

Questão 1.

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x} \cos x$$

Fator integrante:

$$\mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln|x| dx} = |x| = \pm x.$$

0,7 pontos até aqui.

Tomando $\mu = x$, temos:

$$\begin{aligned}(xy)' &= \cos x \\ xy &= \int \cos x dx = \text{sen}x + c \\ y &= \frac{1}{x}(\text{sen}x + c)\end{aligned}$$

+ **0,7**

Condição inicial:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 : \quad 0 = \frac{2}{\pi}(1 + c) \\ c = -1$$

Solução:

$$y = \frac{1}{x}(\text{sen}x - 1)$$

+ **0,6**

Questão 2. (a) Dividindo a equação por x^2 , obtemos

$$\frac{dy}{dx} = 1 + 3\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2. \quad (1)$$

Como o lado direito da equação acima depende somente do quociente y/x , isso mostra que a equação é homogênea **(0,3)**. Neste caso, a mudança de variável é dada por $v = y/x$ **(0,2)**.

(b) Defina $f(v) = 1 + 3v + v^2$. Então a equação em (1) se transforma na EDO separável

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{v - f(v)} \frac{dv}{dx} = 0.$$

Mas $v - f(v) = -(1 + 2v + v^2) = -(1 + v)^2$. Assim, devemos resolver

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{(v + 1)^2} \frac{dv}{dx} = 0. \quad (0,6) \quad (2)$$

Sejam

$$H_1(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$$

e

$$H_2(v) = - \int \frac{1}{(v + 1)^2} dv = \frac{1}{v + 1}.$$

Logo, $\ln|x| + \frac{1}{v+1} = c$ é a solução geral de (2). Como $v = y/x$, obtemos

$$\ln|x| + \frac{x}{x+y} = c \Rightarrow y = x(c - \ln|x|)^{-1} - x. \quad (0,6)$$

Agora, $y(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$. Portanto,

$$y = x(1 - \ln|x|)^{-1} - x \quad (0,3)$$

é a solução do PVI dado.

Questão 3.

$$\begin{aligned} y_2 &= v y_1 \\ y_2' &= v' y_1 + v y_1' \\ y_2'' &= v'' y_1 + 2v' y_1' + v y_1'' \end{aligned}$$

Substituindo na equação, obtemos:

$$\begin{aligned} x^2(v'' y_1 + 2v' y_1' + v y_1'') - 6v y_1 &= 0 \\ v(x^2 y_1'' - 6y_1) + (x^2 y_1') v'' + (2x^2 y_1') v' &= 0 \end{aligned}$$

Daí, como $y_1 = x^3$ é solução da equação, temos

$$\begin{aligned} x^5 v'' + 6x^4 v' &= 0 \\ x v'' + 6v' &= 0 \\ v'' + \frac{6}{x} v' &= 0 \end{aligned}$$

uma EDO linear de 1a. ordem para v' .

1,0

Fator integrante ($x > 0$):

$$\mu = e^{\int \frac{6}{x} dx} = e^{6 \ln x} = e^{\ln x^6} = x^6, .$$

Multiplicando a equação para v' por $\mu = x$, temos:

$$\begin{aligned} (x^6 v')' &= 0 \\ v' &= \frac{c}{x^6} \end{aligned}$$

+ 0,5

$$\begin{aligned} v &= \int \frac{c}{x^6} dx \\ v &= -\frac{1}{5} c x^{-5} + c_1 \end{aligned}$$

Tomando $c = -5$ e $c_1 = 0$, obtemos:

$$v = x^{-5}$$

$$y_2 = \frac{1}{x^5} y_1 = \frac{1}{x^5} x^3$$

$$y_2 = \frac{1}{x^2}$$

+ 0,5

Questão 4.

Solução geral (CFS) da equação homogênea (equação linear homogênea com coeficientes constantes):

Equação característica:

$$\begin{aligned} 4r^2 - 4r + 1 &= 0 \\ r^2 - r + \frac{1}{4} &= 0 \\ (r - \frac{1}{2})^2 &= 0; \end{aligned}$$

raiz: $r = \frac{1}{2}$, com multiplicidade 2.

