Curso MA720/MM720–Análise no $\mathbb{R}^n$, 1s2016 Prof. Marcelo Santos

Estudo dirigido: Teorema de mudança de variáveis (TMV)*

Referências:

[Spivak] M. Spivak, *Calculus on Manifolds* (1965), parte do cap. 3 (clique aqui);
[Munkres] J. R. Munkres, *Analysis on Manifolds* (1991);
[Elon] E. L. Lima, *Curso de Análise*, v.2 (1981).

Para a demonstração do Teorema 3-12 [Spivak] (sobre integral imprópria/estendida), precisamos da seguinte importante observação:

A "propriedade 3" do Teorema sobre partições da unidade $\{\phi\}_j$ (Munkres, T.16.3) implica que para todo compacto K, só uma quantidade finita de funções ϕ têm suporte que intercepta K.

Esta observação está feita no Spivak, p. 64, mas a demonstração não me parece totalmente clara. Complementando o argumento, seguimos o [Elon] ("Propriedade 2" da Seção sobre partições da unidade): para todo ponto $x \in K$ existe uma vizinhança V de x tal que o conjunto dos índices das funções ϕ cujo suporte intercepta V é finito. Como K é compacto, podemos cobrí-lo por uma quantidade finita $V1, \cdots, Vk$ de tais vizinhanças. Sejam L_i o conjunto (finito) de índices j tais que o suporte de ϕ_j intercepta Vi, e L a união de $L_1, \cdots, L_k$. Dado um índice j não pertence a L, temos que o suporte de ϕ_j não intercepta Vi, para nenhum i ($i = 1, \cdots, k$), logo, o suporte de ϕ_j não intercepta K.

A demonstração do Teorema 3-12 também usa um exercício (o 3-22 do [Spivak]), o qual foi a 4a questão da nossa 2a prova.

O TMV (Teorema 3-13 do Spivak) pode ser enunciado da seguinte maneira:

Sejam A e B abertos do $\mathbb{R}^n$, e g de A em $B = g(A)$ um difeomorfismo de classe C^1. Então, se f é uma função integrável em B, temos que a composta de f com g, $f \circ g$, é integrável em A e vale que a integral de f em B é igual a integral de $(f \circ g)|detg'|$ em A.

O difeomorfismo g pode ser chamado de uma *mudança de variáveis*. A fórmula no teorema $\int_B f = \int_A (f \circ g)|detg'|$ é conhecida como *fórmula de mudança de variáveis* e no caso $n = 1$ fica (verifique): $\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f \circ g) \cdot g'$.

A demonstração do TMV é feita por indução em n. Supomos conhecido

*Em substituição à aula de 24/5/16 devido ao bloqueio do PB o Teorema no caso $n = 1$.[†] A demonstração pode ser dividida em várias partes.

(1) Caso $f = 1$: $vol(g(A)) = \int_A |detg'|$

(2) Caso $f = 1$ e $g = T$ uma t.l.: $vol(T(A)) = |detT|vol(A)$

(3) Se o teorema vale para difeormorfismos g_1, de A em C e g_2, de C em B, então vale para a composição $g = g_1 \circ g_2$. Verifique isso usando a Regra da Cadeia.

(4) Usamos o seguinte fato importantíssimo de Álgebra Linear: toda transformação linear é uma composição de *transformações lineares elementares*, as quais são as seguintes, onde $e_1, \cdots, e_n$ denota a base canônica do $\mathbb{R}^n$:

(4.1) $T(e_i) = ce_i$, para algum i, onde c é uma constante; $T(e_j) = e_j$ para $j \neq i$

(4.2) $T(e_i) = e_j$, para algum par $i, j \neq i$; $T(e_k) = e_k$, para $k \neq i, j$

(4.3) $T(e_j) = e_i + e_j$, para algum par $i, j \neq j$; $T(e_k) = e_k$, para $k \neq j$

Verifique a fórmula $vol(T(A)) = |detT|vol(A)$ para T uma transformação linear elementar (um dos casos acima) e para $A = Q$ um retângulo em $\mathbb{R}^n$. Calcule a imagem $T(Q)$. O mais difícil é verificar a fórmula $vol(T(Q)) = |detT|vol(Q)$ para a t.l. em (4.3). (Q sendo um retângulo). Neste caso, só como um "treino", verifique primeiramente em dimensão 2 e com o retângulo sendo $Q = [0, 1]^2$. (Podemos dizer que nesse caso o problema é de Geometria Plana; cálculo da área de um parelogramo.) Para o caso geral mostre que se $Q = [a1, b1] \times \cdots \times [an, bn]$ então

$$T(Q) = \{(x', t) \equiv \sum_{k=1, k\neq i}^{n} x_k e_k + te_i; x' \in C \text{ e } p(x') \leq t \leq q(x')\}$$

onde C é o retângulo dos pontos $x' = \sum_{k=1,k\neq i}^{n} x_k e_k$ tais que $x_k \in [a_k, b_k]$, $p(x')$ é a função $p(x') = ai + xj$ e $q(x') = bi + xj$. Em seguida use o Teorema de Fubini.

