# MA224 - Resolução de Problemas Matemáticos

Lista de Problemas

Trabalho 1


Grupo 3

Bárbara Vedovato Mulato RA 167107

Daniela Midori Kamioka RA 032064

Carlos Alberto Stefano Filho RA 101795

Giovani Grisotti Martins RA 146254

Maysa Laurindo Javoski Gomes RA 156767



Campinas
2018

**Problema 1 (proposto pelo professor).**

*Sejam OA, OB e OC semirretas não coplanares e x, y e z as medidas dos segmentos OX, OY e OZ, respectivamente contidos em OA, OB e OC. Prove que o volume do paralelepípedo que tem OX, OY e OZ como três das suas arestas é proporcional a x, y e z.*

***Resolução voltada ao ensino superior***

*Escrevendo vetorialmente (e denotando os vetores pelas quantidades em negrito) as semirretas:*

$$\boldsymbol{OA} = (x_a\,,\ y_a\,,\ z_a)$$

*o vetor que liga **A** à origem (coordenadas do ponto A)*

*Analogamente,*

$$\boldsymbol{OB} = (x_b\,,\ y_b\,,\ z_b)$$

$$\boldsymbol{OC} = (x_c\,,\ y_c\,,\ z_c)$$

*Como os outros segmentos estão contidos nos descritos acima, podemos escrevê-los como frações de **OA**, **OB** e **OC**:*

$$\boldsymbol{OX} = K_x\,\boldsymbol{OA}$$

*com* $K_x < 1 \Rightarrow$

$$\boldsymbol{OX} = K_x\,(x_a\,,\ y_a\,,\ z_a)$$

*e* $x = ||\boldsymbol{OX}||$

*Analogamente,*

$$\boldsymbol{OY} = K_y\,(x_b\,,\ y_b\,,\ z_b)$$

$K_y < 1$ *e* $y = ||\boldsymbol{OY}||$

$$\boldsymbol{OZ} = K_z\,(x_c\,,\ y_c\,,\ z_c)$$

$K_z < 1$ *e* $z = ||\boldsymbol{OZ}||$

*O volume V é dado por:*

$$V = ||(\boldsymbol{OX} \times \boldsymbol{OY}) \bullet \boldsymbol{OZ}|| = ||\boldsymbol{OX} \times \boldsymbol{OY}||\ ||\boldsymbol{OZ}||\ |\cos\Pi|$$

*Onde Π é o ângulo entre **OZ** e a normal ao plano definido por **OX** e **OY**. Então:*

$$V = ||\boldsymbol{OX}||\ ||\boldsymbol{OY}||\ |sen\Omega|\ ||\boldsymbol{OZ}||\ |cos\Pi|$$

*Onde Ω é o ângulo entre* ***OX*** *e* ***OY****. Assim:*

$$V = |sen\Omega cos\Pi|\ ||\boldsymbol{OX}||\ ||\boldsymbol{OY}||\ ||\boldsymbol{OZ}||$$

*Dadas as orientações dos vetores* ***OX****,* ***OY*** *e* ***OZ*** *(ou seja, dados os pontos A, B e C), os ângulos Ω e Π são obtidos e o termo senΩcosΠ é constante (prova abaixo). Assim, denotando |senΩcosΠ| ≡K:*

$$V = K\ ||\boldsymbol{OX}||\ ||\boldsymbol{OY}||\ ||\boldsymbol{OZ}||$$

*Vamos provar que K é constante se* ***OX****,* ***OY*** *e* ***OZ*** *forem multiplicados por um escalar:*

*O ângulo ¥ entre dois vetores* ***A*** *e* ***B*** *é dado por:*

$$¥ = arc\ cos\ \left(\frac{1}{AB}\ \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}\right) = arc\ cos\ \left\{ \frac{(x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b)}{AB} \right\}\ (1)$$

*Se* ***A*** *(para* ***B*** *é análogo) for multiplicado por um escalar r (logo seu módulo e suas componentes também serão), teremos que o novo ângulo ¥' é:*

$$¥' = arc\ cos\ \left\{ \frac{(r x_a x_b + r y_a y_b + r z_a z_b)}{rAB} \right\} = arc\ cos\ \left\{ \frac{r(x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b)}{rAB} \right\}$$

$$¥' = arc\ cos\ \left\{ \frac{(x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b)}{AB} \right\}\ (2)$$

