MA-311 - Turmas P e Q - Cálculo III   1a. Prova, 05/04/2013

Aluno: ______________________________ RA: ____________

Assinatura (como no RG): _________________________________

Observações: ***Não é permitido o uso de qualquer equipamento eletrônico. Desligar o celular! Não destaque o grampo da prova.***

Todas as questões (suas resoluções) devem ser justificadas com o conhecimento da Matéria - cf. livro-texto.

1. a) (1,5 pontos) Encontre a solução de forma explícita do problema de valor inicial

$$y' = x(x^2 + 1)/y^3, \ y(1) = 2.$$

b) (1,0) Mostre que a solução é única. Usando o conhecimento da Matéria, responda: para que valores de x_0, y_0 podemos garantir que a solução existe e é única, substituindo a condição inicial $y(1) = 2$ por $y(x_0) = y_0$? (*Não esqueça de justificar, com a teoria vista.*)

2. a) (1,0) Resolva a equação $y''' - 4y'' + 4y' = 0$.

b) (1,5) Encontre uma solução particular da equação $\mathrm{L}[y] \equiv y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^{2x} + \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}$ no intervalo $I = (0, \infty)$, i.e. para $x > 0$. *Observação: a equação aqui é de 2a. ordem. Sugestão: encontre soluções particulares separadamente para as equações* $L[y] = e^{2x}$ *e* $L[y] = \frac{e^{2x}}{x}$.

3. Resolva as equações, no intervalo $I = (0, \infty)$ $(x > 0)$:

a) (1,0) $-\frac{1}{4}xy' - 3y = x$

b) (1,5) $xy' - 3y = xy^5$

4. (2,5) Resolva a equação $\mathrm{e}^x dx + (\mathrm{e}^x \mathrm{cot} y + 2y \mathrm{cosec} y) dy = 0$.

MA-311 - Turmas P e Q - Cálculo III 1a. Prova, 05/04/2013

Gabarito

1. a) (1,5 pontos) *Encontre a solução de forma explícita do problema de valor inicial* $y' = x(x^2+1)/y^3,\ y(1) = 2.$

A equação é de variáveis separáveis. Com efeito, a mesma pode ser escrita na forma
$y^3 dy' = x(x^2+1)dx.$ **0,3 pontos** até aqui.
Logo, resolvendo, temos:

$\int y^3 dy' = \int x(x^2+1)dx$ $+\ \mathbf{0,2}$

$\frac{y^4}{4} = \int x(x^2+1)dx = \int (x^3+x)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + c$

$y^4 = x^4 + 2x^2 + c$ $+\ \mathbf{0,2}$

$y = \pm\sqrt[4]{x^4+2x^2+c}$ $+\ \mathbf{0,2}$

Daí, substituindo a condição inicial (x=1, y=2) vem que
$2 = \pm\sqrt[4]{1+2+c}$, logo, devemos ter $2^4 = 3+c,\ \ 16 = 3+c,\ \ \boxed{c = 13}$ $+\ \mathbf{0,3}$

Além disso, devemos tomar o sinal + na expressão para y acima, a fim de que y seja igual a 2 quando $x = 1$. Concluindo, a solução do problema é

$\boxed{y = \sqrt[4]{x^4+2x^2+13}}$. $+\ \mathbf{0,3}$

1 b) (1,0) *Mostre que a solução é única. Usando o conhecimento da Matéria, responda: para que valores de* x_0, y_0 *podemos garantir que a solução existe e é única, substituindo a condição inicial por* $y(x_0) = y_0$*? (*Não esqueça de justificar, com a teoria vista.*)*

A equação é do tipo $y' = f(x,y)$, sendo $f(x,y) = x(x^2+1)/y^3$ - um quociente de funções deriváveis (polinomiais) (uma função racional) com o denominador anulando-se apenas quando $y = 0$, logo, f e f_y são funções contínuas (na verdade têm derivadas de todas as ordens) em todo ponto do plano exceto na reta $y = 0$. **0,2**

