Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Exponenciais e Logaritmos

Danilo Augusto Kanno Nogueira Baptista, RA: 155122
Julia de Oliveira Mello, RA: 176839
Letícia Fernandes Soriani, RA: 178811
Vitor Akio Watanabe, RA: 188303

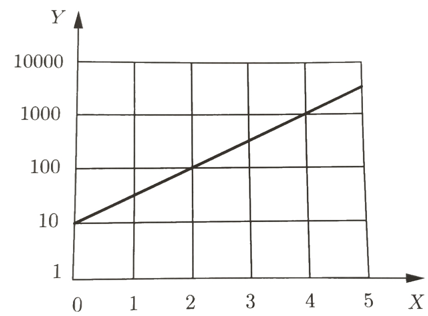
Professor Marcelo Martins dos Santos

Trabalho 3 do curso de MA224:
Resolução de Problemas Matemáticos,
2° *Sem/2018*

Campinas - SP

1 Exercício proposto pelo professor

O gráfico da figura a seguir foi desenhado utilizando-se uma escala logarítmica para o eixo Y (ou seja, as ordenadas no gráfico representam o logaritmo decimal dos valores da função).



a) Mostre que o gráfico de uma função f neste tipo de representação é uma reta se e somente se ela é do tipo exponencial ($f(x) = ba^x$).

b) Qual é a função representada pelo gráfico da figura?

Resolução nível Ensino Médio

a) Considere as seguintes afirmações:

I. o gráfico de uma função f neste tipo de representação é uma reta.

II. f é exponencial, ou seja, $f(x) = ba^x, b \neq 0, a > 0, a \neq 1$

Vamos mostrar que $I \Leftrightarrow II$.

Parte 1: $I \implies II$

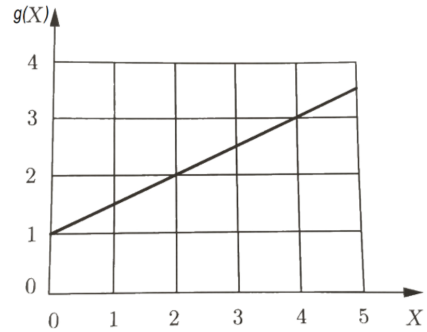
Seja f uma função cujo gráfico na escala logarítmica de base m é uma reta.

Seja g tal que $g(x) = log_m f(x)$, onde g é a função que determina as ordenadas na escala logarítmica.

Pela definição de logaritmo, vale que:

$$m^{g(x)} = f(x) \tag{1}$$

Observe que a função g na escala linear é equivalente a f na logarítmica. Isto pode ser verificado na figura a seguir através da relação $m^{g(x)} = f(x)$.



Daí, como $g(x)$ é uma reta, ela tem a forma:

$$g(x) = n + Kx \tag{2}$$

Assim, de (1) e (2), temos:

$$f(x) = m^{g(x)} = m^{n+Kx} = m^n \cdot m^{Kx}$$

pois $p^{q+r} = p^q \cdot p^r$, $\forall p, q, r \in \mathbb{R}$.

Como m e n são constantes, obtemos $f(x) = m^n \cdot m^{Kx} = b \cdot a^x$, com $b = m^n$ e $a = m^K$, pois $(p^q)^r = p^{qr}$, $\forall p, q, r \in \mathbb{R}$.

Logo, f é exponencial.

Parte 2: $II \implies I$

Seja f função exponencial da forma $f(x) = ba^x, b \neq 0, a > 0, a \neq 1$.

Seja g tal que $g(x) = log_m f(x)$, onde g é a função que determina as ordenadas na escala logarítmica.

