

Aluno: _____ RA: _____

Assinatura (idêntica à do RG): _____

Observações: *Tempo de prova: 100min. Justifique sucintamente todas as suas afirmações. É proibido o uso de qualquer equipamento eletrônico; em particular do celular ou calculadora. Desligue o celular! Não destaque o grampo da prova.*

1. (2,0 pontos) Resolva a EDO $\frac{dy}{dx} = \frac{-2yx}{x^2 + y^2}$.

2. a) (1,0 ponto) Resolva o PVI por Transformada de Laplace:

$y'' + 4y = u_\pi$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, onde u_π é a função degrau unitária

$$u_\pi(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi \\ 1, & t \geq \pi \end{cases}.$$

Dados: $\mathcal{L}[u_c(t)] = \frac{e^{-cs}}{s}$; $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2 + 4)}\right] = \frac{1}{4}u_\pi(t)[1 - \cos 2(t - \pi)]$.

b) (1,0 ponto) Resolva o sistema pelo método de autovalores e autovetores:

$$\begin{cases} (x_1)' = x_2 \\ (x_2)' = -x_1 \end{cases}$$

3. a) (1,0 ponto) Calcule o limite, se existir, da sequência $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

b) (1,0 ponto) Verifique se a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+n^{5/2}}$ é convergente ou divergente; explicita o teste utilizado.

4. Use o método de Frobenius para calcular **uma** solução $y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$, $x > 0$, não nula da equação de Bessel de ordem zero: $x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0$. Explicita a equação indicial, suas raízes, e a relação de recorrência; Calcule a_2 e a_4 em função de a_0 .

5. a) (1,0 ponto) Verifique se o método de separação de variáveis pode ser usado para substituir a EDP $xu_t + tu_{xx} = 0$ por duas EDO. Se for o caso, ache essas duas EDO.

b) Considere o seguinte problema (PVIC) para a equação do calor:

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = -u(L, t), & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < L \end{cases}$$

Se $u(x, t) = X(x)T(t)$,

(0,5 pontos) Determine as condições de contorno que X deve satisfazer em $x = 0$ e $x = L$;

(0,5 pontos) Sabendo que a equação para X é $-X'' = \lambda X$, onde λ é uma constante arbitrária, e que X não deve ser a função nula no intervalo $(0, L)$, mostre que $\lambda \neq 0$.

BOA PROVA!