*Além disso,*

$$¥ = arc\ sen\ \left(\frac{1}{AB}\ ||\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}||\right) = arc\ sen\ \left\{ \frac{||(y_a z_b - y_b z_a,\ x_b z_a - x_a z_b,\ x_a y_b - x_b y_a)||}{AB} \right\}\ (3)$$

*Novamente, se* ***A*** *(para* ***B*** *é análogo) for multiplicado por um escalar r (logo seu módulo e suas componentes também serão), teremos que o novo ângulo ¥' é:*

$$¥' = arc\ sen \left\{ \frac{\|(ry_a z_b - y_b r z_a, x_b r z_a - r x_a z_b, r x_a y_b - x_b r y_a)\|}{rAB} \right\}$$

$$¥' = arc\ sen \left\{ \frac{\|r(y_a z_b - y_b z_a, x_b z_a - x_a z_b, x_a y_b - x_b y_a)\|}{rAB} \right\}$$

$$¥' = arc\ sen \left\{ \frac{\|(y_a z_b - y_b z_a, x_b z_a - x_a z_b, x_a y_b - x_b y_a)\|}{AB} \right\} \ (4)$$

*Da comparação entre (1) e (2), (3) e (4) => ¥' = ¥*

*Logo o ângulo entre os vetores não se altera se um deles é multiplicado por um escalar e, assim, K é de fato constante.*

*Por fim:*

$$V = V(x, y, z) = Kxyz$$

*Ou seja, V é diretamente proporcional à x, y e z.*

### ***Resolução voltada ao ensino médio***

Para abordarmos o caso mais geral, pensemos em um paralelepípedo que não seja reto, como o da Figura 1, abaixo.

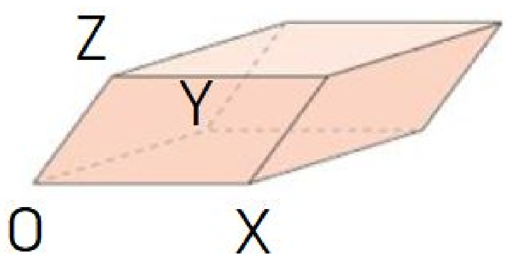


**Figura 1. Ilustração do paralelepípedo oblíquo utilizado na resolução do problema.**

Partindo da ideia de que o volume deste paralelepípedo será dado pelo produto entre a área de sua base ($A_b$) e sua altura (H), podemos equacionar:

$$V = A_b H.$$

Desta forma, para relacionarmos $V$ a $x$, $y$ e $z$, precisamos expressar $A_b$ e $H$ em termos destas quantidades.

Tomando apenas a base do paralelepípedo, podemos observar um paralelogramo como o da Figura 2, com as dimensões já referidas pelo enunciado do problema; chamamos de $\alpha$ o ângulo referido na figura.

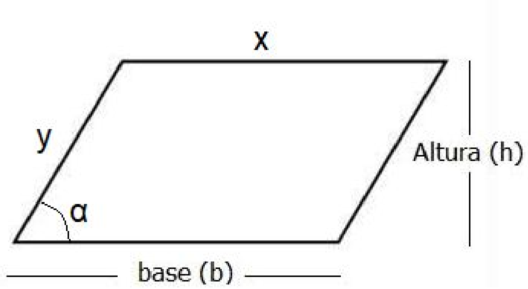


**Figura 2. Ilustração do paralelogramo correspondente à base do paralelepípedo do problema.**

Como a área do paralelogramo corresponde à área da base do paralelepípedo, podemos escrever

$$A_b = xh.$$

Como $h = ysen\alpha$, então:

$$A_b = xysen\alpha;$$

e, assim, obtemos o valor da área da base do paralelepípedo.

Agora, notemos que a altura H do paralelepípedo oblíquo da Fig. 1 pode ser relacionada à medida de $z$ por (Figura 3):

$$H = zcos\beta.$$

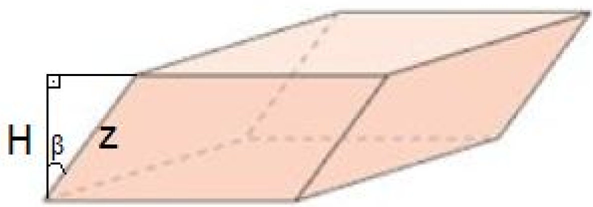


**Figura 3. Ilustração da relação entre *H* e *z* para o paralelepípedo do problema.**

Portanto, a expressão para $V$, substituindo aquelas encontradas para $A_b$ e $H$, será:

$$V = xyzsen\alpha cos\beta.$$

Como dadas as dimensões x, y e z os ângulos $\alpha$ e $\beta$ são fixos, podemos definir uma constante $k$ tal que $k = sen\alpha cos\beta$, de modo que a expressão para $V$ toma a forma

$$V = kxyz,$$

ou seja, $V$ é proporcional ao produto da medida dos lados do paralelepípedo.

