Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Áreas de figuras planas

Amanda Soares Evaristo, RA: 154572

Danilo Augusto Kanno Nogueira Baptista, RA: 155122

Julia de Oliveira Mello, RA: 176839

Letícia Fernandes Soriani, RA: 178811

Vitor Akio Watanabe, RA: 188303

Professor Marcelo Martins dos Santos

Trabalho 2 do curso de MA224:
Resolução de Problemas Matemáticos,
2° Sem/2018

Campinas - SP

1 Exercício proposto pelo professor

Sejam um quadrado de lado 5 e uma parábola intersectando os vértices do quadrado em um dos lados, o qual chamaremos de base (do quadrado), e de altura medindo $(\frac{5}{2})^2$, em relação a esse lado. Por altura da parábola, queremos dizer o segmento perpendicular à base com uma extremidade nesse lado e com a outra extremidade no vértice da parábola. Mostrar que a área do quadrado é maior do que a área entre a parábola e a base.

Resolução nível Ensino Médio

Para encontrarmos a área entre a base do quadrado e a parábola, vamos dividi-la em oito retângulos de base $\frac{5}{8}$ e calcular a área de cada um deles de forma que, depois de somadas as oito áreas, tenhamos uma área maior do que a de fato queremos, pois se a área encontrada for menor que a do quadrado, saberemos com certeza que a área real também será. Como, se passarmos uma reta vertical em $x = \frac{5}{2}$, temos um desenho simétrico, vamos considerar somente metade dele e multiplicar as áreas por dois no final do exercício.

O parágrafo acima pode ser entendido através da imagem a seguir:

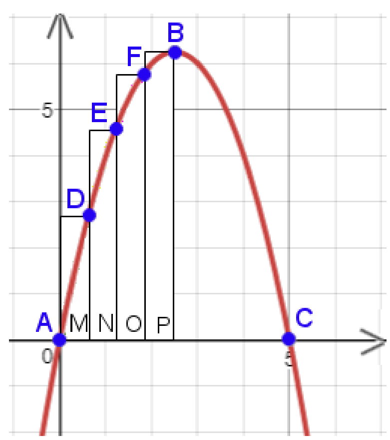


Figura 1: Em vermelho, temos a função $f(x)$ que iremos trabalhar. As áreas A_M, A_N, A_O e A_P são aproximações, por excesso, para a área da parábola. O eixo horizontal é o eixo x (das abscissas) e o eixo vertical é o eixo y (das ordenadas).

Sabemos que a área de um retângulo é calculada através da fórmula: $A_R = b \cdot h$, sendo b sua base e h sua altura.

Para encontrarmos as alturas de cada um dos retângulos, precisamos encontrar os valores de $f(x)$ correspondentes aos pontos D, E, F cujas abcissas são:

$x_D = \frac{5}{8}$

$x_E = 2 \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{4}$

$x_F = 3 \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{8}$

Como é uma parábola, temos que $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b, c $\in$R.

Temos três pontos pertencentes à parábola, como mostra o desenho anterior, e são eles A = (0,0), B = $(\frac{5}{2}, \frac{25}{4})$, C = (5,0). De cada um deles, obtemos as seguintes equações, substituindo em $f(x) = ax^2 + bx + c$:

De A:

$$0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$0 = c$$

Dessa forma, temos que $f(x) = ax^2 + bx$.

De B:

$$0 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5$$

$$0 = 25a + 5b$$

Divindindo a equação por 5:

$$0 = 5a + b$$

$$b = -5a$$

De C:

$$\frac{25}{4} = a \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5a \cdot \frac{5}{2}$$
$$\frac{25}{4} = a \cdot \frac{25}{4} - \frac{25a}{2}$$
$$\frac{25}{4} = \frac{25a}{4} - \frac{25a}{2}$$

Tirando o MMC do lado direito da equação:

$$\frac{25}{4} = \frac{25a - 50a}{4}$$

$$\frac{25}{4} = \frac{-25a}{4}$$

Multiplicando os dois lados por $\frac{4}{25}$

$$1 = -a$$

ou seja, $a = -1$.

Dessa forma, temos que $f(x) = -x^2 + 5x$.

