NOTAS SOBRE OS ESPAÇOS DE BESOV E A EQUAÇÃO DE VLASOV–POISSON

Marcelo M. Santos
IMECC–UNICAMP

E-mail: msantos@ime.unicamp.br

1 Introdução

Nestas notas faremos uma breve introdução aos espaços de Besov $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ seguindo a referência [19]. O nosso propósito é dar uma noção sobre os mesmos, enunciando resultados e dando algumas demonstrações. Essencialmente todas as demonstrações podem ser obtidas em [19]; v. também [20] e [3]. Uma das nossas motivações para estudar os espaços de Besov é a equação de Vlasov–Poisson.

A equação (ou sistema) de Vlasov–Poisson é a seguinte:

$$f_t + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \gamma \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0. \tag{1}$$

Aqui, $f = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \geq 0$, $t > 0$, $\mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\gamma = 1$ ou $\gamma = -1$, e $\mathbf{E}$ é um campo de forças do *tipo gravitacional* ($\gamma = -1$) *ou eletrostático* ($\gamma = 1$) o qual está especificado na Seção 4. A nossa referência básica para (1) é o livro de Robert T. Glassey [9]. Esta equação aparece em Mecânica Estatística. Ela pode modelar um conjunto de partículas massivas interagindo pela ação gravitacional ($\gamma = -1$) ou um gás ionizado ($\gamma = 1$), supondo em ambos os casos a ausência de colisões. No caso de presença de colisões, ela fica não–homogênia, i.e. com o lado direito da mesma diferente de zero, ou melhor, neste caso temos a famosa equação de Boltzmann; v. e.g. [4].

Outras motivações são as seguintes:

1. Para $s > 0$ não inteiro, os espaços de Besov $\mathcal{B}^s_{p,p}$ coincidem com os espaços de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. Em particular, os espaços de Besov $\mathcal{B}^s_{p,p}$ é uma alternativa para definir os espaços de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ de índice fracionário.

2. Os espaços de Besov são espaços naturais para estimativas de convergência de soluções aproximadas de equações diferenciais [2].

3. Interesse dos mesmos em equações elípticas [8].

A aplicação dos espaços de Besov à equação (1) provém de resultados de regularidade, como o seguinte teorema de DiPerna–Lions–Meyer (1991):

Teorema 1 [5] *Sejam f e $g \in L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ satisfazendo a equação*

$$\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f = g, \quad \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

onde $1 < p \leq 2$. Se $\overline{f}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}, \mathbf{v})\Psi(\mathbf{v})d\mathbf{v}$, com $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (arbitrária), então $\overline{f} \in \mathcal{B}^s_{p,2}(\mathbb{R}^n)$,onde $s = 1/p'$(p' é o expoente conjugado de p,i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$).

Este teorema dá uma regularidade que pode ser chamada de *regularidade de média de velocidade*, uma vez que fisicamente $\mathbf{v}$ representa uma velocidade e $\overline{f}$ é definida integrando-se em relação a $\mathbf{v}$. Em [5] encontramos outros resultados de regularidade de média de velocidade. O termo $\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f$ é, a menos de f_t, a parte linear na equação (1), logo podemos esperar uma regularidade nas soluções da equação (1). Fazendo uma pequena adaptação da demonstração [5] do Teorema 1, temos a seguinte versão 'no infinito' do mesmo, cuja idéia da demonstração damos na Seção 3:

Teorema 2 *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 1, se*

$$\overline{f}_\infty(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{|\mathbf{v}| \geq K} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} d\mathbf{v},$$

$K > 0$ (arbitrário) e f, g, $|\mathbf{v}|^{\beta/p} f$, $|\mathbf{v}|^{\beta/p} g \in L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, sendo $\beta > n - 1$, então $\overline{f}_\infty \in \mathcal{B}^s_{p,2}(\mathbb{R}^n)$ onde também $s = 1/p'$.

Estas notas estão divididas em cinco seções. Na Seção 2 fazemos nossa exposição sobre os espaços de Besov $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. A Seção 3 contém a idéia da demonstração do Teorema 2. Na Seção 4 damos uma idéia da demonstração do Teorema de Horst–Hunze sobre a existência de solução da equação (1) com uma simplificação em relação à demonstração original em [12] devida a H.N. Lopes e M.C.Lopes [14].

Elas constituem um mini-curso que foi ministrado inicialmente na Escola de Verão da UFPB em 1997, sob a coordenação dos Profs. Aldo Maciel e Marivaldo Matos, a quem agradecemos pela oportunidade e motivação. Agora temos novamente a grata satisfação de repetir o mesmo a convite do Prof. João Marcos Bezerra do Ó que demonstrou interesse no assunto e nos apontou a

referência [8], o que é um grande estímulo para nós e a quem estendemos os nossos agradecimentos, bem como a todo o Departamento de Matemática da UFPB.

A origem das mesmas e o nosso interesse e aprendizagem no assunto devem-se a um trabalho iniciado com os professores H.N. Lopes, J. Soler e M.C. Lopes. Especialmente a abordagem dada no Capítulo 4 foi apreendida de discussões com H.N. Lopes e M.C. Lopes.

João Pessoa, Janeiro de 2003.

2 Os espaços de Besov no $\mathbb{R}^n$

Nesta seção definimos os espaços de Besov no $\mathbb{R}^n$, denotados por $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, e apresentamos resultados básicos sobre os mesmos. A nossa referência é o livro de H. Triebel [19]. Damos algumas demonstrações que esperamos passarem uma idéia natural da construção e de como lidar com estes espaços. Essencialmente todas podem ser obtidas em [19]; v. também [20] e [3].

Admitimos uma certa familiaridade do leitor com a teoria das distribuições temperadas de Schwartz, denotadas por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, com os espaços de Sobolev de índice natural, $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, com os espaços de Sobolev de índice real modelados no L^2, $\mathrm{H}^s(\mathbb{R}^n)$, e com alguns elementos de Análise Funcional. Admitimos uma boa familiaridade com a transformada de Fourier. Três boas referências para esses tópicos são os livros de M. Reed e B. Simon[17], R. Adams[1] e R. Iório[13] (recomendamos também [18, Capítulo 1] para uma rápida exposição sobre as distribuições temperadas e os espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$). No Apêndice damos alguns resultados e idéias básicas que usaremos com freqüência.

Para motivar a definição dos espaços de Besov $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ começamos lembrando a definição dos espaços de Sobolev $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ com índice natural m e $1 < p < \infty$:

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); ||f||_{W^{m,p}} < \infty\}$$

onde

$$||f||_{W^{m,p}} \stackrel{\text{def}}{=} (\sum_{|\alpha|\leq m} ||D^\alpha f||^p_{L^p(\mathbb{R}^n)})^{1/p}.$$

Em particular,

$$H^m(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} W^{m,2}(\mathbb{R}^n).$$

Devido à relação $\mathcal{F}(D^\alpha f) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}f$, onde $\mathcal{F}$ denota a transformada de Fourier, e à identidade de Parseval, temos que (Teorema 18 no Apêndice)

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); ||f||_{H^m} \stackrel{\text{def}}{=} ||\mathcal{F}^{-1}(1+|\xi|^2)^{k/2}\mathcal{F}f||_{L^2} < \infty\} \tag{3}$$

e as normas $||\cdot||_{W^{m,2}}$ e $||\cdot||_{H^m}$ são equivalentes. Em (3) faz sentido tomar $m = s \in \mathbb{R}$. Fazendo isto, obtemos (por definição) os espaços de Sobolev com índice real s qualquer, modelados no L^2. Outra generalização de (3) é obtida substituindo-se o L^2 pelo L^p, o que dá origem aos espaços de Lebesgue:

$$H^s_p(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); ||f||_{H^s_p} \stackrel{\text{def}}{=} ||\mathcal{F}^{-1}(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}f||_{L^p} < \infty\}$$

Observação 1 *Temos a igualdade $H^m_p = W^{m,p}$ entre os espaços de Lebesgue e de Sobolev para qualquer m natural [19, p.169].*

Acontece que a norma $||\cdot||_{H_p^s}$ é equivalente à seguinte norma em $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ [19, Teorema 2.3.3,p.177]:

$$||f||_{F_{p,2}^s} \stackrel{\text{def}}{=} \inf || \left(\sum_{j=0}^{\infty} (2^{sj}|a_j|)^2 \right)^{1/2} ||_{L^p} \tag{4}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as decomposições

$$f \stackrel{\mathcal{S}'}{=} \sum_{j=0}^{\infty} a_j, \qquad \operatorname{spt} \mathcal{F} a_j \subset M_j, \tag{5}$$

sendo

$$M_j \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi \in \mathbb{R}^n; 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}\}, \quad j = 1, 2, \cdots$$

$$M_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi \in \mathbb{R}^n; |\xi| \leq 2\}.$$

Observemos que outra maneira (uma maneira conveniente) de escrevermos (4) é a seguinte:

$$||f||_{F_{p,2}^s} \stackrel{\text{def}}{=} \inf || \, ||(2^{sj}|a_j|)||_{l^2} \, ||_{L^p} < \infty\} \tag{6}$$

onde

$$l_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_j); x_j \in \mathbb{R}, \; ||\,(x_j)\,||_{l_2} \stackrel{\text{def}}{=} (\sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^2)^{1/2} < \infty\}.$$

Mais geralmente, temos os espaços

$$l_q \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_j); x_j \in \mathbb{R}, \; ||\,(x_j)\,||_{l_q} \stackrel{\text{def}}{=} (\sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^q)^{1/q} < \infty\}$$

para $1 \leq q \leq \infty$ e

$$l_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_j); x_j \in \mathbb{R}, \; ||\,(x_j)\,||_{l_\infty} \stackrel{\text{def}}{=} (\sup_j |x_j|) < \infty\}.$$

Uma generalização de (4) ou, equivalentemente (6), é obtida substituindo l_2 por l_q, o que dá origem aos espaços $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ (conhecidos como espaços de Triebel–Lizorkin):

$$F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); ||f||_{F_{p,q}^s} \stackrel{\text{def}}{=} \inf || \, ||(2^{sj}|a_j|)||_{l^q} \, ||_{L^p} < \infty\}. \tag{7}$$

Finalmente, trocando a ordem de l_q e L_p em (7) chegamos à definição dos espaços de Besov em $\mathbb{R}^n$. Precisamente, temos:

Definição 1 *Para $-\infty < s < \infty$, $1 < p < \infty$ e $1 \le q \le \infty$, definimos*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \ ; \quad & f \stackrel{\mathcal{S}'}{=} \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} a_j, \quad spt\,\mathcal{F}a_j \subset M_j \\ & e \quad ||(a_j)||_{l^s_q(L_p)} \stackrel{\text{def}}{=} ||\ (2^{sj}||a_j||_{L^p})\ ||_{l_q} < \infty\}\end{aligned}$$

munido da norma

$$||f||_{\mathcal{B}^s_{p,q}} \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\left\{\begin{array}{l} f = \sum a_j \\ spt\,\mathcal{F}a_j \subset M_j \end{array}\right.} ||\ (2^{sj}||a_j||_{L^p})\ ||_{l_q}.$$

Feita a definição dos espaços de Besov, devemos ver as suas propriedades. Aqui, veremos algumas básicas. A primeira que veremos é que eles contêm os espaços das funções rapidamente decrescentes $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, Teorema 3 abaixo. A demonstração deste resultado nos dará uma idéia sobre a construção e uma certa familiaridade na lida dos mesmos.