Como

$$log_p(qr) = log_p(q) + log_p(r) \quad \forall p \in \mathbb{N}, q > 0, r > 0, q, r \in \mathbb{R} \tag{3}$$

e

$$log_p q^r = r log_p q \quad \forall p \in \mathbb{N}, q > 0, q \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R} \tag{4}$$

podemos substituir f em g e, a partir de (3) e (4), temos:

$$g(x) = log_m(ba^x) = log_m b + log_m a^x$$

ou seja,

$$g(x) = log_m b + x log_m a$$

Como $log_m b$ e $log_m a$ são constantes, definimos $n := log_m b$ e $K := log_m a$ e obtemos $g(x) = n + Kx$, que é a reta do gráfico de f na escala logarítmica de base m.

b) Sabemos, pelo item **(a)**, que

$$f(x) = ba^x, b \neq 0, a > 0, a \neq 1 \tag{5}$$

A análise do gráfico permite observar que os pontos (0,10), (2,100) e (4,1000) são pontos de f.

Daí, podemos substituir esses pontos em (5) e encontrar valores para a e b.

Substituindo (0,10) em (5), temos:

$$10 = ba^0 = b$$

pois $a^0 = 1$, $\forall a$. Logo, $b = 10$.

Substituindo (2,100) em (5), temos:

$$100 = ba^2$$

mas $b = 10$, ou seja,

$$100 = 10a^2 \implies a^2 = 10 \implies a = \sqrt{10}$$

A função representada é dada, então, por $f(x) = 10 \cdot (\sqrt{10})^x$. Mas, como $\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$, f pode ser reescrita como:

$$f(x) = 10 \cdot (\sqrt{10})^x = 10 \cdot (10^{\frac{1}{2}})^x = 10 \cdot 10^{\frac{x}{2}} = 10^{\frac{2+x}{2}}$$

Portanto, $f(x) = 10^{\frac{2+x}{2}}$

Observação

Como ainda temos o ponto (4,1000), podemos conferir se a função encontrada satizfaz estes valores. Assim, vamos calcular $f(4)$:

$$f(4) = 10^{\frac{2+4}{2}} = 10^{\frac{6}{2}} = 10^3 = 1000$$

Assim, $f(4) = 1000$, como esperado.

Resolução a outro nível

Autorizado pelo professor, o grupo não resolveu o exercício proposto em dois níveis. Assim, foi colocado, na seção de exercícios propostos pelo grupo, um exercício que pudesse ser resolvido em dois níveis diferentes de ensino.

2 Exercícios propostos pelo grupo

2.1 (Simulado Concurso Banco do Brasil)

As funções $y = a^x$ e $y = b^x$ com $a > b > 0$ têm gráficos que se interceptam em:

a) nenhum ponto;

b) 2 pontos;

c) 4 pontos;

d) 1 ponto;

e) infinitos pontos.

Resolução

Para encontrarmos o valor de x tal que os gráficos se interceptem, devemos igualar as duas equações. Assim, queremos encontrar x de forma que:

$$a^x = b^x$$

Como $b > 0$ por hipótese, temos:

$$\frac{a^x}{b^x} = 1$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = 1$$

Sendo o logaritmo a operação inversa da exponencial, podemos aplicá-lo na equação anterior, obtendo:

$$log\left(\frac{a}{b}\right)^x = log1$$
$$xlog\left(\frac{a}{b}\right) = log1$$

Como $log1 = 0$, a equação anterior se torna:

$$xlog\left(\frac{a}{b}\right) = 0$$

Dessa forma, $x = 0$ ou $log\left(\frac{a}{b}\right) = 0$.

Caso 1: $log\left(\frac{a}{b}\right) = 0$

$$log\left(\frac{a}{b}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b$$

mas $a > b$ por hipótese. Logo, $log\left(\frac{a}{b}\right) \neq 0$, o que nos leva ao próximo caso.

Caso 2: $x = 0$

Como não há hipóteses que contrariem este caso, temos que $x = 0$ é abscissa do ponto P de interseção dos gráficos.

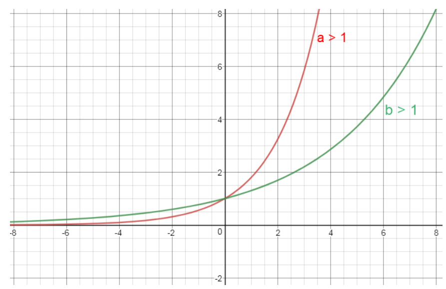
Substituindo nas equações, temos que P = (0,1), pois $a^0 = 1$ e $b^0 = 1$.

