UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

MA224 P – RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

T4 – Trigonometria e Suas Aplicações

GRUPO 1

Eduardo Silva de Luca, 145911

Fernando Bettelli Cintra de Oliveira, 138347

Tarik Eduardo Chuery, 177349

Professor Marcelo Martins dos Santos

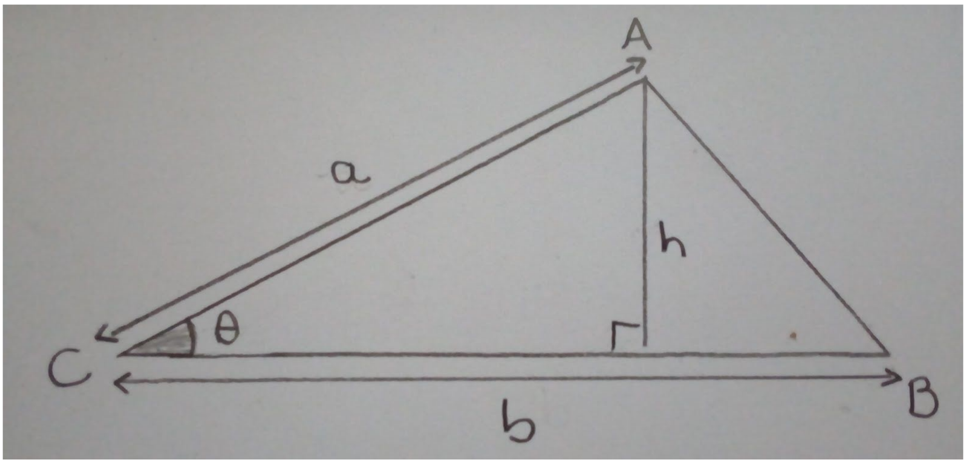
CAMPINAS, SP

NOVEMBRO, 2018

Exercício proposto pelo professor:

1) (Matemática Elementar, exercício C.398) Sejam a e b as medidas de dois segmentos BC e CA que têm uma extremidade comum e formam entre si um ângulo θ. Pede-se:
a) esboçar o gráfico da área S do triângulo ABC em função de θ;
b) dizer para que valor de θ é máximo o valor de S;
c) estabelecer qual é o acréscimo percentual em S quando θ passa de 30° para 120°.

I) Resolução a nível de Ensino Médio: [total de 2,0 pontos]

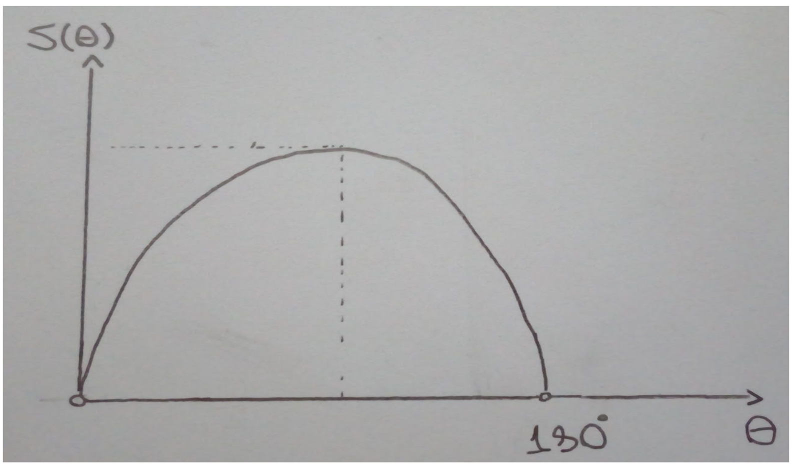


a) Para encontrarmos a área do triângulo ABC em função do seno de θ, devemos traçar a altura relativa ao vértice A, como na figura acima. pela definição de seno no triângulo retângulo, temos:

   senθ=h/a => h=a.senθ [0,5]

   Como a área de ABC é S=b.h/2, temos que S(θ)=a.b.senθ/2

   Para que ABC seja um triângulo, é preciso que 0°<θ<180°. Logo, o gráfico fica da seguinte forma: [0,5]



b) Para $0° < \theta < 180°$, sabemos que o valor máximo de $sen\theta$ é 1. Assim, a área máxima é $S = a.b/2$, quando $\theta = 90°$. [0,5]

c) $S(30°) = a.b.sen(30°)/2 = a.b.(½)/2 = a.b/4$
$S(120°) = a.b.sen(120°) = a.b.(\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}.a.b/4 = \sqrt{3}.S(30°)$

Como $\sqrt{3}$ vale aproximadamente 1,73, o aumento percentual de S quando θ passa de 30° para 120° é de 73%. [0,5]

II) Resolução a nível de Ensino Superior

Para resolver a nível de Ensino Superior, a única diferença com relação à solução (I) é a possibilidade de se utilizar a derivada para o cálculo do item (b). Assim, teríamos:

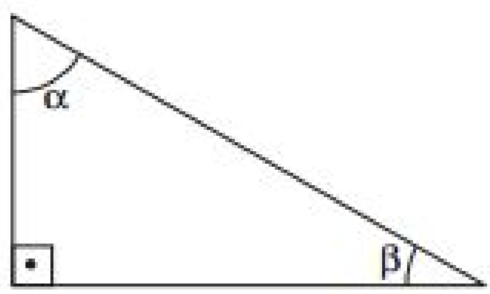
$dS/d\theta = a.b.cos\theta/2$

Devemos então igualar a derivada a 0:

$a.b.cos\theta/2 = 0 \Rightarrow cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = 90°$ é o valor para o qual S é máxima

Exercícios propostos pelo grupo:

1) **(FUVEST - 2005) Sabe-se que $x = 1$ é raiz da equação $(cos^2\alpha)x^2 - (4cos\ \alpha\ sen\ \beta)x + 2/3\ sen\ \beta = 0$, sendo α e β os ângulos agudos indicados no triângulo retângulo da figura abaixo. Quais são as medidas de α e β?**



Resolução [total de 2,0 pontos]:

Primeiramente, é importante notar que, já que os ângulos α e β são os ângulos agudos de um triângulo retângulo, então podemos afirmar as seguintes relações, que partem da trigonometria do triângulo retângulo:

$$\cos \alpha = \text{sen } \beta$$
$$\text{sen } \alpha = \cos \beta \text{ [0,5]}$$

Agora, basta que reescrever a equação dada no enunciado em termos de cos α, e ficamos com:

$$(\cos^2 \alpha)x^2 - (4.\cos \alpha.\cos \alpha)x + (3/2)\cos \alpha = 0$$
$$\Rightarrow (\cos^2 \alpha)x^2 - (4\cos^2 \alpha)x + (3/2)\cos \alpha = 0$$
$$\Rightarrow (2\cos^2 \alpha)x^2 - (8\cos^2 \alpha)x + 3\cos \alpha = 0$$
$$\Rightarrow (2\cos \alpha)x^2 - (8\cos \alpha)x + 3 = 0 \text{ [0,5]}$$

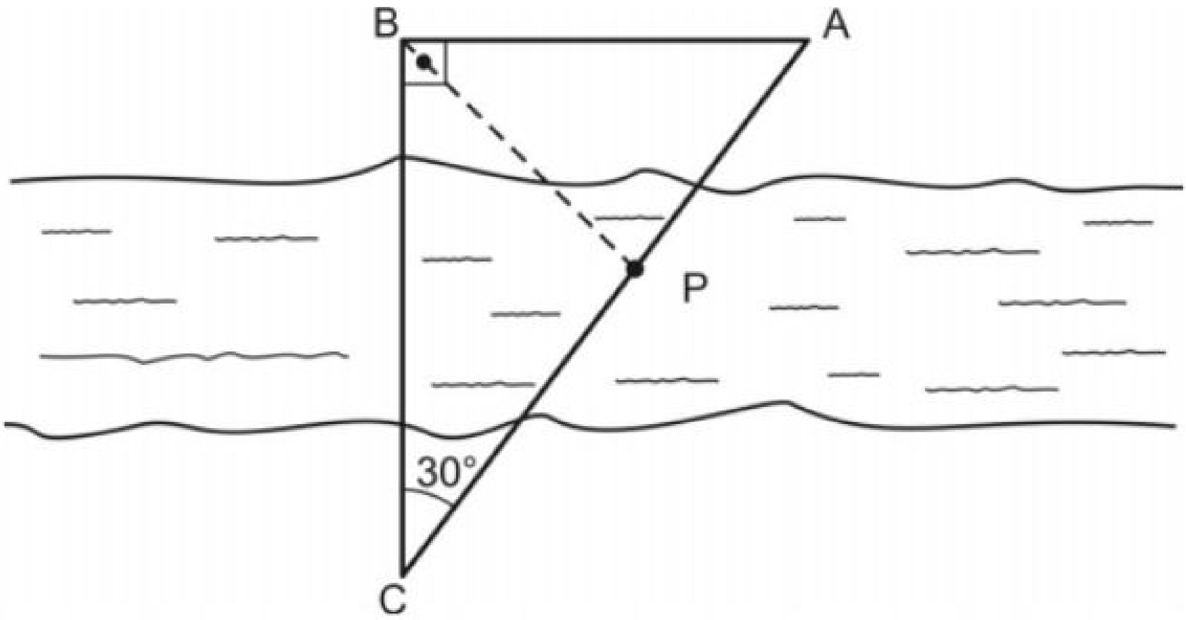
Já que, de acordo com o enunciado (e também pode ser verificado), $x = 1$ [0,5] é solução da equação, então:

$$\Rightarrow (2\cos \alpha)(1) - (8\cos \alpha)(1) + 3 = 0$$
$$\Rightarrow -6\cos \alpha + 3 = 0$$
$$\Rightarrow 6\cos \alpha = 3$$
$$\Rightarrow \cos \alpha = 0{,}5$$

Deste modo, podemos concluir então, pelo valor conhecido de cos α, que α é igual ao ângulo notável $\alpha = 60°$. De maneira direta, para completar os 180° dos ângulos internos de um triângulo, $\beta = 30°$. [0,5]

2) Epcar - 2016

As cidades A, B e C situam-se às margens de um rio e são abastecidas por uma bomba situada em P, conforme figura abaixo.