Teorema 3 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *com a inclusão contínua.*

Demonstração: Seja θ uma função em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\operatorname{spt}\theta \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n; 2^{-1} \le |\xi| \le 2\}, \quad \theta(\xi) > 0 \ \text{ se } \ \frac{1}{\sqrt{2}} \le |\xi| \le \sqrt{2}$$

$$\text{e} \quad 0 \le \theta(\xi) \le c \stackrel{\text{def}}{=} \min_{\frac{1}{\sqrt{2}} \le |\xi| \le \sqrt{2}} \theta(\xi), \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n\,;\, |\xi| > \sqrt{2} \ \text{ ou } \ |\xi| < \tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

Definamos $\theta_k(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \theta(2^{-k}\xi)$, $k = 1, 2, \cdots$. Observamos que $\sum_{k=1}^\infty \theta_k(\xi) < \infty$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $\sum_{k=1}^\infty \theta_k(\xi) \ge c$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ tal que $|\xi| \ge \sqrt{2}$. De fato, se $|\xi| \le 1$ então $\sum_{k=1}^\infty \theta_k(\xi) = 0 < \infty$; se $1 < |\xi| \le 2$ então $\sum_{k=1}^\infty \theta_k(\xi) = \theta_1(\xi) < \infty$ (notemos que $\theta_1(\xi) = \theta(\xi/2) \ge c$ para $\sqrt{2} \le |\xi| \le 2$); e se $|\xi| > 2$ então existe um único $l \in \{2, 3, \cdots\}$ tal que $2^{l-1} < |\xi| \le 2^l$, logo $\sum_{k=1}^\infty \theta_k(\xi) = \theta_{l-1}(\xi) + \theta_l(\xi) = \theta(\frac{\xi}{2^{l-1}}) + \theta(\frac{\xi}{2^l}) \ge c$ visto que $\frac{|\xi|}{2^l}$ ou $\frac{|\xi|}{2^{l-1}}$ pertence ao intervalo $[1/\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Agora seja $\theta_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\operatorname{spt}\theta_0 \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n\,;\, |\xi| \le 2\}$, $\theta_0 \ge 0$ e $\theta_0(\xi) \ge c$ se $|\xi| \le \sqrt{2}$. Então $\sum_{k=0}^\infty \theta_k(\xi) \ge c$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, logo podemos definir uma função φ_j pela equação

$$\hat{\varphi}_j = (2\pi)^{-n/2}(\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k)^{-1}\theta_j, \quad j = 0, 1, 2, \cdots$$

Observamos que $\varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ já que $\theta_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, logo $f * \varphi_j \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ para quaisquer $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $j = 0, 1, 2, \cdots$. Afirmamos que

$$f \stackrel{\mathcal{S}'}{=} \sum_{j=0}^{\infty} f * \varphi_j, \quad \forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \tag{8}$$

ou seja,

$$\begin{array}{rcl}\hat f & \overset{\mathcal{S}'}{=} & \sum_{j=0}^{\infty}(2\pi)^{n/2}\hat\varphi_j \hat f \\ & = & \sum_{j=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{\infty}\theta_k)^{-1}\theta_j\, \hat f, \quad \forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).\end{array} \tag{9}$$

Para provarmos (9), definimos

$$\varphi_N = \sum_{j=0}^{N}\theta_j / \sum_{j=0}^{\infty}\theta_j.$$

Observamos que (9) é conseqüência de

$$\varphi\varphi_N \underset{N\to\infty}{\overset{\mathcal{S}}{\longrightarrow}} \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tag{10}$$

o que passamos a provar. Temos que $\varphi_N(\xi) = 1$ se $|\xi| \le 2^N$, $\varphi_N(\xi) = 0$ se $|\xi| \ge 2^{N+1}$ e

$$\varphi_N(\xi) = \frac{\theta_N(\xi)}{\theta_N(\xi) + \theta_{N+1}(\xi)} = \frac{\theta(\xi/2^N)}{\theta(\xi/2^N) + \theta(\xi/2^{N+1})}$$

se $2^N < |\xi| < 2^{N+1}$ e $N \ge 1$, ou melhor, nestas últimas condições temos $\varphi_N(\xi) = \psi(\xi/2^N)$, onde

$$\psi(\xi) \overset{\text{def}}{=} \frac{\theta(\xi)}{\theta(\xi) + \theta(\xi/2)}.$$

Daí, dados quaisquer multi-índices α, β, sendo $\beta \ne 0$, temos:

$$\begin{array}{rl} & \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha(\varphi\varphi_N - \varphi)(\xi)| = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha\varphi(\xi)(\varphi_N(\xi) - 1)| \\ \le & \sup_{|\xi|>2^N} |\xi^\alpha\varphi(\xi)| \longrightarrow_{(N\to\infty)} \;0;\end{array}$$

e

$$\begin{array}{c}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha D^\beta(\varphi\varphi_N - \varphi)(\xi)| \le \sup_{|\xi|>2^N} |\xi^\alpha(D^\beta\varphi)(\xi)(\varphi_N(\xi) - 1)| \\ + \sum_{1<|\gamma|\le\beta} c_\gamma \sup_{2^N<|\xi|<2^{N+1}} |\xi^\alpha(D^{\beta-\gamma}\varphi)(\xi)(D^\gamma\varphi_N)(\xi)| \\ = \sup_{|\xi|>2^N} |\xi^\alpha(D^\beta\varphi)(\xi)| \\ + \sum_{1<|\gamma|\le\beta} c_\gamma \sup_{2^N<|\xi|<2^{N+1}} |\xi^\alpha(D^{\beta-\gamma}\varphi)(\xi)\frac{1}{2^{N|\gamma|}}(D^\gamma\psi)(\frac{\xi}{2^N})| \\ \le \sup_{|\xi|>2^N} |\xi^\alpha(D^\beta\varphi)(\xi)| \quad + \sum_{1<|\gamma|\le\beta} \frac{c_\gamma}{2^{2|\gamma|}} ||D^\gamma\psi||_\infty \sup_{|\xi|>2^N} |\xi^\alpha(D^{\beta-\gamma}\varphi)(\xi)| \\ \longrightarrow_{(N\to\infty)} \quad 0.\end{array}$$

Acabamos de provar (10), logo (8).

Pela definição de φ_j e pela fórmula (40) do Apêndice, é óbvio que spt $\mathcal{F}(f * \varphi_j) \subset M_j$. Então agora é suficiente mostrar que existe uma constante c tal que

$$||\,(2^{sj}||f * \varphi_j||_{L^p})\,||_{l_q} \le c \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} ||\xi^\alpha D^\beta \widehat{f}||_{L^\infty} \tag{11}$$

para algum $m \in \mathbb{N}$, para toda função f em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. (Lembramos que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Fréchet com a família de semi-normas $||f||_{\alpha,\beta} \stackrel{\text{def}}{=} ||x^\alpha D^\beta f||$, e que a transformada de Fourier é um isomorfismo em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.) A fim de mostrar (11), temos as seguintes estimativas (cf. [19, p.175]):

$$
\begin{array}{ll}
& 2^{sj}||f * \varphi_*||_{L^p} = 2^{sj}||\mathcal{F}^{-1}((2\pi)^{n/2}\hat{f}\hat{\varphi}_j)||_{L^p} \\
\leq & c_1 2^{sj}||(1+|x|^2)^n \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}\hat{\varphi}_j)||_{L^\infty} \\
& (\text{onde } c_1 = (2\pi)^{-n/2}||(1+|x|^2)^{-n}||_{L\ p}) \\
\leq & c_1 2^{sj} \sum_{|\alpha|\leq 2n} ||x^\alpha \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}\hat{\varphi}_j)||_{L^\infty} \\
& (\text{visto que } (1+|x|^2)^n = (1+x_1^2+\cdots+x_n^2)^n \leq \sum_{|\alpha|\leq 2n}|x^\alpha|) \\
= & c_1 2^{sj} \sum_{|\alpha|\leq 2n} ||\mathcal{F}^{-1}(D^\alpha(\widehat{f}\widehat{\varphi_j}))||_{L^\infty} \\
\leq & c_2 2^{sj} \sum_{|\alpha|\leq 2n} ||D^\alpha(\hat{f}\hat{\varphi}_j)||_{L^1} \\
\leq & c_3 2^{sj} \sum_{|\alpha|\leq 2n} ||(1+|\xi|^2)^n D^\alpha(\hat{f}\hat{\varphi}_j)||_{L^\infty} \\
\leq & c_4 \left[\sum_{|\alpha|\leq 2n} ||(1+|\xi|^2)^{n+\sigma} D^\alpha \hat{f}||_{L^\infty}\right] \\
& \cdot \left[\sum_{|\alpha|\leq 2n} ||(1+|\xi|^2)^{s-\sigma} D^\alpha \hat{\varphi}_j||_{L^\infty}\right],
\end{array}
\tag{12}
$$

se $s \geq 0$ (para o caso $s < 0$, tomamos a última desigualdade sem o s) onde σ será escolhido abaixo e usamos o seguinte:

$$D^\alpha(fg) = \sum_{|\gamma|\leq 2n} c_\gamma (D^\gamma f)(D^{\alpha-\gamma} g),$$

logo

$$\sum_{|\alpha|\leq 2n} D^\alpha(fg) \leq c[\sum_{|\alpha|\leq 2n} D^\alpha f] \cdot [\sum_{|\alpha|\leq 2n} D^\alpha g];$$

e, como $\operatorname{spt}\widehat{\varphi_j} \subset M_j$, temos

$$
\begin{array}{ll}
& 2^{sj}||(1+|\xi|^2)^{-\sigma} D^\alpha \hat{\varphi}_j||_\infty \\
= & 2^{sj} \sup_{\xi\in M_j} |(1+|\xi|^2)^{-\sigma} D^\alpha \hat{\varphi}_j(\xi)| \\
\leq & \sup_{\xi\in M_j} |(1+|\xi|^2)^{s-\sigma} D^\alpha \hat{\varphi}_j(\xi)|,
\end{array}
\tag{13}
$$

pois para $j = 0$ temos $2^{sj} = 1 \leq (1+|\xi|^2)^s \ \ (s \geq 0)$ e para $j \geq 1$ temos

$$
\begin{array}{c}
\xi \in M_j \ \Rightarrow \ 2^{j-1} \leq |\xi| \ \Rightarrow \ 2^{2(j-1)} \leq |\xi|^2 \\
\Rightarrow \ 2^j \leq 1 + 2^{2(j-1)} \leq 1 + |\xi|^2 \Rightarrow 2^{sj} \leq (1+|\xi|^2)^s;
\end{array}
$$

agora, vamos estimar $||D^\alpha \widehat{\varphi_j}||_\infty$, $j \geq 1$:

$$\widehat{\varphi_j}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \theta(\frac{\xi}{2^j}) \,/\, \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k(\xi),$$

logo $\hat{\varphi}_j(\xi) = 0$ se $\xi \notin M_j$ e $\hat{\varphi}_j(\xi) = \beta(\frac{\xi}{2^j})$ se $\xi \in M_j$, onde

$$\beta(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} (2\pi)^{-n/2} \frac{\theta(\xi)}{\tilde{\theta}(\xi) + \theta(\xi) + \theta(\xi/2)},$$

sendo $\tilde{\theta}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \theta_0(\xi)$ se $j = 1$ e $\tilde{\theta}(\xi) = \theta(2\xi)$ se $j \geq 2$; daí obtemos

$$(D^\alpha \widehat{\varphi_j})(\xi) = \frac{1}{2^{j|\alpha|}} (D^\alpha \beta)(\xi/2^j)$$

se $\xi \in M_j$ e zero, caso contrário, logo,

$$||D^\alpha \widehat{\varphi_j}||_\infty \leq \frac{1}{2^{j|\alpha|}} ||D^\alpha \beta||_\infty; \tag{14}$$

de (12), (13) e (14), obtemos

$$\begin{aligned} ||\,(2^{sj}||f * \varphi_j||_{L^p})\,||_{l_q} \leq \;& c_5[\textstyle\sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} ||\xi^\alpha D^\beta \widehat{f}||_{L^\infty}] \\ & ||\,(2^{2(s-\sigma)j} \textstyle\sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{2^{j|\alpha|}})\,||_{l_q} \\ \leq \;& c \textstyle\sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} ||\xi^\alpha D^\beta \widehat{f}||_{L^\infty} \end{aligned}$$

com $c = c_5||\,(2^{2(s-\sigma)j} \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{2^{j|\alpha|}})\,||_{l_q} < \infty$ para $\sigma > s$ e m suficientemente grande; portanto, concluímos que

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \tag{15}$$

com a inclusão contínua, para quaisquer $s \in \mathbb{R}$ e $p \in (1, \infty)$. ■

Observação 2 *Seja $N \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$). A seqüência $(\varphi_j)_{j=0}^\infty$ construída na demonstração do Teorema 3 satisfaz as seguintes propriedades com $N = 1$ (cf. [19, p.171]):*

1. $\varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\hat{\varphi}_j \geq 0$ para $j = 0, 1, 2, \cdots$
2. $\operatorname{spt} \hat{\varphi}_j \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n; 2^{j-N} \leq |\xi| \leq 2^{j+N}\}$ para $j = 1, 2, \cdots$ e $\operatorname{spt} \hat{\varphi}_0 \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n; |\xi| \leq 2^N\}$;
3. Existe uma constante positiva c tal que $\sum_{j=0}^\infty \hat{\varphi}_j(\xi) \geq c$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$;
4. Para todo multi-índice α, existe uma constante c_α tal que

$$|(D^\alpha \hat{\varphi}_j)(\xi)| \leq \frac{c_\alpha}{|\xi|^\alpha}$$

   para $j = 1, 2, \cdots$

Teorema 4 [19, p. 172] *Sejam $s \in \mathbb{R}$, $p \in (1,\infty)$ e $q \in [1,\infty]$. Para qualquer seqüência (φ_j) que satisfaça as condições 1-4 da Observação acima, temos que*

$$\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); ||f||^*_{\mathcal{B}^s_{p,q}} \overset{\text{def}}{=} ||(f * \varphi_j)||_{l^s_q(L^p)} < \infty\},$$

onde $||(f*\varphi_j)||_{l^s_q(L^p)} \overset{\text{def}}{=} ||(2^{sj}||f*\varphi_j||_{L^p})||_{l_q}$. Além disso, $||\cdot||_{\mathcal{B}^s_{p,q}}$ e $||\cdot||^*_{\mathcal{B}^s_{p,q}}$ são normas equivalente em $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 5 *Para $s \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ $1 < p < \infty$ e $1 \le q_1 \le q_2 \le \infty$, temos*

$$\begin{array}{l} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}^{s+\epsilon}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}^s_{p,q_1}(\mathbb{R}^n) \\ \subset \mathcal{B}^s_{p,q_2}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}^{s-\epsilon}_{p,1}(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

com todas as inclusões contínuas.

Demonstração: A primeira inclusão é dada pelo Teorema 3. Para a segunda, dada qualquer decomposição $f = \sum a_j \in \mathcal{B}^{s+\epsilon}_{p,\infty}$, temos

$$\begin{array}{rl} ||f||_{\mathcal{B}^s_{p,1}} = & ||(2^{sj}||a_j||)_{L^p}||_{l_1} = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{sj}||a_j||_{L^p} \\ \le & (\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\epsilon j})||(2^{(s+\epsilon)j}||a_j||_{L^p})||_{l^\infty} \end{array}$$

logo

$$||f||_{\mathcal{B}^s_{p,1}} \le c||f||_{\mathcal{B}^{s+\epsilon}_{p,\infty}}. \tag{16}$$

Agora, vejamos que

$$\mathcal{B}^s_{p,q_1}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}^s_{p,q_2}(\mathbb{R}^n) \tag{17}$$

com a inclusão contínua, para quaisquer $s \in \mathbb{R}$, $p \in (1,\infty)$ e $q_1 \le q_2$ em $[1,\infty]$: Se $f = \sum a_j \in \mathcal{B}^s_{p,q_1}$ então $(2^{sj}||a_j||_{L^p}) \in l_{q_1}$; como $l_{q_1} \subset l_{q_2}$ com a inclusão contínua, segue-se o resultado. A última inclusão é um caso particular da segunda. ■

Observação 3 *É imediato da Definição 1, que também vale a inclusão contínua*

$$\mathcal{B}^{s_1}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}^{s_2}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$$

sempre que $s_2 \le s_1$.

Observação 4 Aproveitando o enunciado do Teorema 4, demos a definição da norma $||\cdot\ ||_{l_q^s(L^p)}$. Na verdade, temos os espaços

$$l_q^s(L^p) \stackrel{\text{def}}{=} \{(a_j)_{j=0}^\infty; a_j \in L^p \text{ e } (2^{sj}||a_j||_{L^p}) \in l_q\}$$

com a norma (repetindo a definição dada no Teorema 4)

$$||(a_j)||_{l_q^s(L^p)} \stackrel{\text{def}}{=} ||(2^{sj}||a_j||_{L^p})||_{l_q}.$$

Mais geralmente, dada uma seqüência de espaços de Banach $(A_j)_{j=0}^\infty$, podemos definir o espaço

$$l_q(A_j) \stackrel{\text{def}}{=} \{(a_j)_{j=0}^\infty; a_j \in A_j \text{ e } (||a_j||_{A_j}) \in l_q\}$$

munido da norma

$$||(a_j)||_{l_q(A_j)} \stackrel{\text{def}}{=} ||\,(||(a_j)||_{A_j})\,||_{l_q}.$$

Pode-se provar que $l_q(A_j)$ é um espaço de Banach, para todo $q \in [1,\infty]$. Notemos que $l_q^s(L^p) = l_q(A_j)$ para $A_j = L^p$ munido da norma $||f||_{A_j} = 2^{sj}||f||_{L^p}$.

Usando o Teorema 4, com a ajuda do Lema elementar de Análise Funcional abaixo, podemos demonstrar facilmente que os espaços de Besov são espaços de Banach, Teorema 6 abaixo.