Logo, a alternativa correta é a ***b***, pois existe apenas um ponto de interseção entre os gráficos.

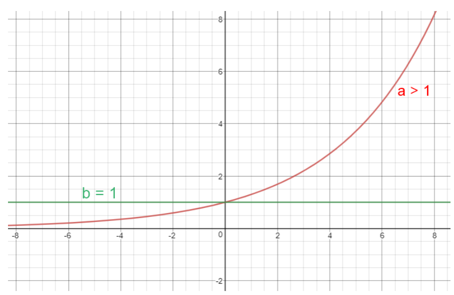
Observação

Uma forma de visualizar a resolução anteriormente apresentada é a partir da construção dos gráficos em 5 casos possíveis (considerando $a > b$ para facilitar a análise), fixados a e b dentro das condições estipuladas, ou seja:

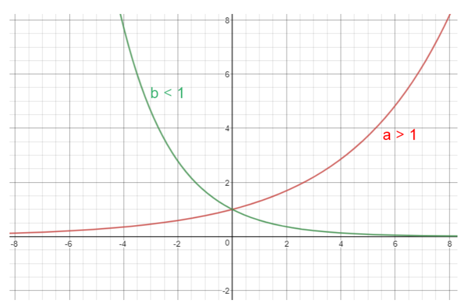
Caso 1: $a > 1$ e $b > 1$



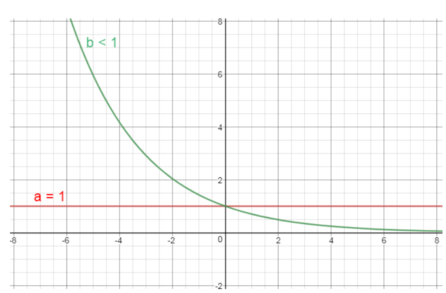
Caso 2: $a > 1$ e $b = 1$



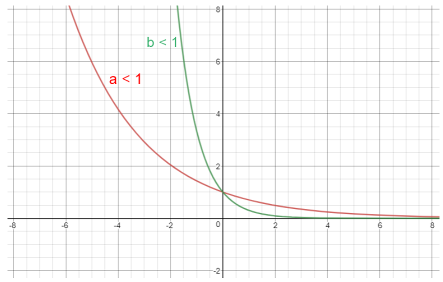
Caso 3: $a > 1$ e $b < 1$



Caso 4: $a = 1$ e $b < 1$



Caso 5: $a < 1$ e $b < 1$



2.2 (UDESC - 2014)

Considere $log(x) = \frac{5}{2}$, $log(y) = \frac{13}{5}$, $log(y - x) = 1,913$ e $log(x + y) = 2,854$. Com base nestes dados, analise as proposições:

I. $xy = 10^{\frac{51}{10}}$

II. $log(y^2 - x^2) = 0,2$

III. $log\left(\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}\right) = 0,608$

Assinale a alternativa correta:

a) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.

b) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.

c) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.

d) Somente a afirmativa I é verdadeira.

e) Todas as afirmativas são verdadeiras.

Resolução

Quando necessário o uso, considere $a, b, c \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{Z}$.

Vamos analisar cada uma das proposições:

I) Como $log(x) = \frac{5}{2}$, aplicando a definição, temos que $x = 10^{\frac{5}{2}}$.

Analogamente, como $log(y) = \frac{13}{5}$, $y = 10^{\frac{13}{5}}$.

Dessa forma:

$$xy = 10^{\frac{5}{2}} 10^{\frac{13}{5}}$$

$$xy = 10^{\frac{5}{2} + \frac{13}{5}}$$

Somando as frações do expoente, temos:

$$xy = 10^{\frac{5 \cdot 5 + 13 \cdot 2}{10}}$$

$$xy = 10^{\frac{25 + 26}{10}}$$

$$xy = 10^{\frac{51}{10}}$$

Logo, a proposição I é verdadeira.

