Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC

Disciplina MA224 - Resolução de Problemas Matemáticos

Felipe Ferreira RA:120919
Lucas Alvarez Tafarello RA:138726
Rafael Cintra Hensel Ferreira RA:92684
Thales Leite Montagnana RA:137693
Tiago Torres Dantas RA:150813

PROBLEMAS ENVOLVENDO PROBABILIDADE

UNICAMP

Campinas - SP
Novembro de 2015

Problema 1

a. *Quantas vezes, no mínimo, se deve lançar um dado para que a probabilidade de obter algum seis seja superior a 0,9 ?*

Resolução:

Vamos verificar qual a probabilidade de tirarmos um seis no lançamento de um dado qualquer:

Ao jogarmos um dado, pode aparecer em uma das seis faces os números: 1,2,3,4,5,6. (casos possíveis)

E há apenas uma possibilidade deste número ser 6. (casos favoráveis)

Pelo conceito de probabilidade temos:

$$P(6\ ocorrer) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{1}{6}$$

Considerando o teorema sobre evento complementar:

$P(6ocorrer^c) = 1 - P\ (6ocorrer)$

$P(6ocorrer\,) = 1 - \frac{5}{6}$

0,3

Queremos que a probabilidade seja superior a 0,9.

$1 - (\frac{5}{6}) > 0,9$

Seja n o número minimo de lançamento dos dados:

$1 - (\frac{5}{6})^n > 0,9$

$(\frac{5}{6})^n < 1 - 0,9$

$n > log_{\frac{5}{6}} 0,1 = \frac{-1}{-0,07918}$

0,7

n > 12,6

0,1

$n \geq 13$

Logo, o dado deve ser jogado no mínimo 13 vezes para que a probabilidade de sair seis seja maior que 0,9.

0,1

b. *Qual é a probabilidade de serem obtidas exatamente 5 caras em 10 lançamentos de uma moeda não-tendenciosa?*

Resolução:

Vamos verificar quantos casos possíveis podemos obter ao lançar a moeda dez vezes:

No primeiro lançamento temos duas possibilidades, no segundo possuímos mais duas possibilidades, até o décimo lançamento teremos mais duas possibilidades a cada lançamento, logo, pelo principio multiplicativo, o número de casos possíveis é $2^{10} = 1024$.

0,2

Vamos verificar quantos casos a moeda cara aparece exatamente cinco vezes:

Queremos saber de quantas maneiras diferentes aparece o lado "cara" da moeda em dez lançamentos, alguns exemplos:

(C C C C C C K K K K K) (K K K K K C C C C C C) (C K C K C K C K C K C)

C = coroa
K = cara
Queremos escolher as possibilidades que a moeda cara aparece 5 vezes em 10 lançamentos , ou seja, a combinação de 10 tomado 5 a 5.

$$C_5^{10} = \frac{10!}{5!\times(10-5)!} = \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5!}{5!\times5!} = 2\times3\times2\times7\times3 = 252 \text{ casos favoráveis}$$

0,4

Pelo conceito de probabilidade:

$$P(cara\ ocorrer\ 5vzs) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{252}{1024} = 0.24609375\ (\times 100) = 24,6\ \%$$

0,2

Problema 2

(Fuvest 2009 – segunda fase) *Um apreciador deseja adquirir, para sua adega, 10 garrafas de vinho de um lote constituído por 4 garrafas da Espanha, 5 garrafas da Itália e 6 garrafas da França, todas de diferentes marcas.*

a. *De quantas maneiras é possível escolher 10 garrafas deste lote?*

Resolução:
O número de maneiras de escolher 10 garrafas dentre as 15 deste lote é:

$$C_{10}^{15} = \frac{15!}{10!\,(15-10)!} = \frac{15\times14\times13\times12\times11}{5\times4\times3\times2\times1} = 3003$$

0,3

b. *De quantas maneiras é possível escolher 10 garrafas deste lote, sendo 2 garrafas da Espanha 4 da Itália e 4 da França?*

