MA-311 - Noturno – Cálculo III 1a. Prova

1. (*2.0 pontos*) *Considere o problema de valor inicial*

$$xy' - y = x\cos x,\ \ y(x_0) = y_0.$$

a) (1.0) Resolva este problema para $x_0 = \pi$ *e* $y_0 = \pi/2$.

b) (0.5) O problema tem solução para $x_0 = 0$*? Podemos usar o Teorema de Existência e Unicidade para responder esta questão?*

c) (0.5) Justifique que para $x_0 \neq 0$ *o problema tem solução. Neste caso (*$x_0 \neq 0$*), para que valores de* y_0 *a solução fica limitada (i.e. para alguma constante* c*, temos que* $|y| \leq c$ *para qualquer valor de* x*)?*

1.(a)

$y' - \frac{1}{x}y = \cos x.$

Fator integrante: $\mu = e^{\int(-\frac{1}{x})dx} = e^{-\ln|x|\ \ (+c)} = e^{\ln|x|^{-1}} = |x|^{-1} = \pm x^{-1}.$

0,3 pontos até aqui.

Tomando $\mu = x^{-1} = 1/x$ e multiplicando a equação por μ, obtemos

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}y) = \frac{\cos x}{x}$$
$$\frac{1}{x}y = \int \frac{\cos x}{x}dx,$$

$+\ \mathbf{0,4}$

$y = x\int \frac{\cos x}{x}dx.$ Tomando a primitiva $\int_\pi^x \frac{\cos s}{s}ds$, ficamos com $\int \frac{\cos x}{x}dx = \int_\pi^x \frac{\cos s}{s}ds + c$ e então

$$\boxed{y = x\int_\pi^x \frac{\cos s}{s}ds + cx}.$$

$+\ \mathbf{0,1}$

Impondo a condição inicial $x = \pi,\ y = \pi/2$, obtemos $\pi/2 = c\pi,\ \ c = 1/2,$ $+\ \mathbf{0,2}$

logo, a solução pedida é $\boxed{y = x\int_\pi^x \frac{\cos s}{s}ds + x/2}$.

1.(b) Não podemos usar o TEU, pois a equação se escreve como $y' - \frac{1}{x}y = \cos x$ e a função $p(x) = -\frac{1}{x}$ não é contínua em $x_0 = 0$ (não pode ser definida em $x = 0$ de forma que seja contínua; não tem limite quando x tende a zero). **0,4 pontos**

Tomando $x = 0$ na equação, obtemos $y = 0$, logo, o problema para $x_0 = 0$ só pode ter solução se $y_0 = 0$. $+\ \mathbf{0,1}$

(Para $y_0 = 0$ (e $x_0 = 0$), da resolução do item a), temos que se o problema tivesse uma solução y então $y = x\int_\pi^x \frac{\cos s}{s}ds + cx$ para todo $x > 0$. Daí, é possível verificar que não existe $y'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{y}{x} = \lim_{x\to 0+} \int_\pi^x \frac{\cos s}{s}ds + c$.)

1.(c) A equação se escreve como $y' - \frac{1}{x}y = \cos x$. Como as funções $p(x) = -\frac{1}{x}$ e $q(x) = \cos x$ são contínuas nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$ e $x_0 \neq 0$ pertence a um desses intervalos, **0,3** concluimos, pelo Teorema de Existência e Unicidade, que o problema tem solução. $+\ \mathbf{0,2}$.

2. (*2.0 pontos*) *Ao encontrar um fator integrante da forma* $x^a y^b$ *de modo a tornar exata a equação diferencial, descreva suas soluções*:

$$(-4x^2y - 2xy^2)dx + (2x^3 - 3xy)dy = 0.$$

Multiplicando a equação dada por $x^a y^b$, obtemos

$$(-4x^{a+2}y^{b+1} - 2x^{a+1}y^{b+2})dx + (2x^{a+3}y^b - 3x^{a+1}y^{b+1})dy = 0.$$

0,2

A condição a ser cumprida para que esta equação seja exata vem a ser

$$-4(b+1)x^{a+2}y^b - 2(b+2)x^{a+1}y^{b+1} = 2(a+3)x^{a+2}y^b - 3(a+1)x^a y^{b+1},$$

$+\ \mathbf{0,4}$

o que impõe

$$\begin{cases} -4(b+1) = & 2(a+3) \\ -2(b+2) = & 0 \\ -3(a+1) = & 0, \end{cases} \qquad \text{isto é,} \qquad \begin{cases} a = -1 \\ b = -2. \end{cases}$$

$+\ \mathbf{0,2}$

Concluímos que o fator integrante apropriado é $x^{-1}y^{-2}$, com $y \neq 0$. $+\ \mathbf{0,1}$