II) Para encontrar o valor de $log(y^2 - x^2)$, é necessário lembrar que:

$$y^2 - x^2 = (y + x)(y - x) \tag{6}$$

e

$$log_c(ab) = log_c(a) + log_c(b) \tag{7}$$

Assim, por (6):

$$log(y^2 - x^2) = log(y + x)(y - x)$$

Por (7):

$$log(y + x)(y - x) = log(y + x) + log(y - x) \tag{8}$$

Do enunciado, $log(y + x) = log(x + y) = 2,854$ e $log(y - x) = 1,913$.

Disso e de (8):

$$log(y^2 - x^2) = log(y + x) + log(y - x) = 2,854 + 1,913 = 4,767$$

ou seja, $log(y^2 - x^2) = 4,767$.

Logo, a proposição II é falsa.

III) Para encontrar o valor de $log\left(\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}\right)$, é necessário lembrar que:

$$log_c\left(\frac{a}{b}\right) = log_c(a) - log_c(b) \tag{9}$$

e

$$log_c a^n = n log_c a \tag{10}$$

Além disso, perceba que $\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x} = \frac{x^2+2xy+y^2}{xy}$, pois:

$$\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x} = \frac{xx}{xy} + \frac{2xy}{xy} + \frac{yy}{xy} = \frac{x^2}{xy} + \frac{2xy}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{xy}$$

Desse modo:

$$log\left(\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}\right) = log\left(\frac{x^2 + 2xy + y^2}{xy}\right)$$

Por (9), temos

$$log\left(\frac{x^2 + 2xy + y^2}{xy}\right) = log(x^2 + 2xy + y^2) - log(xy)$$

Mas $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$, logo:

$$log(x^2 + 2xy + y^2) - log(xy) = log(x + y)^2 - log(xy)$$

Por (10), $log(x+y)^2 = 2log(x+y)$:

$$log(x^2+2xy+y^2) - log(xy) = 2log(x+y) - log(xy)$$

Portanto:

$$log\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right) = 2log(x+y) - log(xy) \tag{11}$$

De **I**, temos que $xy = 10^{\frac{51}{10}}$. Assim, pela definição, $log(xy) = \frac{51}{10}$. A partir disso, do enunciado e de (11), concluímos que

$$log\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right) = 2 \cdot 2,854 - \frac{51}{10} = 5,708 - 5,1 = 0,608$$

Logo, a proposição III é verdadeira.

Como I e III são verdadeiras, a alternativa correta é a alternativa $\boldsymbol{a}$.

2.3 (ITA - 2017)

Determine todos os valores reais de x que satisfazem a inequação:

$$4^{3x-1} > 3^{4x}$$

Resolução

Observe que se $4^{3x-1} > 3^{4x}$, então $\log 4^{3x-1} > \log 3^{4x}$.

Temos pela teoria que $\log_b a^c = c \cdot \log_b a$, assim:

$$(3x-1) \cdot \log 4 > (4x) \cdot \log 3$$

Observe que $\log 4 = \log 2^2 \implies \log 4 = 2\log 2$. Temos:

$$(6x-2) \cdot \log 2 > (4x) \cdot \log 3$$

$$(6x)\log 2 - 2\log 2 > (4x)\log 3$$

Subtraindo $(4x)\log 3$ e somando $2\log 2$ em ambos os lados:

$$(6x)\log 2 - (4x)\log 3 > 2\log 2$$

Colocando x em evidência:

$$(6\log 2 - 4\log 3)x > \log 4 \tag{12}$$

Temos que $6\log 2 = \log 2^6 = \log 64$ e ainda $4\log 3 = \log 3^4 = \log 81$. Podemos reescrever (12) como:

$$(\log 64 - \log 81)x > \log 4$$

Temos também pela teoria que $\log_b a - \log_b c = \log_b \frac{a}{c}$. Utilizando essa relação, podemos escrever:

$$\left(\log \frac{64}{81}\right)x > \log 4 \implies x < \frac{\log 4}{\log \frac{64}{81}}$$

Lembrando que invertemos o sinal pois $\log 64 - \log 81 < 0$. Daí, escrevemos:

$$x < \frac{2\log 2}{2\log \frac{8}{9}} \implies x < \frac{\log 2}{\log \frac{8}{9}} \tag{13}$$