Resolução:
O número de maneiras de escolher 2 garrafas espanholas, 4 italianas e 4 francesas dentre as 15 do lote é:

$$C_2^4 \times C_4^5 \times C_4^6 = \frac{4!}{2!\times2!} \times \frac{5!}{4!\times1!} \times \frac{6!}{4!\times2!} = \frac{4\times3\times5\times6\times5}{2\times2} = 450$$

0,5

c. *Qual é a probabilidade de que, escolhidas ao acaso, 10 garrafas do lote, haja exatamente 4 garrafas da Itália e, pelo menos, uma garrafa de cada um dos outros dois países ?*

Resolução:
O número de maneiras de escolher 4 garrafas italianas é

$$C_4^5 = \frac{5!}{4!\times1!} = 5$$

0,3

O número de maneiras de escolher pelo menos uma garrafa de cada um dos outros países é:

$$C_6^{10} - 1 = \frac{10!}{6!\times4!} - 1 = \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1} - 1 = (10\times3\times7) - 1 = 210 - 1 = 209$$

0,6

Logo a probabilidade pedida é

$$P = \frac{C_4^5 \times (C_6^{10} - 1)}{C_{10}^{15}} = \frac{5 \times 209}{3003} = \frac{5 \times 19}{273} = 0,348 = 34,8\%$$

0,3

Problema 3

(FUVEST 2011 – Modificada)

Para a prova de um concurso vestibular, foram elaboradas 14 questões, sendo 7 de Português, 4 de Geografia e 3 de Matemática. Diferentes versões da prova poderão ser produzidas, permutando-se livremente estas 14 questões. A instituição responsável pelo vestibular definiu as versões classe A da prova como sendo aquelas que seguem o seguinte padrão: as 7 primeiras questões são de Português, a última deve ser uma questão de Matemática e, ainda mais: duas questões de Matemática não podem aparecer em posições consecutivas. Dado que um candidato vai receber uma prova que começa com 7 questões de Português, qual a probabilidade de que ele receba uma versão classe A?

Resolução:

Sabemos que o candidato receberá uma prova que começa com 7 questões de Português, sendo assim, o espaço amostral E que queremos é o conjunto de todas as provas possíveis que começam com 7 questões de Português.

Assim, há 7! maneiras de ordenar as questões de Português, que ocuparão as primeiras posições e 7! maneiras de ordenar as questões restantes. Sendo assim, o número de elementos do nosso espaço amostral E é $(7!)^2$.

0,4

Agora, contemos quantas são as provas classe A. Para que a prova seja de classe A, ela tem que satisfazer o seguinte padrão: P P P P P P P _ _ _ _ _ _ M, onde P representa uma questão de Português, e M de Matemática.

0,1

Temos permutações das questões de Português e 3 possibilidades para a última questão de Matemática. Precisamos analisar de quantas formas podemos permutar questões de Geografia (G) e Matemática nas lacunas em branco.

Como sabemos que a última questão é de Matemática e que questões de Matemática não podem aparecer em posições consecutivas, temos que a penúltima questão deve ser de Geografia, assim, temos 4 possibilidades de questões para a penúltima posição:

7! _ _ _ _ _ 4. 3

0,3

Vamos contar quantas permutações contém um bloco (MM), dentre as cinco questões faltantes. Assim, o total de permutações é: 4! × 2!, onde 4! representa a permutação entre o bloco (MM) e as 3 questões de Geografia, e 2! representa a permutação do bloco (MM). Sendo assim, do total de 5! permutações possíveis, aquelas que não contém duas questões de Matemática em posições consecutivas (MM) é em número de: 5! – (4! . 2!) = 72. Assim, o total de provas classe A é 7! .4. 3 . 72.