Como já temos a função, podemos agora encontrar as ordenadas dos pontos D, E, F, que serão as alturas de cada um dos triângulos. Então:

$y_D = f\left(\frac{5}{8}\right) = -\left(\frac{5}{8}\right)^2 + 5 \cdot \frac{5}{8} = -\frac{25}{64} + \frac{25}{8} = \frac{175}{64}$

$y_E = f\left(\frac{5}{4}\right) = -\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 5 \cdot \frac{5}{4} = -\frac{25}{16} + \frac{25}{4} = \frac{75}{16}$

$y_F = f\left(\frac{15}{8}\right) = -\left(\frac{15}{8}\right)^2 + 5 \cdot \frac{15}{8} = -\frac{225}{64} + \frac{75}{8} = \frac{375}{64}$

Portanto as áreas M, N, O, P serão (de acordo com a equação de cálculo de A_R):

$A_M = \frac{5}{8} \cdot \frac{175}{64} \approx 1,71$

$A_N = \frac{5}{8} \cdot \frac{75}{16} \approx 2,93$

$A_O = \frac{5}{8} \cdot \frac{375}{64} \approx 3,66$

$A_P = \frac{5}{8} \cdot \frac{25}{4} \approx 3,91$

Como explicado no início da resolução, sabemos que a área total A_T dos oito retângulos é duas vezes a soma das áreas encontradas anteriormente, então:

$A_T = 2.(1,71 + 2,93 + 3,66 + 3,91) = 24,42$

Agora, vamos nos preocupar com a área do quadrado. A representação, no sistema de coordenadas escolhido, pode ser feita como a figura:

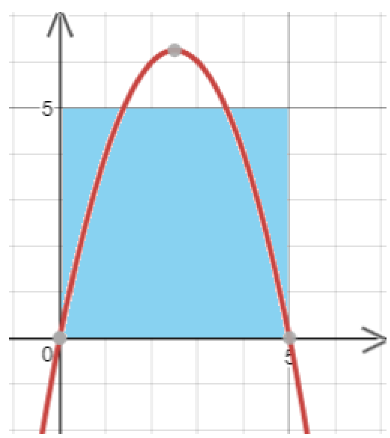


Figura 2: Em vermelho, temos a função $f(x)$ que iremos trabalhar e, em azul, temos o quadrado de lado 5. O eixo horizontal é o eixo x (das abscissas) e o eixo vertical é o eixo y (das ordenadas).

Sabemos, através da equação de A_R, que a área do quadrado é igual a:

$A_Q = 5.5 = 25$

Portanto temos que 24,42 < 25, e então a área entre a base do quadrado e a parábola é menor que a área do quadrado, como queríamos mostrar.

Resolução nível Ensino Superior

Considere o eixo de coordenadas colocado da seguinte forma:

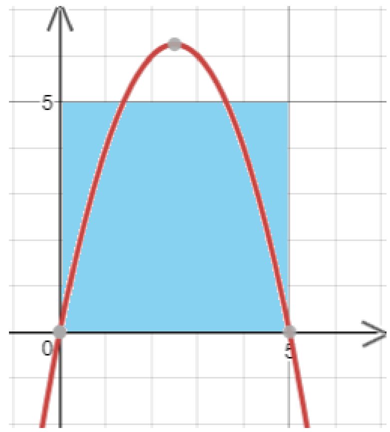


Figura 3: Em vermelho, temos a função $f(x)$ que iremos trabalhar e, em azul, temos o quadrado de lado 5. O eixo horizontal é o eixo x (das abscissas) e o eixo vertical é o eixo y (das ordenadas).

Seja A_p a área entre a parábola e a base. Encontrando a função f que descreve a parábola dada, sabemos que

$$A_p = \int_0^5 f(x)dx \tag{1}$$

Como é uma parábola, temos que $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b, c $\in$R.

Temos três pontos pertencentes à parábola, como mostra o desenho anterior, e são eles A = (0,0), B = ($\frac{5}{2}$, $\frac{25}{4}$), C = (5,0). De cada um deles, obtemos as seguintes equações, substituindo em $f(x) = ax^2 + bx + c$:

De A:

$$0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$0 = c$$

Dessa forma, temos que $f(x) = ax^2 + bx$.

De B:

$$0 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5$$

$$0 = 25a + 5b$$

Divindindo a equação por 5:

$$0 = 5a + b$$

$$b = -5a$$

Dessa forma, temos que $f(x) = ax^2 - 5ax$.

De C:

$$\frac{25}{4} = a \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5a \cdot \frac{5}{2}$$
$$\frac{25}{4} = a \cdot \frac{25}{4} - \frac{25a}{2}$$
$$\frac{25}{4} = \frac{25a}{4} - \frac{25a}{2}$$

Tirando o MMC do lado direito da equação:

$$\frac{25}{4} = \frac{25a - 50a}{4}$$

$$\frac{25}{4} = \frac{-25a}{4}$$

Multiplicando os dois lados por $\frac{4}{25}$

$$1 = -a$$

ou seja, $a = -1$.