(5) É suficiente demonstrar o teorema no caso $f = 1$ (ou equivalentemente $f =$constante). Isto está bem demonstrado no Spivak, p.68 ("Passo 2") no caso de B ser um retângulo. Estude esta demonstração (a demonstração desta parte). Para passar do retângulo para o caso de $B = g(A)$ (A um

[†] O aluno de graduação que não cursou Análise 2 (prerequesito não oficial para MA720, pode assumir o resultado, sem saber a demonstraçao nesse caso ($n = 1$).

aberto qualquer) usamos partição da unidade: cobrimos B por uma união de retângulos Q. A coleção $g^{-1}(Q)$ é uma cobertura aberta de A. Tome uma partição da unidade subordinada a esta cobertura e conclua o teorema a partir da caso em que B é um retângulo.

(6) Por outro lado, esta parte da demonstração (última etapa do passo (5), usando partição da unidade) também mostra que é suficiente mostrarmos o teorema localmente, ou seja, que se para todo $a \in A$ existe uma vizinhaça V em que o teorema vale para g de V em $g(V)$, então o teorema vale (para g de A em $g(A)$). Mostre isto.

(7) Seja então a um ponto em A. Devemos mostrar que existe uma vizinhança V de a tal que o teorema vale para g de V em $g(V)$, e com $f = 1$. Como já demonstramos o teorema para $g = T$ uma t.l. e $A = Q$ um retângulo e que se vale para g_1 e g_2 então vale para $g_1 \circ g_2$, podemos supor s.p.g. que $g'(a) = Id$ (identidade). Verifique isso.

(8) Agora temos uma observação bastante interessante sobre difeormosfimos (mudanças de variáveis):

Todo difeormorfismo $g = (g_1, \cdots, g_n)$ pode ser decomposto, localmente, como $g = k \circ h$, onde h é da forma $h(x) = (g_1(x), \cdots, g_{n-1}(x), x_n)$ (h fixa a última variável, i.e. pondo $h = (h_1, \cdots, h_n)$, temos que $h_n(x) = x_n$, sendo $x = (x_1, \cdots, x_n)$.) e $k(y) = (y_1, \cdots, y_{n-1}, k_n(y))$, sendo $y = (y_1, \cdots, y_n)$ (k fixa as $n-1$ primeiras variáveis). (Difeormorfismos que fixam uma variável são chamados de *primitivos*.) Mostre que $g = k \circ h$ sse $k_n(y) = g_n(h^{-1}(y))$. Definindo h e k dessas maneiras, e supondo que $g'(a) = Id$, calcule $Jh(a)$ e $Jk(h(a))$. Conclua que h e k são difeormorfismos locais (de classe C^1).

(9) Finalmente, basta demonstrar o TMV localmente, com $f = 1$, e com os difeomorfismo sendo da forma h ou k acima. Tomemos uma vizinhança de $a \in A$ como o interior de um retângulo $V = U \times [an, bn]$, onde U é um retângulo em $\mathbb{R}^{n-1}$. Mostre que $h(V) = C \times [an, bn]$, onde $C = \{(g_1(x), \cdots, g_{n-1}(x)); x \in V\}$. Daí, pelo Teorema de Fubini, temos que

$$vol(h(V)) = \int_{h(V)} 1 = \int_{an}^{bn} \int_C 1$$

Por indução, o teorema vale em dimensão $n-1$. Então, para cada x_n no intervalo $[an, bn]$, pondo $g_{x_n}(x') := (g_1(x', x_n), \cdots, g_{n-1}(x', x_n), x_n)$, para $x' \in U$, temos que que

$$\int_U |detD(g_{x_n})| = \int_{g_{x_n}(U)}$$

Integrando ambos os lados desta igualdade no intervalo $[an, bn]$, e usando o Teorema de Fubini, obtemos que

$$\int_V |detD(g_{x_n})| = \int_{an}^{bn} \int_{g_{x_n}(U)} = \int_{an}^{bn} \int_{C'} 1_{g_{x_n}(U)}$$

onde C' é um retângulo contendo C. Finalmente, mostre que a última integral é a igual a $vol(h(V))$ e que $detD(g_{x_n})(x') = detDh(x', xn)$ para todo $x = (x', xn) \in V$.

Para o difeomorfismo k, como no [Spivak], deixamos a demonstração a cargo do aluno. (Segundo o [Spivak] este caso é mais simples.)

Exemplo (uma aplicação; exercício 19.6 do Munkres) - volume da bola unitária B^n do $\mathbb{R}^n$ (clique aqui).

Exercícios (parte da Lista de Exercícios para a 3a prova): 3-40 e 3-41 do Spivak, e, 19-1 a 4 do Munkres.