Lema 1 *Sejam A um espaço vetorial normado e B um espaço de Banach. Se existem operadores lineares limitados $\mathcal{R} : B \to A$ e $\mathcal{T} : A \to B$ tais que $\mathcal{RT} = I_A$ (operador indentidade em A)[1] então A também é um espaço de Banach.*

Demonstração: Se (x_j) é uma seqüência de Cauchy em A então $(\mathcal{T}x_j)$ também é uma seqüência de Cauchy, em B. Como B é um espaço de Banach, existe $y \in B$, $y = \lim \mathcal{S}x_j$. Daí, $x_j = \mathcal{RT}x_j \longrightarrow \mathcal{R}y \in A$. ■

Teorema 6 *Todo espaço de Besov $\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Sejam (φ_j) e (ψ_j) duas seqüências satisfazendo 1-4 da Observação 2 com $N = 1$ tais que $\sum_{j=0}^\infty \widehat{\varphi_j} = (2\pi)^{-n}$ e $\widehat{\psi_j}\,|\,\mathrm{spt}\,\widehat{\varphi_j} = 1$ (cf. demonstração do Teorema 3). Vamos aplicar o Lema 1 tomando $A = \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, $B = l_q^s(L^p)$ e, $\mathcal{R}$ e $\mathcal{T}$, os seguintes operadores:

$$\mathcal{R}\left((a_j)\right) = \sum_{j=0}^\infty \psi_j * a_j$$

[1]Operadores como estes são chamados, respectivamente, de retração e co-retração [19, p.22]

$$\mathcal{T}(f) = (f * \varphi_j).$$

Para verificarmos que $\mathcal{R}$ está bem definido como um operador linear limitado do $l_q^s(L^p)$ no $\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, fazemos a seguinte estimativa, onde $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rl} & \left|\langle\sum_{j=0}^N \psi_j * a_j, \varphi\rangle\right| = \left|\sum_{j=0}^N \langle a_j, \widetilde{\psi_j} * \varphi\rangle\right| \\ & (\text{onde } \widetilde{\psi_j} = \psi_j(-x)) \\ \leq & \sum_{j=0}^N ||a_j||_{L^p} ||\widetilde{\psi_j} * \varphi||_{L^{p'}} \\ = & \sum_{j=0}^N (2^{sj}||a_j||_{L^p})(2^{-sj}||\widetilde{\psi_j} * \varphi||_{L^{p'}}) \\ \leq & \left(\sum_{j=0}^N (2^{sj}||a_j||_{L^p})^q\right)^{1/q} \left(\sum_{j=0}^N (2^{-sj}||\widetilde{\psi_j} * \varphi||_{L^{p'}})^{q'}\right)^{1/q'} \\ \leq & ||(a_j)||_{l_q^s(L^p)}\, ||\varphi||_{\mathcal{B}_{p',q'}^{-s}}. \end{array} \tag{18}$$

Isto prova que existe o limite

$$\langle \mathcal{R}((a_j)), \varphi\rangle \overset{\text{def}}{=} \lim_{N\to\infty} \langle \sum_{j=0}^N \psi_j * a_j, \varphi\rangle, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

e também que $\mathcal{R}((a_j)) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, visto que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}_{p',q'}^{-s}$ com a inclusão contínua (Teorema 3).

Pelo Teorema 4, $\mathcal{T}$ é um operador linear limitado de $\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ em $l_q^s(L^p)$. Além disso, $\mathcal{R}\mathcal{T} = I_{\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}$, pois

$$\begin{array}{rl} \mathcal{F}\mathcal{R}\mathcal{T}(f) = & \sum_{j=0}^\infty (2\pi)^n \hat{\psi}_j \hat{f} \hat{\varphi}_j = (2\pi)^n (\sum_{j=0}^\infty \hat{\varphi}_j) \hat{f} \\ = & \mathcal{F} f, \end{array}$$

onde usamos que $\widehat{\psi_j}\,|\,\text{spt}\,\widehat{\varphi_j} = 1$.■

Observação 5 *A estimativa (18) dá uma indicação do dual de $\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$. De fato, temos $(\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n))' = \mathcal{B}_{p',q'}^{-s}(\mathbb{R}^n)$, para todo $(s,p,q) \in \mathbb{R} \times (1,\infty) \times [1,\infty]$ [19, p.198]. Devido a este resultado, no estudo dos espaços de Besov, podemos muitas vezes nos restringir ao caso $s \geq 0$.*

Observação 6 [19, p.180] *Valem as seguintes inclusões contínuas:*

$$W^{s+\epsilon,p}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \subset W^{s-\epsilon,p}(\mathbb{R}^n),$$

$$H_p^{s+\epsilon}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \subset H_p^{s-\epsilon}(\mathbb{R}^n),$$

para todo $(s,p,q,\epsilon) \in \mathbb{R} \times (1,\infty) \times [1,\infty] \times (0,\epsilon)$.

A seguir vamos dissertar um pouco sobre a teoria da interpolação abstrata com o objetivo de concluir que os espaços de Besov $\mathcal{B}_{p,q}^s$ de fato coincidem com os espaços de Sobolev $W^{s,p}$ para $s > 0$ não-inteiro[2] e $p = q$, onde estes últimos são definidos da seguinte maneira:

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \{ f \in W^{[s],p}(\mathbb{R}^n);$$
$$||f||_{W^{s,p}} \stackrel{\text{def}}{=} ||f||_{W^{m,p}} + \sum_{|\alpha|=[s]} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|^p}{|x-y|^{n+\{s\}p}} dxdy \right)^{1/p} < \infty \} \tag{19}$$

onde $s \in (0, \infty)/\mathbb{N}$, $[s]$ é o maior inteiro menor do que s e $\{s\} = s - [s]$. Cf. [19, p.190], [1, p.214] ou [16, p.342].

Em primeiro lugar observamos que existem vários métodos de interpolação. Estes podem ser classificados em duas categorias distintas: os métodos de interpolação "real" e os "complexos"} [19, 3]. Aqui estamos interessados apenas num método de interpolação: o método real conhecido como *método K*.

A teoria da interpolação consiste em achar um "espaço de interpolação" em relação a dois espaços de Banach A_0, A_1 contidos num espaço vetorial de Hausdorff $\mathcal{A}$. Por *espaço de interpolação* entendemos um espaço de Banach $\{A_0, A_1\}$ que satisfaça as seguintes condições:

(a) $A_0 \cap A_1 \subset \{A_0, A_1\} \subset A_0 + A_1$ ($A_0 + A_1 = \{a \in \mathcal{A}; a = a_0 + a_1$ com $a_i \in A_i$, $i = 0, 1\}$ e $||a||_{A_0+A_1} = \inf_{a=a_0+a_1}(||a_0||_{A_0} + ||a_1||_{A_1})$);

(b) Se B_0 e B_1 são também espaços de Banach contidos em $\mathcal{A}$ e se um operador linear T de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}$ satisfaz $T \in L(A_i, B_i)$ [3], $i = 0, 1$, então $T \in L(\{A_0, A_1\}, \{B_0, B_1\})$ e

$$||T||_{\{A_0,A_1\},\{B_0,B_1\}} \leq ||T||^{1-\theta}_{A_0,B_0} ||T||^{\theta}_{A_1,B_1}$$

para algum $\theta \in [0, 1]$.

O método K deve-se a J.Peetre e começa pela definição do funcional K: Dados A_0, A_1 espaços de Banach contidos num espaço de Hausdorff $\mathcal{A}$, definimos, para $0 < t < \infty$, o funcional

$$K(t, a) \equiv K(t, a; A_0, A_1) = \inf_{\substack{a = a_0 + a_1 \\ a_i \in A_i}} (||a_0||_{A_0} + t||a_1||_{A_1}), \quad a \in \mathcal{A}$$

e para $0 < \theta < 1$ e $1 \leq q \leq \infty$, o espaço

$$\begin{aligned} (A_0, A_1)_{\theta,q} = \{ \quad & a \in A_0 + A_1; \\ & ||a||_{(A_0,A_1)_{\theta,q}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_0^\infty [t^{-\theta} K(t, a)]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty, \quad \text{se } q < \infty \quad \text{e} \\ & ||a||_{(A_0,A_1)_{\theta,\infty}} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{0<t<\infty} t^{-\theta} K(t, a) < \infty, \quad \text{se } q = \infty \}. \end{aligned}$$

[2] Os espaços $W^{s,p}$ para s não-inteiro foram introduzidos por Aronszajn (1995), Slobodeckij (1958) e Gagliardo (1958) [2].

[3] Operador linear limitado do A_i no B_i.

Então temos o seguinte teorema:

Teorema 7 [19, p.25] *O espaço $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ é um espaço de interpolação.*

Um fato interessante dos espaços $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ é o seguinte resultado, um caso particular do Teorema de Convexidade de Riesz–Thorin (v. Apêndice, Teorema 19):

Teorema 8 [19, p.128] *Para qualquer espaço de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$ σ-finito e quaisquer $p_0, p_1 \in [1, \infty)$, $\theta \in (0, 1)$, vale*

$$(L^{p_0}(X), L^{p_1}(X))_{\theta,p} = L^p(X)$$

onde $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$.

Também temos o seguinte teorema:

Teorema 9 [19, p.] *Sejam $0 \leq s_0, s_1 < \infty$, $s_0 \neq s_1$. Então*

$$(W^{s_0,p}(\mathbb{R}^n), W^{s_1,p}(\mathbb{R}^n))_{\theta,q} = \mathcal{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$$

onde $0 < \theta < 1$ *e* $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$.

Um caso importante dos espaços $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ ocorre quando $A_0 = A$ é um espaço de Banach e $A_1 = K^m$ é um espaço especial que passamos a definir: Sejam $G_i(t)$, $i = 1, \cdots, n$, $0 \leq t < \infty$, semi-grupos fortemente contínuos em $L(A)$ que comutem entre si, i.e. para quaisquer $i, j = 1, \cdots, n$, $t, s \geq 0$ e $a \in A$, temos:

(a) $G_i(t) \in L(A)$;

(b) $G_i(0) = I_A$, $G_i(t+s) = G_i(t+s) = G_i(t)G_i(s)$;

(c) $\lim_{t\to s} ||G_i(t)a - G_i(s)a||_A = 0$ (tomamos o limite somente pela direita se $s = 0$);

(d) $G_i(t)G_j(s) = G_j(s)G_i(t)$.

Denotemos por Λ_i o gerador infinitesimal de G_i e escrevamos $\Lambda = (\Lambda_1, \cdots, \Lambda_n)$ e $\Lambda^\alpha = \Lambda_1^{\alpha_1} \cdots \Lambda_n^{\alpha_n}$ para $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ um multi-índice n-dimensional qualquer.

Definição 2 *Seja $m \in \mathbb{N}$.*

$$K^m \overset{\text{def}}{=} \cap_{|\alpha|=m} D(\Lambda^\alpha) \quad (= \cap_{|\alpha|\leq m} D(\Lambda^\alpha)\,)$$

$$||a||_{K^m} \overset{\text{def}}{=} \sum_{|\alpha|\leq m} ||\Lambda^\alpha a||_A,$$

onde $D(\Lambda^\alpha)$ é o domínio do operador Λ^α.

