = c_2$;
$X'(30) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow X = 0$.

Como função nula não é autofunção, concluimos que 0 não é autovalor. $+\mathbf{0,1}$

$\lambda > 0$: $\lambda = \mu^2, \ \mu > 0$;

$$X(0) = 0 \Rightarrow c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow X = c_2 \operatorname{sen} \mu x \Rightarrow X' = c_2 \mu \cos \mu x;$$

+0,1

$$X'(30) = 0 \Rightarrow c_2 \mu \cos 30\mu = 0 \Rightarrow 30\mu = (2n-1)\tfrac{\pi}{2}\ (c_2\mu \neq 0), \quad n = 1, 2, \cdots\ (n \in \mathbb{N}).$$

+0,1

$$\mu = (2n-1)\frac{\pi}{60}, \quad \lambda_n\ (= \mu^2)\ = (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{60^2}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

são os autovalores. **+0,2**

Autofunções (autofunção associada a λ_n):

$$X_n\ (= \operatorname{sen} \mu x)\ = \operatorname{sen}(2n-1)\frac{\pi}{60}$$

+0,2