Como podemos tomar um retângulo (aberto) contendo o ponto $(x_0, y_0) = (1,2)$ (condição inicial) não interceptando a reta $y = 0$ (e.g. $0 < x < 2$, $0 < y < 3$) concluímos, pelo Teorema de Existência e Unicidade (TEU), que a solução é única. $+\ \mathbf{0,3}$

Analogamente, dado qualquer ponto (x_0, y_0), com $y_0 \neq 0$, podemos também tomar um retângulo (aberto) contendo o ponto (x_0, y_0) não interceptando a reta $y = 0$ (e.g. $x_0 - 1 < x < x_0 + 1$, $0 < y < 2y_0$ se $y_0 > 0$; $2y_0 < y < 0$ se $y_0 > 0$) concluímos que a solução existe e é única, com a condição inicial $y(x_0) = y_0$ (sendo a mesma definida em algum intervalo aberto contendo o ponto x_0). $+\ \mathbf{0,5}$

2. a) (1,0) *Resolva a equação* $y''' - 4y'' + 4y' = 0$.

(A equação é linear homogênea com coeficientes constantes.)
Equação característica: $r^3 - 4r^2 + 4r = 0$, $r(r^2 - 4r + 4) = 0$, $r(r-2)^2 = 0$; as raízes são 0, com multiplicidade 1, e 2, com multiplicidade 2. **0,2**
Daí temos que um conjunto fundamental de soluções (no intervalo $I = \mathbb{R}$) é $y_1 = 1$, $y_2 = \mathrm{e}^{2x}$ e $y_3 = x\mathrm{e}^{2x}$, $+\,\mathbf{0,3}$
ou seja, a solução (geral) da equação é $\boxed{y = c_1 + c_2\mathrm{e}^{2x} + c_3x\mathrm{e}^{2x}}$. $+\,\mathbf{0,5}$

b) (1,5) *Encontre uma solução particular da equação* $\mathrm{L}[y] \equiv y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^{2x} + \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}$ *no intervalo* $I = (0, \infty)$*, i.e. para* $x > 0$. *Observação: a equação aqui é de 2a. ordem. Sugestão: encontre soluções particulares separadamente para as equações* $L[y] = e^{2x}$ *e* $L[y] = \frac{e^{2x}}{x}$.

Equação homogênea associada: $y'' - 4y' + 4y = 0$; equação característica: $r^2 - 4r + 4r = 0$, $(r-2)^2 = 0$; $r = 2$ é a única raiz, com multiplicidade 2. Então um conjunto fundamental de soluções é $y_1 = \mathrm{e}^{2x}$ e $y_2 = x\mathrm{e}^{2x}$. **0,2**

Solução particular da equação $\mathrm{L}[y] = g_1$, $g_1 = \mathrm{e}^{2x}$:

Como g_1 é do tipo $P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$, sendo P um polinômio, aqui de grau 0 (o polinômio constante $P \equiv 1$), podemos encontrar uma solução particular pelo método dos coeficientes indeterminados. $\alpha + i\beta = 2 + i\,0 = 2$ é raiz da equação característica, com multiplicidade 2.

$+\,\mathbf{0,1}$

Temos então uma solução particular da forma $y \equiv y_P = x^sA\mathrm{e}^{2x}$, sendo s igual a multiplicidade de $\alpha + i\beta = 2 + i\,0 = 2$ como raiz da raiz da equação característica, ou seja, 2, e A uma constante a ser determinada por substituição de y_P na equação $\mathrm{L}[y] = \mathrm{e}^{2x}$. $+\,\mathbf{0,2}$.
Derivando $y = x^2A\mathrm{e}^{2x} = Ax(x\mathrm{e}^{2x}) = Axy_2$ e, em seguida, substituindo na equação, temos:

$y' = A(y_2 + xy_2')$
$y'' = A(2y_2' + xy_2'')$;
$A(2y_2' + xy_2'') - 4A(y_2 + xy_2') + 4Axy_2 = \mathrm{e}^{2x}$
$Ax(y_2'' - 4y_2' + 4y_2) + 2A(y_2' - 2y_2) = \mathrm{e}^{2x}$
$Ax\,\mathrm{L}[y_2] + 2A(\mathrm{e}^{2x} + 2x\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^{2x}) = \mathrm{e}^{2x}$
$2A\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}$ ($\mathrm{L}[y_2] = 0$, visto que y_2 é uma solução da equação homogênea). $+\,\mathbf{0,2}$