Lembramos que $D(\Lambda^\alpha)$ é o conjunto dos a's no espaço A para os quais $\Lambda^\alpha a$ está definido, no sentido de que dados dois operadores $S, T \in L(A)$, temos $D(ST) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A; Ta \in D(S)\}$.

Teorema 10 [19, p.88] *Sejam A, G_i como acima. Sejam também $1 \leq q \leq \infty$, $s = \theta m$, $0 < \theta < 1$, $m \in \mathbb{N}$, $[s]$ o maior inteiro menor do s, e $\{s\} = s - [s]$. Se para todo $i = 1, \cdots, n$ existem números $\beta_i \leq 0$ e $M_i \geq 0$ tais que $||G_i(t)|| \leq M_i e^{\beta_i t}$, $0 \leq t < \infty$, então*

$$(A, K^m)_{\theta,q} = \{a \in A; ||a||^* < \infty\}$$

onde

$$||a||^* \stackrel{\text{def}}{=} ||a||_A + \sum_{|\alpha| \leq [s]} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |y|^{-n-\{s\}p} \, || \left(\Pi_{i=1}^n G_i(y_i) - I\right) \Lambda^\alpha a||_A^p \, dy \right)^{1/p},$$

$y = (y_1, \cdots, y_n)$. Além disso, $|| \cdot ||^*$ é uma norma equivalente à norma $|| \cdot ||_{K^m}$ em K^m.

Exemplo 1 Tomemos $A = L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, e

$$[G_i(t)f](x) = f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \cdots, x_n),$$

$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. (Define-se G_i primeiramente em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e depois estende-se G_i a L^p. É fácil ver que G_i é uma isometria em L^p.) Pode-se provar que [19, p.187]

$$\begin{aligned} D(\Lambda_i^m) = & \quad \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); ||f||_{L^p} + ||\frac{\partial^m f}{\partial x_i^m}||_{L^p} < \infty\} \\ = & \quad \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \textstyle\sum_{k=0}^m ||\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}||_{L^p} < \infty\} \end{aligned}$$

e

$$\Lambda_i^m f = \frac{\partial^m f}{\partial x_i^m}, \quad f \in D(\Lambda_i^m).$$

Logo, para $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ um multi-índice arbitrário, temos que

$$D(\Lambda^\alpha) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \sum_{|\gamma| \leq |\alpha|} ||D^\gamma f|| < \infty\}$$

e

$$\Lambda^\alpha f = D^\alpha f, \quad f \in D(\Lambda^\alpha).$$

Daí obtemos que $K^m = \cap_{|\alpha|=m} D(\Lambda^\alpha) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ com a norma $||f||_{K^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha f||_{L^p}$, a qual é evidentemente equivalente à norma $||f||_{W^{m,p}} = (\sum_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha f||_{L^p}^p)^{1/p}$.

Corolário 1 *Para $0 < s \notin \mathbb{N}$ e $1 < p < \infty$, temos*

$$\mathcal{B}^s_{p,p}(\mathbb{R}^n) = W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$$

e as normas $||\cdot||_{\mathcal{B}^s_{p,p}}$ e $||\cdot||_{W^s_p}$ são equivalentes.

Demonstração: Sejam $0 < \theta < 1$ e $m \in \mathbb{N}/\{0\}$ tais que $s = \theta m$. Pelo Teorema 9, temos que

$$(L^p(\mathbb{R}^n), W^{m,p}(\mathbb{R}^n))_{\theta,p} = \mathcal{B}^s_{p,p};$$

pelo Teorema 10, o Exemplo acima e a definição em (19), obtemos

$$(L^p(\mathbb{R}^n), W^{m,p}(\mathbb{R}^n))_{\theta,p} = W^{s,p}(\mathbb{R}^n).$$

■

Exercício 1 Seja $f = \chi_{(0,1)}$, a função característica do intervalo $(0,1)$, i.e. $f(x) = 1$ se $x \in (0,1)$ e zero, caso contrário. Verificar que $f \in W^{s,p}(\mathbb{R})$ se, e somente se, $0 < sp < 1$, mas $f \in \mathcal{B}^s_{p,q}(\mathbb{R})$ para $sp = 1$, qualquer que seja $q \in [1,\infty]$; cf. Observação 6. Em particular, consideremos o problema que podemos encontrar em Equações Diferenciais Parciais: Dada uma função $u \in H^1_0(\Omega)$, Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, seja $\widetilde{u}$ a extensão por zero da função u ao $\mathbb{R}^n$. Perguntamos se $\widetilde{u} \in H^2(\mathbb{R}^n)$. Tendo em vista o verificado para a função $f = \chi_{(0,1)}$, podemos esperar que em geral a resposta para esta pergunta é não. Seja $u(x) = |x|$. Verificar que $u \in H^1_0(\,(0,1)\,)$, $\widetilde{u} \notin H^2(\mathbb{R})$, $\widetilde{u} \in H^s(\mathbb{R})$ para qualquer $s \in (-\infty, 3/2)$ (v. Definição 9 no Apêndice), $\widetilde{u} \in \mathcal{B}^s_{2,q}(\mathbb{R})$ para quaisquer $s \in (-\infty, 3/2]$ e $q \in [1,\infty]$.

Vamos encerrar este Capítulo falando de imersões dos espaços de Besov. Em primeiro lugar lembramos a definição do espaço de Hölder $C^s(\mathbb{R}^n)$, $s \geq 0$ qualquer:

$$C^s(\mathbb{R}^n) \overset{\text{def}}{=} \{ \quad f \in C^{[s]}(\mathbb{R}^n); \\ ||f||_{C^s} \overset{\text{def}}{=} ||f||_{C^{[s]}} + \textstyle\sum_{|\alpha|=[s]} \sup_{x\neq y} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^{\{s\}}} < \infty \}$$

onde $[s]$ é o maior inteiro menor do que s, $\{s\} = s - [s]$ e

$$||f||_{C^{[s]}} = \sum_{|\alpha|\leq[s]} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\alpha f(x)|.$$

Enunciamos dois resultados de imersões (itens (a) e (b)) abaixo):

Teorema 11 [19, p.203]

(a) Se $1 < p \leq r < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ e $-\infty < t \leq s < \infty$ com $s - n/p = t - n/r$, então

$$\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}^t_{r,q}(\mathbb{R}^n).$$

(b) Se $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ e $0 < s \notin \mathbb{N}$, então

$$\mathcal{B}^{s+n/p}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \subset C^s(\mathbb{R}^n);$$

aqui, no caso $q = 1$, s pode ser qualquer número não-negativo.

3 Um resultado de regularidade para média de velocidade

Nesta seção damos uma idéia da demonstração do Teorema 2, v. Introdução. Obteremos uma decomposição de $\overline{f}_\infty$ da seguinte forma:

$$\overline{f}_\infty = \left(\sum_{j=0}^{\infty} A_j \Delta_j f\right) - i \left(\sum_{j=0}^{\infty} B_j \Delta_j g\right) \tag{20}$$

onde A_j, B_j e Δ_j são operadores definidos mais tarde. Queremos destacar no momento que valem os seguintes resultados (cf. [5, Lemas 1 e 2]):

Lema 2 *Os operadores A_j e B_j são operadores lineares limitados do $L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, |\mathbf{v}|^\beta dx d\mathbf{v})$ no $L^1(\mathbb{R}^n)$ com normas uniformemente limitadas em relação a j.*

Lema 3 *Os operadores A_j e B_j são operadores lineares limitados do $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, |\mathbf{v}|^\beta dx d\mathbf{v})$ no $L^2(\mathbb{R}^n)$ com normas limitadas por $c2^{-j/2}$, onde c é uma constante independente de j.*

Tendo estes lemas, usamos o Teorema de Convexidade de Riesz–Thorin (v. Apêndice, Teorema 19) para obter que os operadores A_j e B_j são operadores lineares limitados do $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, |\mathbf{v}|^\beta dx d\mathbf{v})$ no $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2$, com norma limitada por $c2^{-j/p'}$, ou seja

$$||S_j \Delta_j f||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c 2^{-j/p'} ||\, |\mathbf{v}|^{\beta/p} \Delta_j f||_{L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)} \tag{21}$$

para $S_j = A_j$ ou B_j. Por outro lado, existe o famoso resultado de Littlewood–Paley [15]:

$$||\, (||\Delta_j f||_{L^p})\, ||_{l_2} \leq c||f||_{L^p} \tag{22}$$

onde $1 < p < \infty$; v. Definição 3 abaixo. Usando (22) em (21), obtemos

$$||\, (2^{-j/p'} ||S_j \Delta_j f||_{L^p(\mathbb{R}^n)})\, ||_{l_2} \leq c||\, |\mathbf{v}|^{\beta/p} f||_{L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)}. \tag{23}$$

De (20) e (23) vem que $\overline{f}_\infty \in \mathcal{B}^s_{p,2}(\mathbb{R}^n)$; vejamos mais detalhes a seguir.

Tendo em vista o caráter introdutório destas notas, omitiremos a demonstração do Lema 2 pois esta é mais difícil do que a do Lemma 3; v. Lema 1 em [5]. Para demonstrar o Lema 3 temos que adaptar as contas em [5], o que nos leva às condições adicionais de integrabilidade sobre f e g no Teorema 2, o que é naturalmente provocado pela integração no infinito ($\int_{|\mathbf{v}|\geq K}$).

A decomposição (20): Pela fórmula 8, é fácil ver que

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j * (\psi_j * f) \tag{24}$$

onde $\widehat{\psi_j} \stackrel{\text{def}}{=} \left((2\pi)^{-n/2}\widehat{\varphi_j}\right)^{1/2}$ satisfaz as propriedades 1–4 da Observação 2 com $N = 1$. Em particular, notamos que $\widehat{\psi_j}(\xi) = \tilde{\theta}(\frac{\xi}{2^j})$ para uma função $\tilde{\theta} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ com suporte no anel $\{\xi \in \mathbb{R}^n; 2^{-1} \leq |\xi| \leq 2\}$ e

$$\widehat{\psi_0}(\xi)^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\theta}(\frac{\xi}{2^j})^2 = (2\pi)^{-n}, \quad \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

A seqüência $\left((2\pi)^{n/2}\widehat{\psi_j}\right)$ é o que podemos chamar de uma *decomposição diádica da identidade*. Agora damos a definição do operador Δ_j:

Definição 3 *O operador Δ_j é definido em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ pela fórmula*

$$\Delta_j f \stackrel{\text{def}}{=} \psi_j * f.$$

Observação 7 Usando o Teorema de Mihlin (v. [10], [3] ou [16]) podemos provar que Δ_j está bem definido como um operador linear limitado em L^p para $1 < p < \infty$, mas o que nos interessa é o teorema mais forte de Littlewood–Paley mencionado na desigualdade (22).

