UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática e Estatística

Trigonometria

Professor Marcelo Martins dos Santos

MA224 - Turma P

Trabalho 4 do grupo 4. Membros:
Eduardo Cosme Albuquerque - 155209
Caio Vinícius de Jesus Oliveira - 138130
Menandro L. S. de Freitas Filho - 122590
Tiago Moreira Andrade Salviano - 187696

2º Semestre de 2018
Campinas - SP

(Problema indicado pelo professor)

1) Mostre que é impossível escrever
$sen\ 3x\ =\ A\ cos\ x\ + B\ sen\ x + C\ cos\ 2x + D\ sen\ 2x$ quaisquer que seja A,B,C,D constantes (para todo $x\ \in R$).

Resolução a nível Ensino Médio

É importante frisar que o problema pede "para todo x pertencente aos reais", o que nos permite argumentar que se não vale para um valor de x, não vale para todo x.
Considerando que temos quatro incógnitas, A,B,C e D, precisamos de quatro equações para determinar seus valores. Tomemos quatro valores distintos de x, $x = 0,\ \pi,\ \pi/2,\ \pi/4$ para obter o seguinte sistema de equações:
$sen\ (3 \times 0)\ =\ A\ cos\ 0 + B\ sen\ 0 + C\ cos(2 \times 0) + D\ sen\ (2 \times 0)$
$sen\ (3 \times \pi)\ =\ A\ cos\ \pi + B\ sen\ \pi + C\ cos\ (2 \times \pi)\ + D\ sen\ (2 \times \pi)$
$sen\ (3 \times \frac{\pi}{2})\ =\ A\ cos\ \frac{\pi}{2} + B\ sen\ \frac{\pi}{2} + C\ cos\ (2 \times \frac{\pi}{2}) + D\ sen\ (2 \times \frac{\pi}{2})$
$sen\ (3 \times \frac{\pi}{4})\ =\ A\ cos\ \frac{\pi}{4}\ + B\ sen\ \frac{\pi}{4} + C\ cos\ (2\ \times \frac{\pi}{4}) + D\ sen\ (2 \times \frac{\pi}{4})$.
Daí, calculando os senos e cossenos, obtemos:
$0\ =\ (A \times 1) + (B \times 0) + (C \times 1) + (D \times 0)$
$0\ =\ (A \times - 1) + (B \times 0) + (C \times 1) + (D \times 0)$
$-1\ =\ (A \times 0) + (B \times 1) + (C \times 1) + (D \times 0)$
$\frac{\sqrt{2}}{2}\ =\ (A \times 0) + (B \times (\frac{\sqrt{2}}{2}) + (C \times 0) + (D \times 1)$.
Resolvendo o sistema linear obtemos os valores A=0=C, B = -1 e D = $\sqrt{2}$.
Tendo esses coeficientes, vejamos se a equação é válida para outro x, pertencente aos reais.
Vejamos para $x\ =\ \frac{\pi}{3}$.
$sen\ (3 \times \frac{\pi}{3})\ (?) =\ 0 - 1(sen\ (\frac{\pi}{3})) + 0 + \sqrt{2}\ \ sen\ (2 \times \frac{\pi}{3})\ \Leftrightarrow 0\ (?) =\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2}\ (-\frac{\sqrt{3}}{2})\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \neq\ -\frac{\sqrt{6}}{2}$
Com isso, achamos A,B,C e D que satisfazem o sistema para $x = 0,\ \pi,\ \pi/2,\ \pi/4$, mas, quando colocamos $x\ =\ \frac{\pi}{3}$, esses coeficientes não garantem a igualdade. Como achamos um x para o qual não vale a equação com os coeficientes, então não vale para todo o x.

Resolução a nível ensino superior

A ideia nesta resolução consiste em formar um sistema de equações com as derivadas da equação do problema, que carregam as constantes A,B,C e D.