Dessa forma, temos que $f(x) = -x^2 + 5x$ e podemos calcular a integral da expressão (1):

$$A_p = \int_0^5 f(x)dx$$

$$A_p = \int_0^5 -x^2 + 5xdx$$

$$A_p = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} \right]_0^5$$

$$A_p = \left(-\frac{5^3}{3} + \frac{5 \cdot 5^2}{2} \right) - \left(-\frac{0^3}{3} + \frac{5 \cdot 0^2}{2} \right)$$

$$A_p = -\frac{125}{3} + \frac{125}{2}$$

Tirando o MMC:

$$A_p = \frac{-250 + 375}{6}$$
$$A_p = \frac{125}{6}$$

Assim, $A_p \approx 20,83$.

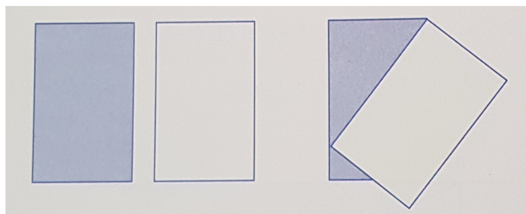
Sendo A_q a área do quadrado de lado 5, temos que $A_q = 5 \cdot 5 = 25$.

Como 25 $>$ 20,83, mostramos que $A_q > A_p$.

2 Exercícios propostos pelo grupo

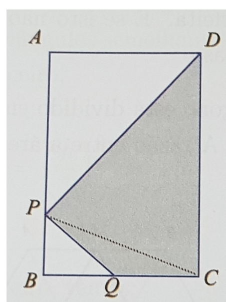
2.1

(Lima, E. et.al. Temas e Problemas Elementares, Cap. 5, Problema Proposto 5.10) Abaixo você vê dois retângulos iguais. Colocando um sobre o outro como mostra a figura, decida se o retângulo de cima cobriu mais da metade do retânguo de baixo, exatamente a metade, ou menos da metade.



Resolução

Primeiramente, vamos identificar os pontos de interesse como na figura abaixo



Observe que a parte coberta é o quadrilátero DPQC. Entretanto, o triângulo DCP tem área igual à metade da área do retângulo ABCD.

De fato, podemos definir que o triângulo DCP tem base igual ao lado CD do retângulo ABCD e altura igual ao lado BC do retângulo ABCD.

Então, a área do retângulo A_r e a área do triângulo DCP A_t podem ser descritas como:

$$A_r := (\text{área da base}) \times (\text{altura}) = BC \times CD$$

$$A_t := \frac{1}{2}(\text{área da base}) \times (\text{altura}) = \frac{BC \times CD}{2}$$

Assim,$A_t = \frac{A_r}{2}$

Logo, a parte coberta tem área maior que a metade da área do retângulo.

2.2

Sejam a, b, c os lados de um triângulo inscrito em uma circunferência de raio R. Sabendo que a área S do triângulo pode ser calculada como $S = \frac{bh}{2}$, onde h é a altura do triângulo relativa ao lado b, mostre que

$$S = \frac{abc}{4R}$$

Resolução

Considere a figura a seguir:

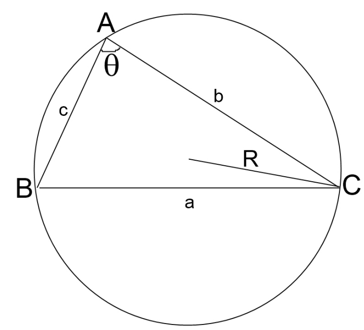


Figura 4: Triângulo ABC de lados a, b, c, inscrito em uma circunferência de raio R.

A demonstração do exercício se dará em duas partes.

Primeiramente, vamos mostrar que:

$$S = \frac{bh}{2} \implies S = \frac{bc \cdot sen(\theta)}{2}$$

com θ da figura:

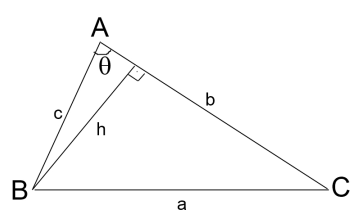


Figura 5: θ é o ângulo B$\hat{A}$C do triângulo ABC dado.