Da Definição 3 e de (24) vem que

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j^2 f \tag{25}$$

(*decomposição de Littlewood–Paley em blocos diádicos*), logo,

$$\overline{f}_\infty = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j^2 \overline{f}_\infty = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{f}_j$$

onde $\overline{f}_j \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_j^2 \overline{f}_\infty$. Então

$$\widehat{\overline{f}}_j = (2\pi)^{n/2} \widehat{\psi_j} (\Delta_j \overline{f}_\infty)\widehat{}\,,$$

donde

$$\overline{f}_j = \mathcal{F}_\xi^{-1} \left(\int_{|\mathbf{v}| \geq K} \psi_j(\xi) (\Delta_j f)\widehat{}\,(\xi, \mathbf{v})\, d\mathbf{v} \right). \tag{26}$$

Neste ponto, usamos a equação (2). Aplicando Δ_j e $\mathcal{F}$ à equação (2), obtemos

$$i(\xi \cdot \mathbf{v})(\Delta_j f)\widehat{} = (\Delta_j g)\widehat{}\,.$$

Para usar esta informação em (26), precisamos evitar $\xi \cdot \mathbf{v}$ próximo do zero. Para isto, introduzimos uma 'função de truncamento' $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\varphi_0 | [-1, 1] = 1$ e pomos $\varphi_1 = 1 - \varphi_0$. Agora escrevemos (26) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \overline{f}_j = \; & \mathcal{F}_\xi^{-1} \left(\int_{|\mathbf{v}| \geq K} \varphi_0 (2^j \frac{\xi \cdot \mathbf{v}}{|\xi|}) \psi_j(\xi) (\Delta_j f)\widehat{}\,(\xi, \mathbf{v})\, d\mathbf{v} \right) \\ & - i \mathcal{F}_\xi^{-1} \left(\int_{|\mathbf{v}| \geq K} \varphi_1 (2^j \frac{\xi \cdot \mathbf{v}}{|\xi|}) \psi_j(\xi) (\xi \cdot \mathbf{v})^{-1} (\Delta_j g)\widehat{}\,(\xi, \mathbf{v})\, d\mathbf{v} \right) \\ \equiv \; & A_j \Delta_j f - i B_j \Delta_j g. \end{aligned}$$

Nesta última identidade definimos os operadores A_j e B_j. É conveniente reescrever o operador B_j como se segue:

$$B_j h = \mathcal{F}_\xi^{-1} \left(\int_{|\mathbf{v}| \geq K} (\frac{2^j}{|\xi|}) \psi_j(\xi) \varphi_2 (2^j \frac{\xi \cdot \mathbf{v}}{|\xi|}) (h)\widehat{}\,(\xi, \mathbf{v})\, d\mathbf{v} \right) \tag{27}$$

onde

$$\varphi_2(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{s} \varphi_1(s).$$

Estamos preparados para demonstrar o Lemma 3. Faremos a sua demonstração apenas em relação a B_j, já que a demonstração em relação a A_j é análoga (e mais simples).

Demonstração do Lema 3 em relação a B_j: Seja I o termo dentro do parêntesis maior em (27), i.e. $I = \mathcal{F}_\xi(B_j h)$. Pela desigualdade de Cauchy–Schwarz, temos

$$|I| \leq (\frac{2^j}{|\xi|}) |\psi_j(\xi)| || |\mathbf{v}|^{\beta/2} \widehat{h}(\xi, \mathbf{v}) ||_{L^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{v}})} (\int_{|\mathbf{v}| \geq K} |\mathbf{v}|^{-\beta} \varphi_2 (2^j \frac{\xi \cdot \mathbf{v}}{|\xi|})^2 \, d\mathbf{v})^{1/2}. \tag{28}$$

Observamos que podemos supor $2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}$, visto que $\operatorname{spt} \psi_j \subset M_j$ (v. Capítulo 2 para a definição de M_j). Tomemos a decomposição $\mathbb{R}^n = \langle \frac{\xi}{|\xi|} \rangle \times \mathbb{R}^{n-1}$, escrevamos $\mathbf{v} = (v_1, \overline{v})$ com relação a esta decomposição e apliquemos o Teorema de Fubini no último termo em (28), para obtermos

$$\begin{aligned} |I| \leq & \ (\frac{2^j}{|\xi|})|\psi_j(\xi)|||\mathbf{v}|^{\beta/2}\widehat{h}(\xi,\mathbf{v})||_{L^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{v}})} \left(\int_{|\overline{v}|\geq K} |\overline{v}|^{-\beta}\, d\overline{v} \int_K^\infty \varphi_2(2^j v_1)^2\, dv_1 \right)^{1/2} \\ \leq & \ c2^{-j/2}|||\mathbf{v}|^{\beta/2}\widehat{h}(\xi,\mathbf{v})||_{L^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{v}})} \end{aligned}$$

pois $\beta > n-1$ e $\varphi_2 \in L^2(\mathbb{R})$. Logo vem que

$$||B_j f||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||\mathcal{F}B_j f||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c2^{-j/2}||\,|\mathbf{v}|^{\beta/2} g||_{L^2(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)}.\blacksquare$$

4 Sobre o problema de Cauchy para a equação de Vlasov–Poisson

Retornemos à equação de Vlasov–Poisson (1). Nesta seção apresentamos um esquema resumido da demonstração da existência de solução fraca em L^p do problema de Cauchy para (1) sendo $n = 3$ e p suficientemente grande. O dado inicial f_0 é assumido pertencer a $L^1 \cap L^p$ e com energia cinética finita, i.e. $\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{v}|^2 f_0(x,\mathbf{v})\, dxd\mathbf{v} < \infty$. Este resultado é um teorema de E.Horst e R.Hunze [12]. A demonstração resumida que se segue tem uma simplificação em relação à original em [12], a qual é devida a H.N. Lopes e M.C. Lopes [14]. Com efeito, usaremos o Teorema 15 abaixo. Para uma motivação e resultados clássicos sobre a equação (1), citamos [9]–especialmente o Capítulo 4, e [11].

Uma grande dificuldade em resolver (1) é a singularidade do núcleo integral

$$\mathbf{E}(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x-y}{|x-y|^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y,\mathbf{v})\, d\mathbf{v}\, dy. \tag{29}$$

Notamos que

$$\mathbf{E} = \nabla\Gamma * \rho(f) \tag{30}$$

onde Γ é, a menos de constante multiplicativa, a solução fundamental do Laplaciano no $\mathbb{R}^n$, e

$$\rho(f)(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(y,\mathbf{v}) d\mathbf{v} \tag{31}$$

é a função densidade de partículas. Para contornar a singularidade em $\mathbf{E}$, tomamos a seguinte aproximação da equação (1):

$$f_t^\epsilon + \mathbf{v}\cdot\nabla_x f^\epsilon + \gamma \mathbf{E}^\epsilon \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f^\epsilon = 0, \qquad \epsilon > 0 \tag{32}$$

onde

$$\mathbf{E}^\epsilon(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}^\epsilon * \rho(f^\epsilon), \qquad \mathbf{e}^\epsilon(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{z}{(|z|^2+\epsilon)^{n/2}}\,. \tag{33}$$

Observamos que esta é uma modificação clássica na solução da equação de Laplace, cf. [6].

No que se segue assumiremos que $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Enunciamos os resultados que nos interessam sobre a equação (32):

Teorema 12 [12, Teorema 2.3] *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Se $f_0 \in L^p(\mathbb{R}^{2n})$ então $f^\epsilon(\cdot, t) \in L^p(\mathbb{R}^{2n})$ para todo $t > 0$ e $||f^\epsilon(\cdot, t)||_{L^p(\mathbb{R}^{2n})} = ||f_0||_{L^p(\mathbb{R}^{2n})}$ para todo $t \geq 0$.*

Teorema 13 [12, Lema 3.2] *Seja $1 < p < \infty$. Se $\int_{\mathbb{R}^{2n}} |\mathbf{v}|^2 f^\epsilon(x, \mathbf{v})\, dx d\mathbf{v}$ e $||f^\epsilon(\cdot, t)||_{L^p(\mathbb{R}^{2n})}$ são uniformemente limitadas em relação a ϵ e t, então $||\rho(f^\epsilon)(\cdot, t)||_{L^r(\mathbb{R}^{2n})}$ também é uniformemente limitada em relação a ϵ e t, sendo $r = (2p + n(p-1)) \,/\, (2 + n(p-1))$.*

Observação 8 *A quantidade $E_c(f^\epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^{2n}} |\mathbf{v}|^2 f^\epsilon(x, \mathbf{v})\, dx d\mathbf{v}$ representa a energia cinética do sistema (32) no tempo t.*

Teorema 14 [12, Teoremas 2.1 e 3.1] [11, Teorema 5.8] *Seja $n = 3$. Se $f_0 \in L^{9/7}(\mathbb{R}^6)$, $f_0 \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}^6} |\mathbf{v}|^2 f_0(x, \mathbf{v})\, dx d\mathbf{v} < \infty$, então $f^\epsilon \geq 0$ e $E_c(f^\epsilon)$ é uniformemente limitada em relação a ϵ e t.*

Um outro teorema que nos interessa é a compacidade do potencial de Riesz:

Teorema 15 [14] *Seja $1 \leq r < \infty$. O potencial de Riesz*

$$R_\alpha(\kappa) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\kappa(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy, \qquad 0 < \alpha < n/r,$$

é um operador linear compacto (respect. contínuo) do $L^r(\mathbb{R}^n)$ no $L^q(\Omega)$ se Ω é um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$ e $q < r^*$ (respect. $\Omega = \mathbb{R}^n$ e $q = r^*$) onde $r^* \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{nr}{n - r\alpha}$.