$sen\ (3x)\ =\ A\ cos\ x\ + B\ sen\ x + C\ cos\ (2x) +\ D\ sen\ (2x)$
Derivada 1ª $3 \times cos\ (3x)\ =\ -A\ sen\ x + B\ cos\ x - 2C\ sen\ (2x) + 2D\ cos\ (2x)$
Derivada 2ª $-9 \times sen\ (3x)\ =\ -A\ cos\ x - B\ sen\ x - 4C\ cos\ (2x)\ - 4D\ sen\ (2x)$

Derivada 3ª $-27 \times cos\,(3x) \;=\; A\;sen\;x - B\;cos\;x + 8C\;sen\,(2x) - 8D\;cos\,(2x)$.

Agora, façamos x = 0 para obtermos as constantes:

$$sen\;0 \;=\; A\;cos\;0 + B\;sen\;0 + C\;cos\;0 + D\;sen\;0$$
$$3 \times cos\;0 \;=\; -A\;sen\;0 + B\;cos\;0 - 2C\;sen\;0 + 2D\;cos\;0$$
$$-9 \times sen\;0 \;=\; -A\;cos\;0 - B\;sen\;0 - 4C\;cos\;0 - 4D\;sen\;0$$
$$-27 \times cos\;0 \;=\; A\;sen\;0 - B\;cos\;0 + 8C\;sen\;0 - 8D\;cos\;0$$
$$\Updownarrow$$
$$0 \;=\; A + C$$
$$3 \;=\; B + 2D$$
$$0 \;=\; -A - 4C$$
$$-27 \;=\; -B - 8D$$
$$\Updownarrow$$
$$A = C = 0,\; B = \;-5,\; D = 4$$

Vejamos se essas constantes garantem a igualdade para a derivada quarta da equação para x = 0.

Derivada 4ª $81\;sen\,(3x) \;=\; -5\;sen\;\;x + 64\;sen\;2x$, para x = 0 temos: $0 \;=\; 0$

Vejamos agora para derivada 5ª:

$$243\;cos\;3x \;=\; B\;cos\;x \;+\; 32D\;cos\;2x$$

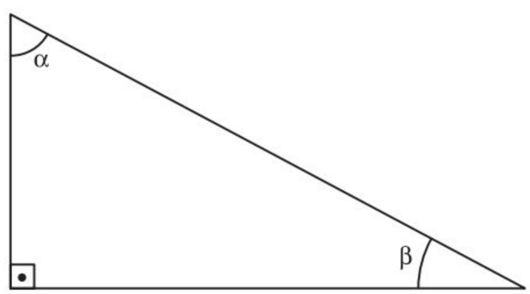
Substituindo x=0, temos:

$$243 \;=(?)\;\; -5 \;+\; 64$$

E daí, podemos ver que a equação não é válida, já que $243 \;\neq 59$. Com isso concluímos que é impossível escrever a equação do problema para qualquer x.

2) (FUVEST 2005)

Sabe-se que x = 1 é raíz da equação $(cos^{\,2}\alpha)\,x^{\,2} - (4\;cos\;\alpha\;sen\;\beta)\,x + \frac{3}{2}sen\;\beta \;=\; 0$, sendo $\alpha\;e\;\beta$ os ângulos agudos indicados no triângulo retângulo da figura abaixo. Pode-se então afirmar que as medidas de $\alpha\;e\;\beta$ são, respectivamente,



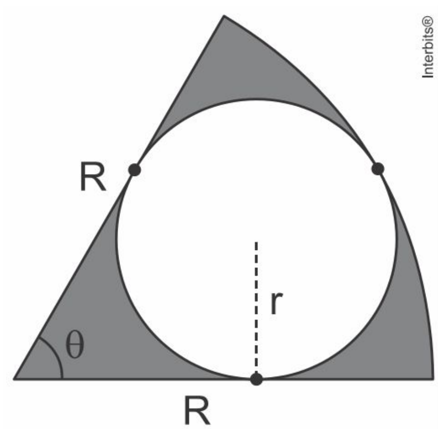
a) $\frac{\pi}{8}\;e\;\frac{3\pi}{8}$
b) $\frac{\pi}{6}\;e\;\frac{\pi}{3}$
c) $\frac{\pi}{4}\;e\;\frac{\pi}{4}$