**Problema 2.**

*(Lima et al., 2016) Para encher o primeiro dos tanques acima, abriu-se uma torneira. Após 15 minutos a altura da água era de 8 cm. Supondo constante a vazão da torneira, em quanto tempo o tanque estaria cheio? Uma torneira com a mesma vazão sendo colocada no segundo tanque, qual seria a altura da água despejada após 15 minutos? Em quanto tempo este outro tanque estaria cheio?*

O problema anterior a que se refere o enunciado é:

"Dois tanques, em forma de blocos retangulares, têm o mesmo volume. O primeiro tem 1,2 m de profundidade e sua tampa mede 18 m². O segundo tem dois metros de profundidade. Qual deve ser a medida da tampa para cobri-lo?"

*Resolução:*

$$V_1=V_2 \Rightarrow 1{,}2\times 18=2\times A \Rightarrow A=10{,}8\ m^2$$

*Resolução do problema voltada ao Ensino Médio*

A partir dos dados do problema anterior, observamos que o primeiro tanque tem 1,2 m de profundidade, com uma tampa de área de 18 $m^2$. Como a vazão é uma relação entre o volume de água e o tempo, a relação de proporção se dá entre estas duas grandezas, e não diretamente com o comprimento dos tanques. Portanto, precisamos, primeiramente, calcular o volume do tanque. Como seu formato é retangular, o volume $V_1$ do primeiro deles será dado por (lembrando que o volume do cilindro pode ser calculado pelo produto de sua área de base e altura):

$$V_1 = 1{,}2\ \text{m} \times 18\ \text{m}^2 = 21{,}6\ \text{m}^3$$

O problema nos dá que, após 15 minutos, a altura da coluna de água no primeiro tanque era de 8 cm; isto corresponde a um volume de água $V_{água}$ de:

$$V_{água} = 0{,}08\ m \times 18\ m^2 = 1{,}44\ m^3.$$

Sendo assim, como a vazão da torneira é constante e as grandezas volume e tempo são proporcionais, a razão entre elas será igual a uma constante de proporcionalidade. Logo, para encontrar o número *x* de minutos, podemos equacionar:

$$\frac{1,44\ m^3}{15\ min} = \frac{21,6\ m^3}{x\ min}$$

Logo,

x = (21,6 x 15)/1,44

x = 225 min.

Assim, o primeiro tanque estaria cheio em 225 minutos.

Para o segundo tanque, precisamos encontrar a altura da coluna de água dentro dele após 15 minutos e em quanto tempo ele estaria cheio. Como a torneira possui a mesma vazão da primeira, a constante de proporcionalidade entre o volume de água e o tempo para atingi-lo continuará igual. Portanto:

$$\frac{1,44\ m^3}{15\ min} = \frac{V_2\ m^3}{15\ min}$$

$V_2 = 1,44\ m^3$.

Como este tanque possui (de acordo com a resolução do problema anterior) uma tampa de 10,8 m², a altura da coluna de água (h) será:

$$h = \frac{1,44}{10,8} = 0,13\ m.$$

Para encher completamente o tanque 2, precisaremos despender um tempo *y* tal que:

$$\frac{1,44\ m^3}{15\ min} = \frac{21,6\ m^3}{y\ min}$$

$$y = \frac{21,6\ x\ 15}{1,44}$$

$$y = 225 \text{ min}$$

(igual ao resultado para o outro tanque, já que os volumes são iguais).

*Resolução voltada ao ensino superior*:

A vazão da torneira, dada como constante, pode ser calculada através de:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \eta = \frac{0{,}08\times 18}{15\times 60} \Rightarrow \eta = 1{,}6\times 10^{-4} m^3/s$$

Note que a vazão instantânea é igual à vazão média, quando a vazão é constante.