Com estes quatro fortes teoremas, a existência de solução da equação (1) procede da seguinte maneira: Pelo Teorema 12, existe uma função f em $L^\infty([0,\infty); L^p(\mathbb{R}^{2n}))$ e uma seqüência (f^ϵ_k), $\epsilon_k > 0$ que converge para f quando ϵ_k tende para zero na topologia fraca-$*$ do $L^\infty([0,\infty), L^p(\mathbb{R}^{2n}))$ $= \left(L^1([0,\infty), L^{p'}(\mathbb{R}^{2n}))\right)'$, se $1 < p \leq \infty$ e $f_0 \in L^p(\mathbb{R}^{2n})$, onde $p' = p/(p-1)$ (o expoente conjugado do p). Vamos escrever $\epsilon_k = \epsilon$ no que se segue. Suponhamos que a energia cinética $E_c(f^\epsilon)$ e também $||f^\epsilon(\cdot, t)||_{L^p}$ sejam uniformemente limitados em relação a ϵ e t; cf. teoremas 12 e 14. Pelo Teorema 13 é possível provar que $\rho(f^\epsilon(\cdot, t))$ converge fracamente para $\rho(f(\cdot, t))$ em L^r (passando-se a subseqüência se necessário) para r definido no Teorema 13. Esta convergência fraca ocorre de maneira localmente uniforme em relação a t; cf. [12, Lemma 5.4].

Agora vamos provar que $\{\mathbf{E}^\epsilon\}$ é pré-compacto em $L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ para todo $q < r^*$, sob condições especificadas abaixo. Seja $e \stackrel{\text{def}}{=} e^0$, sendo e^ϵ definido em (33). Então,

$$\mathbf{E}^\epsilon - \mathbf{E} = e^\epsilon * \rho(f^\epsilon) - e * \rho(f) = (e^\epsilon - e) * \rho(f^\epsilon) + e * \rho(f^\epsilon - f)$$

logo,

$$||\mathbf{E}^\epsilon - \mathbf{E}||_{L^q_{loc}} \leq ||(e^\epsilon - e)||_{L^s}||\rho(f^\epsilon)||_{L^r} + ||R_1(\rho(f^\epsilon - f))||_{L^q_{loc}}, \qquad (34)$$

onde $1/s + 1/r = 1 + 1/q$ (v. Desigualdade de Young, (43) no Apêndice) e R_1 é o potencial de Riesz com $\alpha = 1$, definido no Teorema 15. Nas condições do Teorema 13, temos que $||\rho(f^\epsilon)||_{L^r}$ é uniformemente limitado. Também temos que $\lim_{\epsilon\to 0} ||e^\epsilon - e||_{L^s} = 0$ se $1 \leq s < \frac{n}{n-1} (= 1^*)$ [12, Lema 3.6] e $\lim_{\epsilon\to 0} ||R_1(\rho(f^\epsilon) - \rho(f)||_{L^q_{loc}} = 0$ se $q < r^*$, pelo Teorema 15, desde que $\rho(f^\epsilon)$ tenda a $\rho(f)$ em L^r quando $\epsilon \to 0$ e $1 \leq r < n$.

Agora vamos juntar as peças: O único termo não linear da equação (32) é o termo $\mathbf{E}^\epsilon \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f^\epsilon$ que aplicado numa função teste torna-se $\mathbf{E}^\epsilon f^\epsilon$. Então para obtermos a convergência que desejamos basta observarmos em que condições sobre p, este termo é um par "forte–fraco", i.e. $\mathbf{E}^\epsilon f^\epsilon$ é bem definido, E^ϵ converge fortemente e f^ϵ converge fracamente.

Já vimos que, nas condições do Teorema 13, $\mathbf{E}^\epsilon$ converge fortemente em L^q_{loc} se $q < r^*$ e $1 \leq r < n$, onde r está definido no Teorema 13, e se $1 \leq s < 1^*$, onde $1/s + 1/r = 1 + 1/q$. Então é suficientemente termos f^ϵ convergindo fracamente em $L^{q'}_{loc}$. Isto ocorre se $q' \leq p$, i.e. $q \geq p'$. Assim precisameos de um q entre p' e r^*, i.e. $p' \leq q < r^*$, o qual existirá se $p' < r^*$. Fazendo as contas encontramos que esta condição é equivalente a

$$p > p_0(n) \stackrel{\text{def}}{=} n(n + 5 + \sqrt{(n-1)^2 + 16})/(6n + 4).$$

Observamos que $p_0(3) = (12 + 3\sqrt{5})/11$. Não é difícil concluir que a partir dos teoremas 12–15 acima, temos o seguinte teorema:

Teorema 16 [12] *Sejam $p > p_0 \stackrel{\text{def}}{=} (12 + 3\sqrt{5})/11$, $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^6) \cap L^p(\mathbb{R}^6)$, $f_0 \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}^6} |\mathbf{v}|^2 f_0(x, \mathbf{v})\, dx d\mathbf{v} < \infty$. Então a equação de Vlasov–Poisson tem uma solução fraca em L^P com dado inicial f_0.*

Observação 9 [12] *Este teorema também vale para $p = p_0$.*

5 Apêndice

Neste apêndice queremos coletar alguns resultados e idéias importantes para o estudo dos espaços de Besov. Falaremos sobre os espaços das funções rapidamente decrescentes $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, os espaços das distribuições temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, transformada de Fourier, convolução, e os espaços de Sobolev no $\mathbb{R}^n$ modelados no L^2. Para as demonstrações e hipóteses omitidas, recomendamos [13] (v. também [18]), [17], [6] e outras citadas em [13]. O nosso intuito aqui é simplesmente formal, e admitimos uma certa maturidade com o assunto. Apresentaremos apenas duas ou três demonstrações que achamos que contêm idéias relevantes para os nossos propósitos.

Começamos com a transformada de Fourier, a qual será denotada por $\hat{\cdot}$ ou $\mathcal{F}$; sua inversa será denotada por $\check{\cdot}$ ou $\mathcal{F}^{-1}$.

Definição 4 *Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ absolutamente integrável, temos*

$$\mathcal{F}f(\xi) \equiv \hat{f}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi}\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

e

$$\mathcal{F}^{-1}g(\xi) \equiv \check{g}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{i\xi\cdot x}\, d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

A transformada de Fourier é uma ferramenta muito importante em Equações Diferenciais Parciais. O exemplo clássico da sua utilidade é dado na resolução da equação do calor

$$u_t - \Delta u = 0, \tag{35}$$

onde $u = u(x,t)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\Delta \equiv \Delta_x$, senão vejamos: Aplicando a transformanda de Fourier na variável x à equação (35), obtemos (formalmente)

$$(\mathcal{F}u)_t - \mathcal{F}(\Delta u) = 0. \tag{36}$$

Aqui vamos usar a seguinte propriedade da transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}(D^\alpha f) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \mathcal{F}(f), \tag{37}$$

onde α é um multi-índice, i.e.

$$\begin{gathered} \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n), \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}_+, \\ |\alpha| \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \\ D^\alpha f = \tfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \\ \text{e} \qquad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}, \qquad \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n). \end{gathered}$$

Em particular,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\Delta) = &\ \ \mathcal{F}(\textstyle\sum_{k=1}^n \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \textstyle\sum_{k=1}^n \mathcal{F}(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k^2})\\ = &\ \ \textstyle\sum_{k=1}^n i^2\xi_i^2\mathcal{F}(u) = -(\textstyle\sum_{k=1}^n \xi_k^2)\mathcal{F}(u),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathcal{F}(\Delta u) = -|\xi|^2\mathcal{F}(u). \qquad (38)$$

Substituindo (38) em (36) e escrevendo $\hat{u} = \mathcal{F}(u)$, obtemos a equação diferencial ordinária na variável t

$$\hat{u}_t - |\xi|^2\hat{u} - 0$$

para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$. A solução geral desta equação é dada por

$$\hat{u}(t,\xi) = c(\xi)e^{-t|\xi|^2}$$

onde $c(\xi)$ é uma "constante" dependendo de ξ. Daí, tomando a transformada de Fourier inversa, obtemos

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}(c(\xi)e^{-t|\xi|^2}). \qquad (39)$$

Esta fórmula dá a solução geral da equação do calor (35) (naturalmente sob algumas hipóteses, mas isto não faz parte do mérito da questão no momento). Ela pode ser melhor caraterizada usando-se o conceito de convolução:

Definição 5 *A convolução de duas funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é denotada por $f * g$ e definida pela fórmula*

$$(f * g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

(sempre que o lado direito fizer sentido).

Um fato essencial é que vale a fórmula

$$(f * g)\hat{}\,(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\widehat{f}\,\widehat{g}. \qquad (40)$$

Usando-a podemos reescrever a fórmula (39) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}u(t,x) = &\ \ (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\mathcal{F}^{-1}\left((2\pi)^{\frac{n}{2}}(\mathcal{F}^{-1}c)\hat{}\,(\xi)\,(\mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\cdot|^2}))\hat{}\,(\xi)\right)\\ = &\ \ (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\mathcal{F}^{-1}\left((\mathcal{F}^{-1}c) * (\mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\cdot|^2}))\right)\hat{}\end{aligned}$$

logo

$$u(t,x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} f * \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\cdot|^2}) \qquad (41)$$

onde $f \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}^{-1}c$. Mas [13, p.305]

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\cdot|^2})(x) = \frac{1}{(2t)^{\frac{n}{2}}} e^{-|x|^2/4t},$$

então

$$u(x,t) = f * K_t \tag{42}$$

onde

$$K_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-|x|^2/4t}.$$

Esta função K_t é chamada o *núcleo do calor* e prova-se que

$$f * K_t \longrightarrow_{(t\to 0)} f,$$

logo (42) é a solução da equação do calor (35) com dado inicial $u(x,0) = f(x)$.

Outro fato importante sobre convolução que usaremos é a *desigualdade de Young*:

$$||f * g||_{L^r} \leq ||f||_{L^p} ||g||_{L^q} \tag{43}$$

se $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 + \dfrac{1}{r}$, $1 \leq p, q, r \leq \infty$.