d) $\frac{\pi}{3}\ e\ \frac{\pi}{6}$
e) $\frac{3\pi}{8}\ e\ \frac{\pi}{8}$

Resolução a nível Ensino Médio

Como $\alpha + \beta = 90° = \frac{\pi}{2}\ (1)$,visto que é um triângulo, temos que $\alpha\ e\ \beta$ são ângulos complementares, logo
$sen\ \beta\ =\ cos\ \alpha$ e $cos\ \beta\ =\ sen\ \alpha$. Como x = 1 é raíz da equação dada, obtemos:
$(cos^2\alpha)\,x^2 - (4\ cos\ \alpha\ sen\ \beta)\,x + \frac{3}{2}sen\ \beta\ =\ 0 \ \Leftrightarrow (cos^2\alpha) - (4\ cos\ \alpha\ sen\ \beta) + \frac{3}{2}sen\ \beta\ =\ 0$
$\Leftrightarrow (cos^2\alpha) - (4\ cos^2\alpha) + \frac{3}{2}cos\ \alpha\ =\ 0\ \Leftrightarrow 3\ cos^2\alpha\ =\ \frac{3}{2}\ cos\ \alpha\ \Leftrightarrow cos\ \alpha\ =\ \frac{1}{2}\ \Leftrightarrow \alpha\ =\ arc\ cos\ \frac{\pi}{3}\ \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$
Usando (1) nós temos $\frac{\pi}{3} + \beta = \frac{\pi}{2}\ \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{6}$.
O que nos leva a alternativa d.

3) (Unicamp 2015) A figura abaixo exibe um círculo de raio r que tangencia internamente um setor circular de raio R e ângulo central θ.



Para θ = 60º , determine a razão entre as áreas do círculo e do setor circular.

Resolução a nível Ensino Médio

Podemos fazer algumas observações em relação a inicialização do exercício. É fundamental na resolução e um exercício de matemática “definir tudo que sabemos”, e neste exercício podemos ver que:

I) Há 3 pontos em que o setor circular e o círculo se interceptam; ou seja, nesses 3 pontos a distância do centro do círculo para esses pontos do setor circular é exatamente a medida “r” do raio.

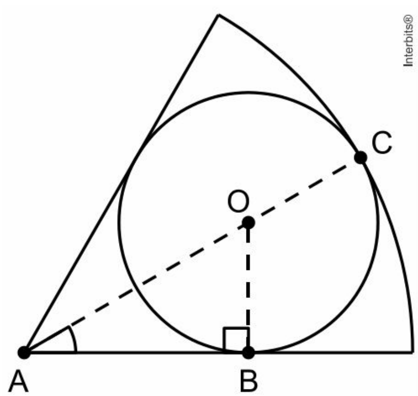
II) O θ foi dado, e equivale a 60º

III) Um setor circular nada mais é do que “um pedaço” de um círculo. Então possui características de um círculo.

Para facilitar a resolução deste exercício, definiremos alguns pontos para que os alunos possam visualizar melhor. Definimos o Ponta A no vértice do ângulo θ, B o ponto definido na linha de baixo (onde o círculo e setor circular se interceptam na linha debaixo.), o ponto C à direita da imagem, onde o círculo e o setor circular também se interceptam; e o ponto“O” o centro do círculo de raio r.

E mais importante, dizemos que o ângulo ∠BAO tem 30º, pois é metade do ângulo teta

Então podemos traçar um triângulo dentro deste figura. Que é o triângulo Δ AOB:



Daí sabemos que o ângulo ∠ABO tem 90º e o ângulo ∠BAO tem 60º; logo, o ângulo ∠AOB tem 30º, pois a soma dos ângulos internos deve ser 180º.

Também podemos afirmar algumas coisas, como dizer que o segmento de reta AC = R, pois é exatamente a distância entre o centro do setor circular e a extremidade dele; e que OB = OC = r, pois como já mencionamos antes, estes segmentos de reta vão do centro do círculo de raio “r” até sua extremidade, e isso corresponde ao raio dele.