Em particular, deve-se examinar se $y = 0$ é solução, o que é o caso. $+\ \mathbf{0,1}$

A equação diferencial

$$(-4xy^{-1} - 2)dx + (2x^2y^{-2} - 3y^{-1})dy = 0$$

é, portanto, exata. $+\ \mathbf{0,2}$

Logo, há uma função $\psi(x, y)$ tal que

$$\psi_x = -4xy^{-1} - 2 \;\text{ e }\; \psi_y = 2x^2y^{-2} - 3y^{-1}.$$

$+\ \mathbf{0,2}$

Integrando a primeira igualdade acima, resulta $\psi = -2x^2y^{-1} - 2x + g(y)$. Ao usar a segunda igualdade, encontramos então $g'(y) = -3y^{-1}$, ou seja, $g(y) = -3\ln|y|\ (+c)$ $+\ \mathbf{0,3}$.

Enfim, temos que a equação diferencial em discussão apresenta $y = 0$ como solução singular $+\ \mathbf{0,1}$

e, implicitamente, $2x^2y^{-1} + 2x + 3\ln|y| = c$ como solução geral, com c sendo uma constante arbitrária. $+\ \mathbf{0,2}$

3. (*2.0 pontos*) *Considere a equação diferencial*

$$x^2y'' + xy' - \frac{1}{4}y = \sqrt{x},\ x > 0.$$

(a) (1.0) *Encontre a solução complementar resolvendo a equação homogênea associada.*
(b) (1.0) *Usando o método de* ***variação dos parâmetros*** *encontrar uma solução particular.*

(a) Equação de Euler, $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0, \quad \alpha = 1,\ \beta = -1/4.$ **0,2**

Equação indicial $(r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0)$: $\quad r^2 - \frac{1}{4} = 0;$ raízes: $r = \pm 1/2.$ **+ 0,2**

CFS: $y_1 = x^{1/2},\ y_2 = x^{-1/2}\,.$ **+ 0,4**

Solução geral (da equação homogênea associada): $\boxed{y = c_1\sqrt{x} + c_2/\sqrt{x}}.$ **+ 0,2**

(b) Solução particular: $y_P = v_1y_1 + v_2y_2;$ **0,1**

$$\begin{cases} y_1v_1' + y_2v_2' & = \ 0 \\ y_1'v_1' + y_2'v_2' & = \ x^{-3/2} \end{cases}$$

+ 0,2

Determinante (wronskiano), $W \equiv W[y_1, y_2]$:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^{1/2} & x^{-1/2} \\ \frac{1}{2}x^{-1/2} & -\frac{1}{2}x^{-3/2} \end{vmatrix} = -1/x\,.$$

+ 0,2

$$v_1' = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} 0 & x^{-1/2} \\ x^{-3/2} & -\frac{1}{2}x^{-3/2} \end{vmatrix} = (-x)(-x^{-2}) = x^{-1}\,;$$

$$\boxed{v_1 = \int x^{-1}dx = \ln x \quad (+c)}.$$

+ 0,2

$$v_2' = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} x^{1/2} & 0 \\ \frac{1}{2}x^{-1/2} & x^{-3/2} \end{vmatrix} = (-x)(x^{-1}) = -1\,;$$

$$\boxed{v_2 = -x}.$$

+ 0,2

$y_P = (\ln x)x^{1/2} - x\,x^{-1/2},$

$$\boxed{y_P = -\sqrt{x}(1 - \ln x)}.$$

+ 0,1

4. (*2.0 pontos*) *Dada a e.d.o.*

$$\frac{1}{2}y^{(4)} + y^{(3)} + y^{(2)} = \mathrm{e}^{-x}\cos x + 3x,$$

(a) *resolva a equação homogênea associada*;

(b) *usando o método de coeficientes indeterminados apresente e justifique a forma da solução particular.* ***Não*** *calcule os coeficientes!*

(a) Equação característica: $\frac{1}{2}r^4 + r^3 + r^2 = r^2(\frac{1}{2}r^2 + r + 1) = 0.$ $\mathbf{0,2}$

$r = 0$, multiplicidade 2. $+\ \mathbf{0,2}$

$\frac{1}{2}r^2 + r + 1 = 0$, $r^2 + 2r + 2 = 0$, $r = \frac{-2+\sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i.$ $+\ \mathbf{0,2}$

Solução geral da equação homogênea:

$$\boxed{y = c_1 + c_2 x + c_3\,\mathrm{e}^{-x}\cos x + c_4\,\mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen} x}.$$

