Gabarito - P1 GA 04/09/2012 - um tipo de prova

Questão 1.

a) Teorema: A *é invertível* $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

0,3 pontos até aqui.

O determinante não é (necessariamente) nulo (a matriz não é (necessariamente) singular (não invertível)).

+ **0,2 pontos**.

(Um) Contra-exemplo: seja $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. + **0,3**

Então $A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4A$
e $\det A = 16 \neq 0$. + **0,2**

b) Se $\det A \neq 0$ então A é invertível (Teorema). **0,2**
Daí e das propriedades das operações com matrizes, temos:

$$\begin{aligned} A^2 &= 4A \\ (A^2)A^{-1} &= (4A)A^{-1} \end{aligned}$$

+ **0,2**

$$(AA)A^{-1} = 4(AA^{-1})$$
$$A(AA^{-1}) = 4I0$$
$$AI = 4I$$
$$\boxed{\text{A=4I}}.$$

+ **0,6**

Questão 2.

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & | & 0 & | & 0 \\ 2 & 3 & 3 & | & 0 & | & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 2 & | & 0 & | & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} L_2\text{“}=\text{”}L_2-2L_1 \\ \longrightarrow \\ L_3\text{“}=\text{”}L_3-2L_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & | & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -2 & | & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & -2 & | & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$

0,2

$$\begin{array}{c} L_1 = L_1 - L_2 \\ \to \\ L_3 = L_3 + L_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & | & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -2 & | & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -4 & | & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_2 = L_2 - L_3 \\ \to \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & | & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & | & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -4 & | & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$+\ \mathbf{0,2}$

Solução do sistema $AX = E_j$:

$$j = 1: \quad S_1 := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix};$$

$+\ \mathbf{0,2}$

$$j = 2: \quad S_2 := \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$+\ \mathbf{0,2}$

$$j = 3: \quad S_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$+\ \mathbf{0,2}$

b) No item **a)** obtivemos que a matriz A é linha-equivalente à matriz identidade, logo, é invertível (Teorema). $\mathbf{0,2}$

As colunas da inversa são as soluções do sistema $AX = E_j$ onde E_1, E_2, E_3 são as colunas da matriz identidade, $+\ \mathbf{0,2}$

ou seja, (pelo item **a)**), temos que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$+\ \mathbf{0,6}$

Questão 3.

$$|M| \overset{L_1 \text{“}=\text{”} \frac{1}{2}L_1}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3/2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_3 = L_3 - 3L_1 \\ L_4 = L_4 - L_1}}{\overset{L_2 = L_2 - L_1}{=}} 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3/2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

0,4

$$\overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1/2 & 2 & 1 \\ 0 & 3/2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{L_2 = -L_2}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1/2 & 2 & 1 \\ 0 & 3/2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$+ \mathbf{0,4}$

$$\underset{L_4 = L_4 - \frac{3}{2}L_2}{\overset{L_3 = L_3 - \frac{1}{2}L_2}{=}} 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 \end{vmatrix} \overset{L_3 = \frac{2}{5}L_3}{=} 2\frac{5}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 \end{vmatrix}$$

$+ \mathbf{0,4}$

$$\underset{L_4 = L_4 - \frac{3}{2}L_3}{\overset{L_2 = L_2 + L_3}{=}} 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$+ \mathbf{0,2}$

A última matriz acima é a forma escalonada reduzida da matriz M.

$+ \mathbf{0,6}$

Questão 4.

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

0,4

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

$+ \mathbf{0,4}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5$$

$+ \mathbf{0,4}$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{1}{5}$$

$+ \mathbf{0,4}$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{1}{5}$$

$+ \mathbf{0,4}$

Questão 5.

Seja $\theta_i = \arccos a_1$. Denotando por $U = (x, y, z)$ o vetor unitário pedido, temos:

$$a_i = \cos\theta_i = \frac{U \cdot V_i}{\|V_i\|}$$

$+ \mathbf{0,4}$

$$a_1 = \frac{(x, y, z) \cdot (1, 2, 2)}{\|V_1\|} = \frac{x + 2y + 2z}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{x + 2y + 2z}{3}$$

$+ \mathbf{0,4}$

$$a_2 = \frac{(x, y, z) \cdot (2, 1, 2)}{\|V_2\|} = \frac{2x + y + 2z}{3}$$

$+ \mathbf{0,4}$

$$a_3 = \frac{(x, y, z) \cdot (2, 2, 1)}{\|V_2\|} = \frac{2x + 2y + z}{3}.$$

$+ \mathbf{0,4}$

Assim, temos o sistema para determinar U:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z &= 3a_1 \\ 2x + y + 2z &= 3a_2 \\ 2x + 2y + z &= 3a_3 \end{cases}$$

Resolvendo-o, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 3a_1 \\ 2 & 1 & 2 & | & 3a_2 \\ 2 & 2 & 1 & | & 3a_3 \end{bmatrix} \underset{L_3 = L_3 - 2L_1}{\overset{L_2 “=” L_2 - 2L_1}{\longrightarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 3a_1 \\ 0 & -3 & -2 & | & 3a_2 - 6a_1 \\ 0 & -2 & -3 & | & 3a_3 - 6a_1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_2 = -\frac{1}{3}L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 3a_1 \\ 0 & 1 & 2/3 & | & 2a_1 - a_2 \\ 0 & -2 & -3 & | & 3a_3 - 6a_1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_3 = L_3 + 2L_2}{\overset{L_1 = L_1 - 2L_2}{\longrightarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 & | & 2a_2 - a_1 \\ 0 & 1 & 2/3 & | & 2a_1 - a_2 \\ 0 & 0 & -5/3 & | & 3a_3 - 2a_2 - 2a_1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 = -\frac{3}{5}L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 & | & 2a_2 - a_1 \\ 0 & 1 & 2/3 & | & 2a_1 - a_2 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{6}{5}a_1 + \frac{6}{5}a_2 - \frac{9}{5}a_3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_2 = L_2 - \frac{2}{3}L_3}{\overset{L_1 = L_1 - \frac{2}{3}L_3}{\longrightarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{6}{5}a_2 - \frac{9}{5}a_1 + \frac{6}{5}a_3 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{6}{5}a_1 - \frac{9}{5}a_2 + \frac{6}{5}a_3 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{6}{5}a_1 + \frac{6}{5}a_2 - \frac{9}{5}a_3 \end{bmatrix}.$$

$$+\ \mathbf{0,2}$$

Logo, o vetor U (a solução do sistema acima) é

$$U = (\frac{6}{5}a_2 - \frac{9}{5}a_1 + \frac{6}{5}a_3,\ \frac{6}{5}a_1 - \frac{9}{5}a_2 + \frac{6}{5}a_3,\ \frac{6}{5}a_1 + \frac{6}{5}a_2 - \frac{9}{5}a_3).$$

$$+\ \mathbf{0,2}$$