Então pelo que sabemos, podemos afirmar que AO = AC - OC = R - r. Daí podemos usar seno (cateto oposto/hipotenusa):

-sen∠BAO = OB / AO **equivale a** sen30º = r/R - r

-Então, sabendo que sen30º equivale a ½, temos que….

- ½ = r/R-r
- 2r = R-r
- R = 3r, **ou** r/R = ⅓

Então para acharmos a razão, aplicamos:

$$\frac{\pi r^2}{\pi R^2 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ}} = 6 \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{2}{3}.$$

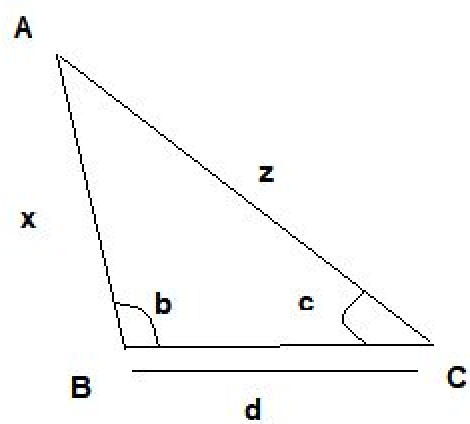
que nada mais é que a área do círculo dividida pela área do setor circular.

A resposta para a letra é ⅔.

4) Teodolito é um instrumento capaz de medir ângulos. Como se poderia calcular a distância entre você e um objeto muito distantes fazendo uso do teodolito e uma trena?

Resolução a nível Ensino Médio

Medindo o ângulo que o teodolito faz com uma reta. E com o auxílio da trena podemos medir a distância entre dois pontos distantes de uma distância d. Como na figura abaixo:



Com os ângulos b e c podemos calcular o ângulo Â, através da expressão:

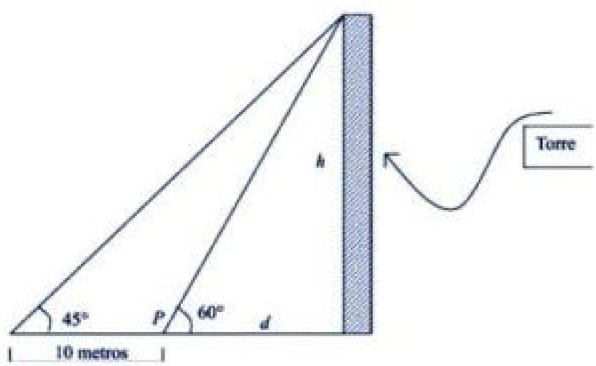
Â = 180º - (b + c)

Feito isso, podemo fazer uso da lei dos senos para calcular as distâncias x e z:

$$\frac{A}{sen\ \hat{A}} = \frac{z}{sen\ b} = \frac{x}{sen\ c}$$

5) (PM Paraná 2010 – Cops). Uma torre de observação é construída em uma região plana. Um bombeiro precisa determinar a altura h da torre. Ele observa a torre sob um ângulo de 60°, a partir de um ponto P, situado a d metros desta. Partindo de P, ao se afastar da torre por mais 10 metros, passa a vê-la sob um ângulo de 45°.Qual a altura da torre, em metros?

Resolução a nível Ensino Médio



Triângulo com ângulo de 60 graus

$tg60 = h/d$

$\sqrt{3} = h/d$

$d = h / \sqrt{3}$ (1)

Triângulo com ângulo de 45 graus

$tg45 = h/(d+10)$

$1 = h/(d+10)$

$h = d + 10$ (2)

Substituindo (1) em (2):

$h = h / \sqrt{3} + 10$ (multiplicar por $\sqrt{3}$)

$h\sqrt{3} = h + 10\sqrt{3}$

$h\sqrt{3} - h = 10\sqrt{3}$

$h(\sqrt{3} - 1) = 10\sqrt{3}$

$h = 10\sqrt{3} / (\sqrt{3} - 1)$