O volume de água despejado no segundo tanque, em 15 minutos, será de

$$\int_0^{15\times 60} \eta(t)\, dt = \eta\times 900 = 1{,}44\ m^3$$

Então, no tanque 2:

$$1{,}44 = A\times h = 10{,}8\times h \Rightarrow h \approx 13{,}3 \text{ cm}$$

Para enchê-lo, devemos ter:

$$\int_0^t \eta(t')\, dt' = 21{,}6 \Rightarrow \eta t = 21{,}6 \Rightarrow t = 13500\ s = 225\ min = 3{,}75\ h$$

**Problema 3.** *(Lima et al., 2016) Cada vez que a temperatura varia 1 grau centígrado, ela varia 1,8 graus Fahrenheit. Sabendo que 0 °C = 32 °F quantos graus F correspondem a 30 °C?*

**Resolução**

De acordo com o enunciado, as variações de temperatura nas duas escalas estão relacionadas pelo fator de proporcionalidade de 1,8; ou seja, se chamarmos de $\Delta C$ e $\Delta F$ estas variações nas escalas Celsius e Fahrenheit, respectivamente, então:

$$\frac{\Delta F}{\Delta C} = 1,8\ {}^{o}F/{}^{o}C.$$

Assumindo que a temperatura variou de 0 °C aos 30 °C requeridos (ou seja, $\Delta C = 30\ {}^{o}C$) , então a variação correspondente $\Delta F$ será

$$\frac{\Delta F}{30\ {}^{o}C} = 1,8\ {}^{o}F/{}^{o}C.$$

$$\Delta F = 54\ {}^{o}F.$$

Como a 0°C corresponde 32 °F e a variação de temperatura se iniciou a 0 ºC, então:

$$F - 32 = 54\ {}^{o}F.$$

$$F = 86\ {}^{o}F.$$

Portanto, a temperatura na escala Farenheit que corresponde a 30 °C é de 86 °F.

**Problema 4.**

(ENEM 2012) O esporte de alta competição da atualidade produziu uma questão ainda sem resposta: Qual é o limite do corpo humano? O maratonista original, o grego da lenda, morreu de fadiga por ter corrido 42 quilômetros. O americano Dean Karnazes, cruzando sozinho as planícies da Califórnia, conseguiu correr dez vezes mais em 75 horas. Um professor de Educação Física, ao discutir com a turma o texto sobre a capacidade do maratonista americano, desenhou na lousa uma pista reta de 60 centímetros, que representaria o percurso referido.

*Disponível em: http://veja.abril.com.br. Acesso em: 25 jun. 2011 (adaptado).*

Se o percurso de Dean Karnazes fosse também em uma pista reta, qual seria a escala entre a pista feita pelo professor e percorrida pelo atleta?

a) 1:700

b) 1:7.000

c) 1:70.000

d) 1:700.000

e) 1:7.000.000

**Resolução**

Conforme o enunciado da questão, temos que o maratonista americano Dean Karnazes correu dez vezes mais que o maratonista grego que havia corrido 42 km, então temos que o percurso corrido pelo americano será $42 \times 10 = 420\ km$

Portanto, o americano percorreu 420 km em 75 horas.

A questão solicita que encontre a escala entre o desenho do professor de 60 cm e o percurso real percorrido pelo maratonista.

Dado que $420\ km = 420 \times 10^5 cm$ e que uma escala entre duas medidas é uma proporcionalidade, temos que:

$$E = \frac{60}{420x10^5} = \frac{1}{700000}$$

Portanto, temos que a proporcionalidade do desenho do professor e o percurso real é 1:700000.

Alternativa D.

**Problema 5.**

(OBMEP 2018) Marcos comprou 21 litros de tinta. Ele usou água para diluir essa tinta até que a quantidade de água acrescentada fosse 30% do total da mistura. Quantos litros de água ele usou?

A) 5

B) 6

C) 7

D) 8

E) 9

**Resolução**

O enunciado diz que a quantidade de tinta (21 litros) é 70% do total da mistura, já que a água deve corresponder só a 30% do total. Seja x a quantidade de litros de água usada para diluir a tinta. Logo, x+21 representa o total da mistura de tinta com água. Usando a regra de três:

$$\begin{array}{ccc} 21\text{ L} & \rightarrow & 70\% \\ (21+x)\text{ L} & \rightarrow & 100\% \end{array}$$

$\Rightarrow x = 9$ L

Portanto foram usados 9 litros de água para diluir a tinta. Alternativa E.

**Lista de referências**

Lima EL, Carvalho PCP, Wagner E, Morgado AC. Temas e Problemas Elementares, 4ª ed., Sociedade Brasileira de Matemática (2016).

Problema 4 - http://educacao.globo.com/provas/enem-2012/questoes/136.html acessado em 19 de agosto de 2018.