CFS:

$$y_1 = e^{\frac{1}{2}x}, \quad y_2 = xe^{\frac{1}{2}x}$$

Solução geral (CFS) da equação homogênea:

$$y_H = c_1e^{\frac{1}{2}x} + c_2xe^{\frac{1}{2}x}$$

0,5

Solução particular ($s = 2$):

$$y_P = x^s(Ae^{\frac{1}{2}x}) = Ax^2e^{\frac{1}{2}x}$$

+ 0,5

$$\begin{aligned} y'_P &= 2Axe^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}Ax^2e^{\frac{1}{2}x} \\ &= A(2x + \frac{x^2}{2})e^{\frac{1}{2}x} \\ y''_P &= A(2 + x)e^{\frac{1}{2}x} + \frac{A}{2}(2x + \frac{x^2}{2})e^{\frac{1}{2}x}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação, obtemos:

$$\begin{aligned} 4A(2 + x)e^{\frac{1}{2}x} + 2A(2x + \frac{x^2}{2})e^{\frac{1}{2}x} - 4A(2x + \frac{x^2}{2})e^{\frac{1}{2}x} + Ax^2e^{\frac{1}{2}x} &= 16e^{\frac{1}{2}x} \\ 8A &= 16 \\ A &= 2 \end{aligned}$$

+ 0,5

Solução geral:

$$\begin{aligned} y &= y_H + y_P \\ y &= c_1e^{\frac{1}{2}x} + c_2xe^{\frac{1}{2}x} + 2x^2e^{\frac{1}{2}x} \end{aligned}$$

+ 0,5

Questão 5. Primeiro observe que a equação pode ser reescrita na forma

$$y''' + \frac{1}{x}y'' - \frac{2}{x^2}y' + \frac{2}{x^3}y = 2x =: g(x).$$

Usando o método de variação dos parâmetros, suponhamos que a equação possui uma solução particular do tipo

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3,$$

onde u_m são tais que $u'_m = g(x)W_m(x)/W(x)$ (0,5). Notemos que

$$y'_1 = 1, \quad y'_2 = 2x, \quad y'_3 = -x^{-2}, \quad y''_1 = 0, \quad y''_2 = 2, \quad y''_3 = 2x^{-3}.$$

Portanto,

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^{-1} \\ 1 & 2x & -x^{-2} \\ 0 & 2 & 2x^{-3} \end{vmatrix} = 4x^{-1} + 2x^{-1} + 2x^{-1} - 2x^{-1} = 6x^{-1}. \quad (0,1)$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & x^2 & x^{-1} \\ 0 & 2x & -x^{-2} \\ 1 & 2 & 2x^{-3} \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3. \quad (0,1)$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & x^{-1} \\ 1 & 0 & -x^{-2} \\ 0 & 1 & 2x^{-3} \end{vmatrix} = x^{-1} + x^{-1} = 2x^{-1}. \quad (0,1)$$

$$W_3(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & 0 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2. \quad (0,1)$$

Logo,

$$u'_1 = -2x \cdot 3 \cdot \frac{x}{6} = -x^2 \Rightarrow u_1 = -\frac{1}{3}x^3. \quad (0,2)$$

$$u'_2 = 2x \cdot 2x^{-1} \cdot \frac{x}{6} = \frac{2}{3}x \Rightarrow u_2 = \frac{1}{3}x^2. \quad (0,2)$$

$$u'_3 = 2x \cdot x^2 \cdot \frac{x}{6} = \frac{1}{3}x^4 \Rightarrow u_3 = \frac{1}{15}x^5. \quad (0,2)$$

Finalmente,

$$y_p = -\frac{1}{3}x^3 \cdot x + \frac{1}{3}x^2 \cdot x^2 + \frac{1}{15}x^5 \cdot x^{-1} = \frac{1}{15}x^4, \quad (0,5)$$

ou seja, $y_p = \frac{1}{15}x^4$ é solução particular da equação.