Uma pergunta natural é que espaço de funções é invariante pela transformada de Fourier. Uma resposta é o espaço das funções rapidamente decrescentes de Schwartz, denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

Definição 6

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C};\ \ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\ \ e\ \ ||f||_{\alpha,\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty \\ \textit{para todo par de multi-índices } \alpha,\beta\ \ \}.$$

Teorema 17 *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração: Temos

$$\xi^\alpha D^\beta \widehat{f} = \xi^\alpha (-i)^{|\beta|} \mathcal{F}(x^\beta f) = (-1)^{|\beta|} i^{|\beta|+|\alpha|} \mathcal{F}(D^\alpha(x^\beta f))$$

logo, como $D^\alpha(x^\beta f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, vem que

$$|\xi^\alpha D^\beta \widehat{f}| \leq ||D^\alpha(x^\beta f)||_{L^1} < \infty,$$

para todo par de multi-índices α, β. ■

Existe um outro espaço associado a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ que também é invariante pela transformada de Fourier. Este espaço não é literalmente um espaço de funções, mas é um espaço de "funções generalizadas"– é o espaço das chamadas *distribuições temperadas*, o qual é denotado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:

Definição 7

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \textit{é o dual topológico do } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \textit{ i.e.}$$

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \{f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}; f \quad \textit{é um funcional linear contínuo } \}.$$

A transformada de Fourier em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (e muitas outras definições dadas em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$) é definida via dualidade:

$$\langle \widehat{f}, \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, \widehat{\varphi} \rangle. \tag{44}$$

Muitas das fórmulas válidas em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se estendem naturalmente para $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, como é o caso da fórmula (37), mas devemos tomar cuidado com as fórmulas que envolvem produtos, pois o produto de distribuições é uma operação complicada de definir. Por exemplo, a fórmula (40) não vale para quaisquer f, g em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; ela vale para $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Na pesquisa de soluções das EDP's precisamos de espaços melhores do que $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, precisamos de espaços que sejam pelo menos normados e completos (espaços de Banach); $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial topógico, ou melhor, um espaço de Hausdorff. (Muito útil, por conter todos os demais espaços com os quais trabalhamos.) Um espaço natural é aquele das funções com derivadas até uma certa ordem de quadrado integrável, o qual é denotado por $H^m(\mathbb{R}^n)$, e é chamado espaço de Sobolev de ordem m ($m \in \mathbb{N}$, por enquanto) modelado no L^2:

Definição 8

$$\begin{aligned} H^m(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \quad & f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); D^\alpha \in L^2(\mathbb{R}^n) \\ & \textit{para todo multi-índice } \alpha \textit{ com } |\alpha| \leq m \ \}. \end{aligned}$$

(Mais geralmente, define-se os espaços de Sobolev modelados no L^p:

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); D^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad \forall\, \alpha\,; |\alpha| \leq m\,\}.)$$

Acontece que os espaços $H^m(\mathbb{R}^n)$ podem ser caracterizados em termos da transformada de Fourier. Com efeito, vale o seguinte teorema:

Teorema 18

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); ||f||_{H^m} \stackrel{\text{def}}{=} ||\mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)^{m/2}\mathcal{F}f||_{L^2} < \infty.$$

Este teorema é uma conseqüência quase imediata da fórmula (37) e da *identidade de Parseval*:

$$||\widehat{f}||_{L^2} = ||f||_{L^2}, \tag{45}$$

válida para toda $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$, senão vejamos: Pela identidade de Parseval, temos que $D^\alpha f \in L^2$ se, e somente se, $\mathcal{F}(D^\alpha f) \in L^2$. Mas pela fórmula (37), esta condição é equivalente a $\xi^\alpha \widehat{f} \in L^2$. Agora basta observarmos que

$$\xi^\alpha \widehat{f} \in L^2, \quad \forall\ |\alpha| \leq m$$

é o mesmo que

$$(1+|\alpha|^2)^{m/2}\widehat{f} \in L^2,$$

tendo em vista a estimativa (válida para todo multi-índice α com $\alpha \leq m$)

$$\begin{aligned} |\xi^\alpha| = |\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}| \leq &\ (1+|\xi_1|^2)^{\alpha_1/2}\cdots(1+|\xi_n|^2)^{\alpha_n/2} \\ \leq &\ (1+|\xi|^2)^{\alpha_1/2}\cdots(1+|\xi|^2)^{\alpha_n/2} \\ \leq &\ (1+|\xi|^2)^{|\alpha|/2} \\ \leq &\ (1+|\xi|^2)^{m/2} \end{aligned}$$

e a fórmula binomial de Newton

$$(1+|\xi|^2)^m = \sum_{j=0}^{m} c_j |\xi|^{2j}, \quad c_j = \left(\begin{array}{c} m \\ j \end{array} \right).$$

O Teorema 18 permite generalizar facilmente a definição do $H^m(\mathbb{R}^n)$ para $m = s \in \mathbb{R}$ arbitrário:

Definição 9 *Para $s \in \mathbb{R}$ qualquer, definimos*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); ||f||_{H^s} \stackrel{\text{def}}{=} ||\mathcal{F}^{-1}(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}f||_{L^2} < \infty.$$

Vamos terminar este Apêndice com um toque na teoria da interpolação, o que é um assunto inerente ao estudo dos espaços de Besov (v. Seção 2). A identidade de Parseval (45) nos diz que a transformada de Fourier é um operador unitário no $L^2(\mathbb{R}^n)$, em particular, temos que $\mathcal{F} \in L(\, L^2(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n)\,)$[4] com $||\mathcal{F}||_{L^2,L^2} \leq 1$. Por outro lado, é fácil observar que temos também $\mathcal{F} \in L(\, L^1(\mathbb{R}^n), L^\infty(\mathbb{R}^n)\,)$ com $||\mathcal{F}||_{L^1,L^\infty} \leq (2\pi)^{-n/2}$.

Perguntamos: Para que outros espaços $A, B \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, temos $\mathcal{F} \in L(A,B)$? Esta é uma pergunta típica da teoria da interpolação, e um resultado importante da mesma é o seguinte:

Teorema 19 (Teorema de Convexidade de Riesz–Thorin) [7, 17] *Seja T um operador linear entre espaços L^p's. Se $||T||_{L^{p_0},L^{q_0}} \leq M_0$ e $||T||_{L^{p_1},L^{q_1}} \leq M_1$ então $||T||_{L^{p_\theta},L^{q_\theta}} \leq M_0^{1-\theta}M_1^\theta$, para todo $\theta \in [1,1]$, onde $\dfrac{1}{p_\theta} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$ e $\dfrac{1}{q_\theta} = \dfrac{1-\theta}{q_0} + \dfrac{\theta}{q_1}$.*

[4] Operador linear limitado do $L^2(\mathbb{R}^n)$ no $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Para um enunciado preciso, v. as referências [7, 17] dadas acima. Cf. Seção 2, Teorema 8. Tomando $p_0 = q_0 = 2$, $p_1 = 1$ e $q_1 = \infty$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_\theta} &= \frac{1-\theta}{2} + \theta \quad \text{e} \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{2} \\ &= \frac{1+\theta}{2}, \end{aligned}$$

logo, $1 \leq p_\theta \leq 2$ e $\dfrac{1}{p_\theta} + \dfrac{1}{q_\theta} = 1$. Portanto, uma resposta à pergunta acima é o seguinte teorema, o qual acabamos de demonstrar:

Teorema 20 (Teorema de Hausdorff–Young) *A transformada de Fourier é um operador linear limitado do $L^p(\mathbb{R}^n)$ no $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ para todo $p \in [1,2]$, onde $p' = \dfrac{p}{p-1}$, i.e. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.*

Para finalizar, observamos que a desigualdade de Young (43) também pode ser obtida via interpolação.

References

[1] R. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press (1975).

[2] I. Babuška, *On Besov and Sobolev spaces of fractional order*, TICAM Forum Notes nr.1, Texas Institute for Computational and Applied Mathematics, Univ.of Texas at Austin (1996), http://www.ticam.utexas.edu/ticam_forum/.

[3] J. Bergh & J. Löfström, *Interpolation spaces: an introduction*, Springer-Verlag (1976).

[4] C. Cercignani, *The Boltzmann Equation and its Applications*, Springer–Verlag (1988).

[5] R.J. DiPerna, P.L. Lions & Y. Meyer, *L^p regularity of velocity averages*, Ann.Inst. Henri Poincaré, **8**(3-4) (1991) 271-287.

[6] G.B. Folland, *Introduction ot Partial Differential Equations*, Princeton Univ. Press (1976).

[7] G.B. Folland, *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*, 2nd. ed., John Wiley & Sons, Inc. (1999).

[8] M. Geisler & T. Runsy, *On a superlinear Ambrosett–Prodi problem in Besov and Triebel–Lizorkin spaces*, J.London Math.Soc. **43**(2) (1991) 324-336.

[9] R.T. Glassey, *The Cauchy Problem in Kinetic Theory*, SIAM (1996).

[10] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*

[11] E. Horst, *On the classical solutions of the initial value problem for the unmodified non-linear Vlasov equation*, Partes I e II): Math.Meth.Appl.Sci. **3** (1981) 229-248 e; **4** (1982) 19-32.

[12] E. Horst & R. Hunze, *Weak solutions of the initial value problem for unmodified non-linear Vlasov equation*, Math.Meth. in Appl.Sci. **6** (1984) 262-279.

[13] R. Iório & V.M. Iório, *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução*, IMPA–Projeto Euclides (1988).

[14] H.N. Lopes & M. Lopes, *Comunicação pessoal*

[15] J.E. Littlewood & R. Paley *Theorems on Fourier series and power series (II)* Proc. London Math. Soc., **42** (1937) 55-89.

[16] V.G. Maz'ja, *Sobolev Spaces*, Springer–Verlag (1985).

[17] M. Reed & B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, V.I e II, Academic Press (1975).

[18] M.M. Santos, *A Versão de Kato–Lai do Método de Galerkin e a Equação de Korteweg–De Vries (KdV)*, Dissertação de Mestrado, IMPA (1988).

[19] H. Triebel, *Interpolation Theory, Function Spaces and Differential Operators*, North-Holland (1978).

[20] H. Triebel, *Theory of function spaces. II*, Monographs in Mathematics, **84**, Birkhäuser Verlag, Basel (1992).

Estas notas são um trabalho em evolução. Pretendemos em futuras versões acrescentar exemplos e demonstrações. Certamente muitas correções devem ser feitas. Quaisquer comentários ou sugestões serão bem vindos.