Sabe-se que o triângulo ABC é retângulo em B e a bissetriz do ângulo reto corta AC no ponto P. Se BC = $6\sqrt{3}$ km, então qual a medida de CP, em km?

Resolução **[Total de 2,0 pontos]:**

Podemos começar calculando o lado BA através das razões trigonométricas, visto que o triângulo ABC é retângulo e temos a medida do ângulo formado pelos lados BC e AC.

O lado BA é oposto ao ângulo dado (30º) e o lado BC é adjacente a este ângulo, portanto, iremos calcular usando a tangente de 30º:

$$tg(30^o) = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\overline{BA}}{6\sqrt{3}} \Rightarrow \overline{BA} = \frac{6\sqrt{9}}{3} = 6$$ [0,5]

Usando o Teorema de Pitágoras, podemos encontrar a medida do lado AC, que é a hipotenusa do triângulo retângulo:

$$(\overline{AC})^2 = (\overline{BA})^2 + (\overline{BC})^2 \Rightarrow (\overline{AC})^2 = 6^2 + (6\sqrt{3})^2 = 36 + 108 = 144 \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{144} = 12$$

Agora que já conhecemos as medidas dos lados do triângulo ABC, podemos calcular a medida do lado CP através do teorema da bissetriz interna. [0,5]

Para isso, observe que o lado PA é igual a 12 - PC, aplicando o teorema da bissetriz interna, temos:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{PA}} \Rightarrow \frac{6\sqrt{3}}{\overline{PC}} = \frac{6}{12 - \overline{PC}} \Rightarrow 6.\overline{PC} = 72\sqrt{3} - 6\sqrt{3}.\overline{PC}$$

$$6.\overline{PC} + 6\sqrt{3}.\overline{PC} = 72\sqrt{3} \Rightarrow \overline{PC} = \frac{72\sqrt{3}}{6(1+\sqrt{3})} = \frac{12\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}.\frac{(1-\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})} = 6(3-\sqrt{3})$$ [1,0]

3) (FUVEST) O número real *x*, com 0<*x*<*π* satisfaz a equação:

$$log_3(1 - cosx) + log_3(1 + cosx) = -2$$

então, qual o valor de cos2*x*+sen*x*?

Resolução [Total de 2,0 pontos]:

Por uma propriedade de logaritmos, podemos reescrever o lado direito da seguinte maneira:

$$log_3[(1 - cosx)(1 + cosx)] = -2 \Rightarrow log_3(1 - cos^2x) = -2$$

Pelo teorema fundamental da trigonometria, temos:

$sen^2x + cos^2x = 1 \Rightarrow sen^2x = 1 - cos^2x$ logo,

$log_3(1 - cos^2x) = log_3(sen^2x) = \ -2 \Leftrightarrow sen^2x = 3^{-2} \Rightarrow senx = \frac{1}{3}$ [0,75]

Substituindo o valor que achamos na equação do Teo Fund da Trigo, temos:

$(\frac{1}{3})^2 + cos^2x = 1 \Rightarrow cos^2x = \frac{8}{9}$ [0,5]

Pelo arco duplo do cosseno, sabemos que:

$cos(2x) = cos^2x - sen^2x = \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$ [0,5]

Portanto,

$cos(2x) + senx = \frac{7}{9} + \frac{1}{3} = \frac{10}{9}$ [0,25]

4) (Temas e Problemas, pág 73) Um corredor A está sobre uma reta r e corre sobre ela no sentido AX. Um corredor B não está em r e, correndo em linha reta, pretende alcançar A. Considere BAX=110°, velocidade de A igual a 8m/s e velocidade de B igual a 9m/s. Determine o ângulo que a trajetória de B deve fazer com a reta BA para que o encontro seja possível.

Resolução: [total de 2,0 pontos]

Seja t o tempo passado até que eles se encontrem. Temos então que a distância percorrida por A será 8t e por B 9t. [0,5]

Considerando o triângulo formado pelas posições iniciais de A e B e o ponto em que se encontram, podemos aplicar a Lei dos Senos, chamando de θ o ângulo procurado :[0,5]

$$9t/sen(110°) = 8t/sen\theta \Rightarrow sen\theta = 9/8.sen(110°)$$

$$\Rightarrow sen\theta = 0,835$$ [0,5]

Logo, o ângulo que B deve escolher para correr em relação à reta r é $\theta=56,6°$ [0,5]