Daí temos que $2A = 1$, i.e. $A = 1/2$ e, consequentemente, $\boxed{y_{P1} := \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{2x}}$ é uma solução particular da equação $\mathrm{L}[y] = \mathrm{e}^{2x}$. $+\,\mathbf{0,1}$

Solução particular da equação $\mathrm{L}[y] = g_2$, $g_2 = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}$:

Aqui, devemos encontrar uma solução pelo método de variação dos parâmetros:
$y = v_1y_1 + v_2y_2$

$$\begin{cases} y_1v_1' + y_2v_2' = & 0 \\ y_1'v_1' + y_2'v_2' = & g_2 \end{cases} \qquad +\,\mathbf{0,1}$$

Sistema linear algébrico; determinante (wronskiano):

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{2x} & x\mathrm{e}^{2x} \\ 2\mathrm{e}^{2x} & (1+2x)\mathrm{e}^{2x} \end{vmatrix} = (1+2x)\mathrm{e}^{4x} - 2x\mathrm{e}^{4x} = \mathrm{e}^{4x}$$

$\boxed{W = \mathrm{e}^{4x}}$

$+\ \mathbf{0,1}$

$v_1' = \frac{W_1}{W}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g_2 & y_2' \end{vmatrix}$ (Regra de Cramer)

$+\ \mathbf{0,1}$

$W_1 = -g_2 y_2 = -\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x} x\mathrm{e}^{2x} = -\mathrm{e}^{4x}$

$\therefore \quad v_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{-\mathrm{e}^{4x}}{\mathrm{e}^{4x}} = -1$

$\boxed{v_1 = -x}$

$+\ \mathbf{0,1}$

$v_2' = \frac{W_2}{W}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g_2 \end{vmatrix} = y_1 g_2 = \mathrm{e}^{2x}\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x} = \frac{\mathrm{e}^{4x}}{x}$

$\therefore \quad v_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{\frac{\mathrm{e}^{4x}}{x}}{\mathrm{e}^{4x}} = 1/x$

$\boxed{v_2 = \ln x}$

$+\ \mathbf{0,1}$

Então $\boxed{y_{P2} := -x\mathrm{e}^{2x} + x\mathrm{e}^{2x}\ln x}$ é uma solução particular da equação $\mathrm{L}[y] = g_2 = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x},\ x > 0.$

$+\ \mathbf{0,1}$

Como a equação é linear ($\mathrm{L}[y]$ é um operador liner; consequentemente, $\mathrm{L}[y_{P1} + y_{P2}] = \mathrm{L}[y_{P1}] + \mathrm{L}[y_{P2}]$) temos que $y = y_{P1} + y_{P_2} = \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^{2x} + x\mathrm{e}^{2x}\ln x = (\frac{1}{2}x^2 - x + x\ln x)\mathrm{e}^{2x}$ é uma solução particular da equação $\mathrm{L}[y] = g_1 + g_2 = \mathrm{e}^{2x} + \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}$. $+\ \mathbf{0,1}$

3. *Resolva as equações, no intervalo $I = (0, \infty)$ ($x > 0$):*

a) (1,0) $\quad -\frac{1}{4}xy' - 3y = x$

b) (1,5) $\quad xy' - 3y = xy^5$

a) Temos a equação linear de 1a. ordem $\ y' + \frac{12}{x}y = -4$.