Vimos que para mudar a base de um logaritmo $\log_b a$ para uma base c, podemos fazer $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$. Desta forma, realizando o processo inverso, como em (13) o numerador e o denominador possuem um logaritmo de mesma base, podemos escrever:

$$x < \log_{\frac{8}{9}} 2$$

2.4 (FUVEST - 1999)

Um jogo eletrônico funciona da seguinte maneira: no início de uma série de partidas, a máquina atribui ao jogador P pontos; em cada partida, o jogador ganha ou perde a metade dos pontos que tem no início da partida.

a) Se uma pessoa jogar uma série de duas partidas nas quais ela ganha uma e perde outra, quantos pontos terá ao final?

b) Se uma pessoa jogar uma série de quatro partidas nas quais ela perde duas vezes e ganha duas vezes, quantos pontos ela terá ao final?

c) Se uma pessoa jogar uma série de sete partidas, qual o menor número de vitórias que ela precisará obter para terminar com mais que P pontos?

Resolução nível Ensino Fundamental

a) Seguindo a ordem do enunciado, temos que o jogador ganhou a 1ª partida e perdeu a 2ª. Assim, sua pontuação é calculada da seguinte maneira:

- *Pontuação inicial* $= P$

- *Pontuação após a primeira partida* $= \frac{3P}{2}$, pois:

$$P + \frac{P}{2} = \frac{2P}{2} + \frac{P}{2} = \frac{2P + P}{2} = \frac{3P}{2}$$

- *Pontuação após a segunda partida* $= \frac{3P}{4}$, pois:

$$\frac{3P}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3P}{2} = \frac{3P}{2} - \frac{3P}{4} = \frac{6P}{4} - \frac{3P}{4} = \frac{6P - 3P}{4} = \frac{3P}{4}$$

Logo, ao final da série de duas partidas, a pessoa possuirá $\frac{3P}{4}$ pontos.

b) Seguindo a ordem do enunciado, temos que o jogador perdeu as duas primeiras partidas e ganhou as duas últimas. Assim, sua pontuação é calculada da seguinte maneira:

- *Pontuação inicial* $= P$

- *Pontuação após a primeira partida* $= \frac{P}{2}$, pois:

$$P - \frac{P}{2} = \frac{2P}{2} - \frac{P}{2} = \frac{2P - P}{2} = \frac{P}{2}$$

- *Pontuação após a segunda partida* $= \frac{P}{4}$, pois:

$$\frac{P}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{2} = \frac{P}{2} - \frac{P}{4} = \frac{2P}{4} - \frac{P}{4} = \frac{2P - P}{4} = \frac{P}{4}$$

- *Pontuação após a terceira partida* $= \frac{3P}{8}$, pois:

$$\frac{P}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{4} = \frac{P}{4} + \frac{P}{8} = \frac{2P}{8} + \frac{P}{8} = \frac{2P + P}{8} = \frac{3P}{8}$$

- *Pontuação após a quarta partida* $= \frac{9P}{16}$, pois:

$$\frac{3P}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3P}{8} = \frac{3P}{8} + \frac{3P}{16} = \frac{6P}{16} + \frac{3P}{16} = \frac{6P + 3P}{16} = \frac{9P}{16}$$

Logo, ao final da série de quatro partidas, a pessoa possuirá $\frac{9P}{16}$ pontos.

c) Das primeiras partidas dos itens **(a)** (vitória) e **(b)** (derrota), concluímos que a pontuação é sempre multiplicada por $\frac{3}{2}$ ou $\frac{1}{2}$, ou melhor, $3 \cdot \frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2}$.

Assim, dado n partidas e x vitórias, temos que a pontuação final R é o produto de P por $n - x$ termos $\frac{1}{2}$ e x termos $\frac{3}{2}$, ou seja :

$$R = \frac{1}{2} \cdot ... \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot ... \cdot \frac{3}{2} \cdot P = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-x} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x} \cdot P$$

Como $1^a = 1$, $\forall a \in \mathbb{R}$, e $2^{n-x} \cdot 2^x = 2^n$, temos:

$$R = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-x} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x} \cdot P = \frac{1}{2^n} \cdot 3^x \cdot P$$

Neste caso, vamos simular $n = 7$ partidas (com todas sendo derrotas) para depois saber por quantas vezes (x) precisamos multiplicar esse valor por 3 para que satisfaça o que pede o enunciado.