$+\ \mathbf{0,4}$

(b) O método dos coeficientes indeterminados, nos diz que se temos uma equação (e.d.o.) linear com coeficiente constantes $L[y] = g$, com g da forma $g(x) = P(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x \text{ ou } \operatorname{sen}\beta x)$, então a mesma tem uma solução particular da forma $x^s\,\mathrm{e}^{\alpha x}(Q(x)\cos x + R(x)\operatorname{sen} x)$, onde $Q(x)$ e $R(x)$ são polinômios de grau igual ao grau de P - os mesmos (seus coeficientes) podem ser determinados por substituição na equação - e s é igual a zero, se $\alpha + i\beta$ não for raiz da equação caracterítica, e igual a sua multiplicidade, se for raiz.

A equação dada é linear da forma $L[y] = g_1 + g_2$, com g_1 e g_2 da forma $P(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$, sendo, respectivamente, $P(x)$ o polinômio constante 1 (grau 0), $\alpha = -1$, $\beta = 1$, e, $P(x)$ o polinômio $3x$ (grau 1), $\alpha = \beta = 0$. Logo, pelo método dos coeficientes indeterminados, para a equação $L[y] = g_1$ a forma da solução particular é

$$x^s\,\mathrm{e}^{-x}(C\cos x + D\operatorname{sen} x).$$

$+\ \mathbf{0,2}$

e para a equação $L[y] = g_2$ a forma da solução particular é

$$x^s(A + Bx)$$

$+\ \mathbf{0,2}$

Para a primeira temos que $s = 1$, pois $\alpha + i\beta = -1 + i$ é uma raiz com multiplicidade 1 da equação característica, $+\ \mathbf{0,2}$

e para a segunda, $s = 2$, pois $\alpha + i\beta = 0$ é uma raiz com multiplicidade 2 da equação característica. $+\ \mathbf{0,2}$

Finalmente, como a equação é linear, podemos somar as duas soluções dadas acima, para obter a solução particular y_P:

$$\boxed{y_P = x\,\mathrm{e}^{-x}(C\cos x + D\operatorname{sen} x) + x^2(A + Bx)}.$$

$+\ \mathbf{0,2}$

5. (*2.0 pontos*) *Considere a e.d.o.*

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0, \quad x > 1.$$

Usando o método de **redução de ordem**, *resolva a equação, dado que* $y_1(x) = \mathrm{e}^x$ *é solução. Determinar uma segunda solução da forma* $y_2(x) = v(x)y_1(x)$.

Escrevendo $y = y_2 = v\,\mathrm{e}^x$, temos:
$y' = v\,\mathrm{e}^x + v'\,\mathrm{e}^x, \quad y'' = v\,\mathrm{e}^x + 2v'\,\mathrm{e}^x + v''\,\mathrm{e}^x.$ **0,2**

Assim,

$$\begin{aligned}&(x-1)[v+2v'+v''] - x(v+v') + v = 0\\&(x-1)v'' + (x-2)v' = 0\\&v'' + \tfrac{x-2}{x-1}v' = 0.\end{aligned}$$

+ 0,6

Fator integrante: $\mu(x) = \mathrm{e}^{\int \frac{x-2}{x-1}dx} = \mathrm{e}^{\int \frac{(x-1)-1}{x-1}dx} = \mathrm{e}^{\left(\int 1dx - \int \frac{1}{x-1}\right)dx} = \mathrm{e}^{x-\ln(x-1)} = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{\ln(x-1)^{-1}} = \frac{\mathrm{e}^x}{x-1}$. **+ 0,4**

Então reescrevemos

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{\mathrm{e}^x}{x-1}v'\right)' = 0 \quad &\Rightarrow \tfrac{\mathrm{e}^x}{x-1}v' = c_1 \Rightarrow v'(x) = c_1(x-1)\,\mathrm{e}^{-x}\\&\Rightarrow v(x) = c_1\int (x-1)\,\mathrm{e}^{-x}\,dx \qquad (u = x-1,\ dv = \mathrm{e}^{-x})\\v(x) = c_1\left[-(x-1)\,\mathrm{e}^{-x} + \int \mathrm{e}^{-x}\,dx\right] \quad &= c_1(1-x)\,\mathrm{e}^{-x} - c_1\,\mathrm{e}^{-x} + c_2\\&= c_1 x\,\mathrm{e}^{-x} + c_2.\end{aligned}$$

+ 0,4

Tomando $c_1 = 1, c_2 = 0$, temos $v = x\,\mathrm{e}^{-x}$ e então, $y_2 = x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^x = x$

Assim,

$$\boxed{y = c_1\,\mathrm{e}^x + c_2 x}.$$

+ 0,4