Pela definição de seno de um ângulo α no triângulo retângulo, ou seja,

$$sen(\alpha) = \frac{Cat.Oposto}{Hipotenusa}$$

temos que

$$h = c \cdot sen(\theta) \tag{2}$$

para o triângulo ADB:

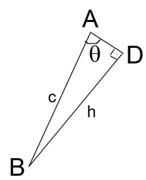


Figura 6: Triângulo ADB, retângulo em D e com ângulo BÂD $= \theta$

Sabemos que

$$S = \frac{bh}{2} \tag{3}$$

Assim, substituindo a expressão (2) em (3), temos:

$$S = \frac{b \cdot (c \cdot sen(\theta)}{2}$$

ou seja,

$$S = \frac{bc \cdot sen(\theta)}{2} \tag{4}$$

Agora, vamos mostrar que:

$$S = \frac{bc \cdot sen(\theta)}{2} \implies S = \frac{abc}{4R}$$

Considere a figura 4. Pela lei dos senos, vale que:

$$\frac{a}{sen(\theta)} = 2R \implies sen(\theta) = \frac{a}{2R} \tag{5}$$

Substituindo a expressão obtida em (5) em (4):

$$S = \frac{bc \cdot \left(\frac{a}{2R}\right)}{2}$$

$$S = bc \cdot \left(\frac{a}{2R}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$S = bc \cdot \frac{a}{4R}$$

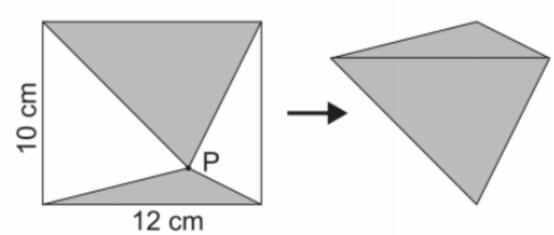
ou seja,

$$S = \frac{abc}{4R} \tag{6}$$

A equação (6) é a que queríamos mostrar.

2.3

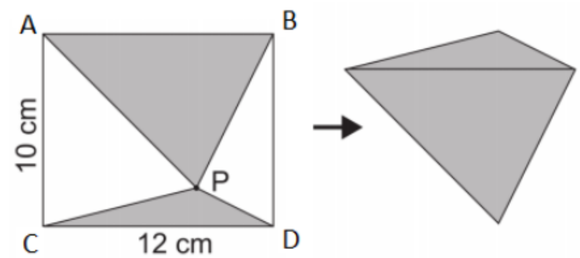
(OBMEP 2013 – 1ª fase) Juliana desenhou, em uma folha de papel, um retângulo de comprimento 12 cm e largura 10 cm. Ela escolheu um ponto P no interior do retângulo e recortou os triângulos sombreados como na figura. Com esses triângulos, ela montou o quadrilátero da direita.



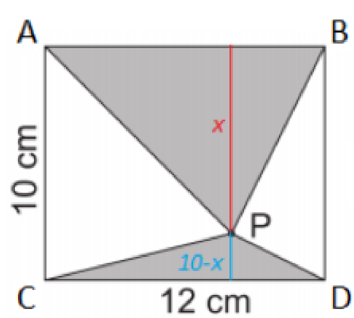
Qual é a área do quadrilátero?

Resolução

Vamos denominar os vértices do retângulo por A, B, C e D, como na figura a seguir:



Dado um ponto P qualquer no interior do retângulo, seja x a medida da altura do triângulo ABP relativa ao lado AB (distância de AB a P). Então, a medida da altura do triângulo CDP relativa ao lado CD (distância de CD a P) é $10 - x$, como indicado na figura abaixo:



Sejam S, S_1 e S_2 os valores das áreas do quadrilátero, do triângulo superior e do triângulo inferior, respectivamente. Estamos interessados em saber quanto vale S. Como o quadrilátero é composto apenas pelos dois triângulos, então S é equivalente à soma das áreas S_1 e S_2, ou seja,

$$S = S_1 + S_2 \tag{7}$$

Vamos calcular a área de cada um dos triângulos.

Para o triângulo ABP, temos as medidas $b_1 = 12\ cm$ e $h_1 = x\ cm$ como sua base e sua altura, respectivamente. Logo, sua área, dada pela metade do produto da base pela altura, é:

$$S_1 = \frac{b_1 \cdot h_1}{2} = \frac{12x}{2} = 6x \tag{8}$$

Isto é, $S_1 = 6x\ cm^2$

Para o triângulo CPD, as medidas $b_2 = 12\ cm$ e $h_2 = 10 - x\ cm$ são sua base e sua altura, respectivamente. Assim, temos que sua área é:

$$S_2 = \frac{b_2 \cdot h_2}{2} = \frac{12 \cdot (10 - x)}{2} = 6 \cdot (10 - x) = 60 - 6x \tag{9}$$

Isto é, $S_2 = 60 - 6x\ cm^2$

De 7, segue que

$$S = (6x) + (60 - 6x)$$

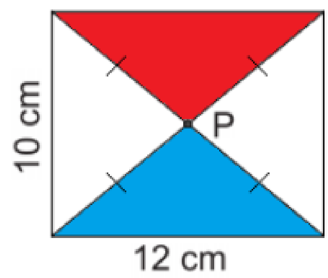
$$S = 60$$

Isto é, $S = 60\ cm^2$.