0,7

Portanto, dado que o candidato recebeu uma prova com as 7 primeiras questões sendo de Português, a probabilidade de ele ter recebido uma prova classe A é dada por:

$$\frac{7! \times 4 \times 3 \times 72}{(7!)^2} = \frac{4 \times 3 \times 72}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{6}{35}$$

0,5

Problema 4

(PUC-RIO 2009)
Jogamos dois dados comuns. Qual a probabilidade de que o total de pontos seja igual a 10?

Resolução:
Montando a tabela de da soma das faces possíveis dos dois dados temos:

Dado 1 / Dado 2	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
2	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
3	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
4	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	***10***
5	*6*	*7*	*8*	*9*	***10***	*11*
6	*7*	*8*	*9*	***10***	*11*	*12*

1,0

Número de casos possíveis (soma ser igual a 10) = 3
Número total de casos = 36 **0,3**
Seja o evento da soma das faces dos dois dados, então

$$P\ (X = 10)\ =\ \frac{3}{36}\ =\ \frac{1}{12}$$

0,7

Problema 5

Problema 8: EPCAR (AFA) 2016
Em uma mesa há dois vasos com rosas. O vaso A contém 9 rosas das quais 5 tem espinhos e o vaso B contem 8 rosas sendo que exatamente 6 não tem espinhos. Retira-se, aleatoriamente, uma rosa do vaso A e coloca-se em B. Em seguida, retira-se uma rosa de B.

Qual a probabilidade da rosa retirada de B ter espinhos?

Resolução 1:
Precisamos analisar dois cenários possíveis.

***1º caso** - A rosa retirada de A tem espinho:*

A probabilidade de retirar uma rosa do vaso A com espinhos é $\frac{5}{9}$ *. Sendo assim, após colocar esta rosa em B, a chance de retirar uma rosa em B com espinhos será de* $\frac{3}{9}$.

0,5

Portanto, a chance do caso 1 ocorrer é $\frac{5}{9} \times \frac{3}{9} = \frac{15}{81}$

0,4

***2º Caso** – A rosa retirada de A não tem espinho:*

A probabilidade de retirar uma rosa do vaso A sem espinhos é $\frac{4}{9}$*. Sendo assim, após colocar esta rosa em B, a chance de retirar uma rosa em B com espinhos será de* $\frac{2}{9}$*.*

0,5

Portanto, a chance do caso 1 ocorrer é $\frac{4}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{8}{81}$

0,4

Então a probabilidade final total será a soma desses dois casos, sendo assim:

$$\frac{8}{81} + \frac{15}{81} = \frac{23}{81}$$

0,2

Resolução 2:

Podemos dividir o experimento em dois experimentos distindos:

$$\varepsilon_A : \text{"Retira} - \text{se uma rosa do vaso A e coloca} - \text{se no vaso B."}$$

$$\varepsilon_B : \text{"Retira} - \text{se uma rosa do vaso B."}$$

Sendo assim, teremos dois espaços de probabilidade:

$$\Omega_A = \{ R_A^E ,\ R_A \} \qquad e \qquad \Omega_B = \{ R_B^E ,\ R_B \}$$ **0,4**

Portanto o espaço amostral do experimento inicial será:

$$\Omega_A \times \Omega_B = \{ (R_A^E , R_B),\ (R_A , R_B),\ (R_A^E ,\ R_B^E),\ (R_A ,\ R_B^E)$$

0,3

Onde R_A^E *é retirar uma rosa com espinhos de A e* R_A *é retirar uma rosa sem espinhos de A (análogo para B). Sendo assim, queremos a probabilidade* $P(\_ , R_B^E)$*.*

0,2

Definindo o evento A como "Retira-se uma rosa do vaso A com espinhos e B como "Retira-se uma rosa do vaso B com espinhos" e utilizando a lei da probabilidade total, teremos que:

$$P(\_ , R_B^E) = P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

0,5

$$P(B) = P(A) \times P(B|A) \times P(A^c) \times P(B|A^c)$$

$$P(B) = \frac{5}{9} \times \frac{3}{4} + \frac{4}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{23}{81}$$

0,6