Fator integrante: $\mu = \mathrm{e}^{\int \frac{12}{x}dx} = \mathrm{e}^{12\ln|x|} = \mathrm{e}^{12\ln x} = \mathrm{e}^{\ln x^{12}}$; $\boxed{\mu = x^{12}}$. $\quad \mathbf{0,4}$

Multiplicando a equação acima por μ, obtemos

$x^{12}y' + 12x^{11}y = -4x^{12}$ $\quad +\ \mathbf{0,2}$

$\frac{d}{dx}(x^{12}y) = -4x^{12}, \quad x^{12}y = -\int 4x^{12}dx = -\frac{4}{13}x^{13} + c, \quad \boxed{y = cx^{-12} - \frac{4}{13}x}$. $\quad +\ \mathbf{0,4}$

b) A equação é do tipo equação de Bernoulli, $\ y' + p(x)y' = q(x)y^n$, com $n = 5$. $\quad \mathbf{0,3}$

Então podemos resolvê-la com a substituição $\ v = y^{1-n} = y^{-4}, \quad y = v^{-1/4},\ y' = -\frac{1}{4}v^{-5/4}v'$.

$+\ \mathbf{0,3}$

Levando então v na equação dada, obtemos a equação $\ -\frac{1}{4}xv^{-5/4}v' - 3v^{-1/4} = xv^{-5/4}$

$+\ \mathbf{0,3}$

a qual, após divisão por $v^{-5/4}$, resulta em $\ -\frac{1}{4}xv' - 3v = x.$ $\quad +\ \mathbf{0,3}$

Pelo item **a)**, a solução desta é $\ v = cx^{-12} - \frac{4}{13}x.$

Daí, como $y = v^{-1/4}$, concluímos que $\quad y = \left(cx^{-12} - \frac{4}{13}x\right)^{-1/4}$ $\quad +\ \mathbf{0,3}$

ou $\ y = (x^{-12})^{-1/4}\left(c - \frac{4}{13}x^{13}\right)^{-1/4}, \quad \boxed{y = x^3/\sqrt[4]{c - \frac{4}{13}x^{13}}}$.

4. (2,5) *Resolva a equação* $e^x dx + (e^x \cot y + 2y \operatorname{cosec} y)dy = 0$.

Equação do tipo $Mdx + Ndy = 0$, sendo $M = e^x$ e $N = e^x \cot y + 2y \operatorname{cosec} y$.

$M_y = 0, \quad N_x = e^x \cot y$ **0,2**

$M_y \neq N_x$: equação não exata. Então vamos encontrar um fator integrante. **+ 0,2**

(Equação do fator integrante μ: $(\mu M)_y = (\mu N)_x, \quad N\mu_x - M\mu_y + (N_x - M_y)\mu = 0.$)

$$\left(\frac{N_x - M_y}{N} = \frac{e^x \cot y}{e^x \cot y + 2y \operatorname{cosec} y}\right)$$

$\dfrac{N_x - M_y}{M} = \dfrac{e^x \cot y}{e^x} = \cot y$ é uma função dependente somente de y. **+ 0,3**

Então teremos um fator integrante resolvendo a equação $\mu' - \frac{N_x - M_y}{M}\mu = 0, \quad \mu = \mu(y)$,

ou seja, $\boxed{\mu' - \cot y \mu = 0}$. **+ 0,3**

- uma equação linear de 1a. ordem homogênea.

$\dfrac{\mu'}{\mu} = \cot y, \quad (\ln|\mu|)' = \cot y, \quad \ln|\mu| = \int \cot y \, dy = \ln|\operatorname{sen} y| \quad (+c)$

$\mu = \pm \operatorname{sen} y \quad \boxed{\mu = \operatorname{sen} y}$ **+ 0,3**

Multiplicando a equação dada por μ, obtemos a equação exata

$$e^x \operatorname{sen} y dx + (e^x \cos y + 2y)dy = 0.$$

Para resolvê-la calculamos um 'potencial' ψ:

$\psi_x = e^x \operatorname{sen} y, \quad \psi = \int e^x \operatorname{sen} y dx = e^x \operatorname{sen} y + g(y)$ **+ 0,3**

$\psi_y = e^x \cos y + 2y$ **+ 0,2**

$\therefore \; e^x \cos y + g'(y) = e^x \cos y + 2y$ **+ 0,3**

$g'(y) = 2y, \quad g(y) = y^2 \quad (+c)$ **+ 0,2**

Portanto $\psi = e^x \operatorname{sen} y + y^2$ e a solução da equação dada é $\psi = c$, i.e.

$$\boxed{e^x \operatorname{sen} y + y^2 = c}.$$

+ 0,2