Observação

É interessante notar que o ponto P dado é um ponto qualquer e que não foi dada nenhuma variável no problema. Isso pode sugerir que o valor da área do quadrilátero é o mesmo para qualquer ponto interior.

Ou seja, podemos até pensar que a área de interesse é a mesma se o ponto P é o encontro das diagonais, que é o centro do retângulo. Neste caso, o triângulo formado pelas metades das diagonais junto com o lado de cima é congruente com o triângulo formado pelas metades das diagonais com o lado de baixo, como ilustrado na figura abaixo.



Logo, se P é o centro do retângulo, as áreas dos triângulos de cima e de baixo são iguais. Além disso, podemos calculá-las facilmente, já que a base b dos triângulos mede 12 cm e a altura h é metade da altura do retângulo, i.e., $h = \frac{10}{2} = 5\ cm$.

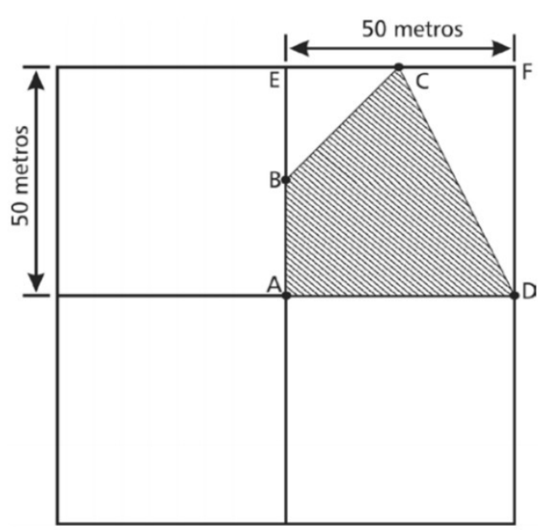
Assim, a área A de cada triângulo, calculada pela metade do produto da base pela altura, é

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{12 \cdot 5}{2} = \frac{60}{2} = 30 \tag{10}$$

Isto é, $A = 30\ cm^2$. Portanto, a área S do quadrilátero, que é a soma das áreas dos triângulos, é dada por $S = A + A = 30 + 30 = 60\ cm^2$.

2.4

(Cefet/MG - 2016) MODIFICADO: A área quadrada de um sítio deve ser dividida em quatro partes iguais, também quadradas, e, em uma delas, deverá ser mantida uma reserva de mata nativa (área hachurada), conforme mostra a figura a seguir.



Sabendo-se que B é o ponto médio do segmento $\overline{AE}$ e C é o ponto médio do segmento $\overline{EF}$, a área hachurada, em m^2, mede quanto?

Resolução

Primeiramente, note que por se tratarem de quadrados com áreas iguais, $\overline{AE} = 50m$ e como B é ponto médio, temos que $\overline{AB} = 25m$. Seja G o ponto médio de $\overline{AD}$. Temos que a área total é a soma da área do triângulo CDG com o trapézio $ABCG$.

Calculando a área

(I) A área de CDG é composta da base $\overline{GD} = 25m$ e da altura $\overline{GC} = 50m$ na seguinte relação

$$A_{CDG} = \frac{\overline{GD} \cdot \overline{GC}}{2} \implies A_{CDG} = \frac{25 \cdot 50}{2} \tag{11}$$

$$A_{CDG} = 625m^2 \tag{12}$$

(II) Como $ABCG$ é um trapézio, podemos calcular sua área utilizando a relação $\frac{(B+b)\cdot h}{2}$, em que $B = \overline{GC} = 50m$ representa a base maior, $b = \overline{AB} = 25m$ representa a base menor e por fim $h = \overline{AG} = 25m$. Portanto

$$A_{ABCG} = \frac{(B + b) \cdot h}{2} \implies A_{ABCG} = \frac{(\overline{GC}\overline{AB}) \cdot \overline{AG}}{2} \tag{13}$$

$$A_{ABCG} = \frac{(50 + 25) \cdot 25}{2} \implies A_{ABCG} = 937,5m^2 \tag{14}$$

Assim, a área da figura hachurada será

$$A_{CDG} + A_{ABCG} = 625 + 937,5 = 1562,5m^2 \tag{15}$$