A simulação referida terá resultado:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot P\right)\right)\right)\right)\right)\right) = \frac{1}{2^7} \cdot P = \frac{P}{128}$$

Agora, basta ver quantas vezes precisamos multiplicar $\frac{P}{128}$ por 3 para que

$$R = \frac{P}{128} \cdot 3^x > P \tag{14}$$

Mas (14) é válida se, e somente se:

$$\frac{3^x}{128} > 1 \implies 3^x > 128$$

pois P $>$ 0. Ou seja, nosso objetivo é saber qual a menor potência x para que $3^x > 128$. Por tentativa:

- $x > 0$: $3^x = 3^0 = 1 < 128$
- $x > 1$: $3^x = 3^1 = 3 < 128$
- $x > 2$: $3^x = 3^2 = 9 < 128$
- $x > 3$: $3^x = 3^3 = 27 < 128$
- $x > 4$: $3^x = 3^4 = 81 < 128$
- $x > 5$: $3^x = 3^5 = 243 > 128$

Logo, o menor número de vitórias x (lembrando que $x \in \mathbb{N}$ pelo contexto), para que a pontuação final R seja maior que a inicial P, é 5.

Resolução nível Ensino Médio

Vamos analisar como ficam os pontos ao final de uma partida no caso em que a pessoa ganha e no caso em que a pessoa perde. Caso a pessoa tivesse P pontos e ganhe, ela terá os P pontos mais um adicional de metade dos seus pontos $(0,5(P))$, resultando em $1,5(P)$. Caso a pessoa perca, seus pontos se reduzirão pela metade, obteremos $0,5(P)$. Podemos perceber então que caso perca duas vezes, teremos:

$$0,5 \cdot (0,5P) \implies (0,5)^2(P)$$

O caso análogo vale para duas vitórias seguidas.

a) Supondo que inicialmente tinhamos P pontos, ao ganhar nosso novo total de pontos será $(1,5(P))$, de modo que quando perdermos, o resultado será:

$$0,5 \cdot (1,5(P)) = 0,75(P)$$

b) Jogando quatro partidas, como vimos que a ordem não importa devido à multiplicação ser associativa e comutativa, teremos $(1,5)^2(P)$ pelas vitórias que deverá ser multiplicado por $(0,5)^2$ pelas derrotas, resultando:

$$(0,5)^2 \cdot ((1,5)^2(P)) = (0,25) \cdot (2,25(P)) = 0,5625(P)$$

c) Jogando-se sete partidas, devemos ter $(0,5)^x \cdot (1,5)^y(P)$ pontos em que $x + y = 7$, com x como número de derrotas e y como número de vitórias.

Estamos interessados no menor valor de y tal que a relação acima vale P, assim, fazendo $x = 7 - y$, teremos:

$$(0,5)^{7-y} \cdot (1,5)^y(P) = P$$

Fazendo $0,5 = \frac{1}{2}$ e $1,5 = \frac{3}{2}$, temos:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{7-y} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^y (P) = P$$

$$\frac{1}{2^{7-y}} \cdot \frac{3^y}{2^y}(P) = P$$

$$\frac{3^y}{2^7}(P) = P \implies \frac{3^y}{2^7} = 1$$

$$3^y = 128$$

$$y = \log_3 128$$

$$y = 4,416508275$$

Ou seja, y, ou o número de vitórias, deve ser pelo menos 5 para que se termine com mais que P pontos.

3 Referências

Questão 2.1: https://simuladobrasilconcurso.com.br/prova/comentarios/questoes-simulados-e-provas-do-banco-do-brasil/112

Questão 2.2: https://brainly.com.br/tarefa/9422674

Questão 2.3: http://www.vestibular.ita.br/provas/matematica_2017.pdf

Questão 2.4: https://brainly.com.br/tarefa/10068274