UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Teoria da proporcionalidade

Amanda Soares Evaristo, RA: 154572

Danilo Augusto Kanno Nogueira Baptista, RA: 155122

Julia de Oliveira Mello, RA: 176839

Letícia Fernandes Soriani, RA: 178811

Vitor Akio Watanabe, RA: 188303

Professor Marcelo Martins dos Santos

Trabalho 1 do curso de MA224:
Resolução de Problemas Matemáticos,
2° *Sem/2018*

Campinas - SP

1 Exercício proposto pelo professor

(a) Se para pintar, com uma só demão, um cubo de lado medindo 50cm se usa $\frac{1}{4}$ de litro de tinta, qual é a espessura da demão?

(b) Se para pintar um cubo de lado medindo 50cm se usa $\frac{1}{4}$ de litro de tinta, quanto se usaria para pintar um cubo de lado medindo 1m?

Resolução item (a)

Sejam:

- V: volume de tinta usado para pintar uma demão;

- e: espessura da demão;

- A_c: área do cubo a ser pintada.

O cubo é formado por 6 quadrados de aresta 50cm.

Assim, a área **A** a ser pintada é igual a 6 vezes a área A_q de cada quadrado.

Antes de realizarmos os cálculos, devemos nos atentar às unidades utilizadas no problema. O enunciado diz que é usado $\frac{1}{4}$ de litro de tinta, ou seja, 250mL.

Sabemos que 1mL equivale a $1cm^3$, logo, $V = 250cm^3$.

Logo:

$$V = A_c \cdot e = 6 \cdot Aq.e$$

$$250 = 6 \cdot 50^2 \cdot e$$

$$250 = 6 \cdot 2500 \cdot e$$

$$1 = 60 \cdot e$$

$$e = \frac{1}{60}cm \approx 0,01666...cm$$

Sendo assim, a espessura da demão é, aproximadamente, 0,0167 cm.

Resolução item (b) nível Ensino Fundamental (8º ano)

Devemos lembrar que a proporção não é entre a medida do lado e o volume de tinta utilizado, mas sim entre o volume de tinta utilizado para pintar um cubo e o outro.

De fato, como a espessura de tinta é constante, ela funciona como uma constante de proporcionaliade entre o volume do cubo e o volume de tinta. Assim, temos uma função linear entre os volumes caracterizando uma proporcionalidade.

Do item anterior, sabemos que o volume da camada de tinta utilizada para pintar um cubo de aresta 50cm (vamos chamar de V_{50}) é:

$$V_{50} = 6 \cdot 50^2 \cdot \frac{1}{60} cm^3 \mapsto \frac{1}{4} L$$

Assim, temos como incógnita (x) a quantidade de tinta que deve ser utilizada ao pintar o cubo de 1m (ou 100cm) de lado.

Deste modo:

$$V_{100} = 6 \cdot 100^2 \cdot \frac{1}{60} cm^3 \mapsto x$$

Podemos escrever, então, as seguintes relações:

$$V_{50} = 250 cm^3 \mapsto \frac{1}{4} L$$

$$V_{100} = 1000 cm^3 \mapsto x$$

Assim, basta realizar uma "multiplicação em cruz", ou seja:

$$1000 \cdot \frac{1}{4} = 250 \cdot x$$

$$250 = 250 \cdot x$$

$$\frac{250}{250} = x \implies x = 1L$$

Deste modo, para pintar um cubo de lado 1m com a mesma espessura de tinta utilizada no item (a), é necessário 1L de tinta.

Resolução item (b) nível Ensino Médio

Vamos utilizar os dados fornecidos pelo problema para definir uma função que relacione ao volume V de tinta utilizada para pintar um cubo de lado L em centímetros.

Assim:

$$V(L) \coloneqq 6 \cdot \frac{1}{60} \cdot L^2$$

O enunciado pede para encontrar o volume de tinta utilizado para pintar um cubo de lado 1m (ou 100cm). Dessa forma, queremos saber V(100).

Substituindo na lei de função definida anteriormente, temos:

$$V(100) = 6 \cdot \frac{1}{60} \cdot 100^2$$

$$V(100) = \frac{6}{60} \cdot 10000$$

$$V(100) = \frac{1}{10} \cdot 10000$$

$$V(100) = \frac{10000}{10} \implies V(100) = 1000cm^3$$

Como $1cm^3 = 1mL$

OBS: Podemos observar que a resposta é condizente com o problema, pois se considerarmos dobrar a aresta de um cubo, estaríamos multiplicando a área de cada uma de suas faces por 4, pois $A' = (2L)^2 = 2^2 \cdot L^2 = 4L^2 = 4A$, e como a espessura é constante, o volume também seria quadruplicado, como podemos confirmar com os cálculos acima.

2 Exercícios propostos pelo grupo

2.1

Pela construção de uma residência, um grupo com 4 pedreiros recebeu R$3540,00 ao todo. O primeiro trabalhou 15 dias à razão de 4 horas por dia; o segundo trabalhou 25 dias à razão de 3 horas por dia; o terceiro trabalhou 20 dias à razão de 5 horas por dia; o quarto trabalhou 30 dias à razão de 2 horas por dia. Sabendo que eles recebem proporcionalmente ao tempo trabalhado, quanto recebeu cada um deles?

Resolução

Como os pedreiros recebem proporcionalmente ao tempo trabalhado, devemos analisar a quantidade de horas trabalhadas ao todo. Essa quantidade é o produto entre a quantidade de horas trabalhadas por dia e o número de dias trabalhados.

Sendo assim, sendo k a constante de proporcionalidade, temos:

Pedreiro	Quantidade de horas ao todo	Proporção de salário a ser recebida
1	$15 \cdot 4 = 60$h	60k
2	$25 \cdot 3 = 75$h	75k
3	$20 \cdot 5 = 100$h	100k
4	$30 \cdot 2 = 60$h	60k

Como os 4 pedreiros devem receber, juntos, a quantidade total paga, vale que:

$$60k + 75k + 100k + 60k = 3540$$

$$295k = 3540$$

$$k = 12$$

Logo, o salário de cada pedreiro é dado na tabela a seguir:

Pedreiro	Proporção de salário a ser recebida	Salário
1	$60 \cdot 12$	R$720,00
2	$75 \cdot 12$	R$900,00
3	$100 \cdot 12$	R$1200,00
4	$60 \cdot 12$	R$720,00

2.2

Em uma corrida de táxi, é cobrado um valor inicial fixo, chamado de bandeirada, mais uma quantia proporcional aos quilômetros percorridos. Se por uma corrida de 12 km paga-se R$39,65 e por uma corrida de 7 km paga-se R$25,15, então:

(a) Quais as grandezas diretamente proporcionais nessa situação problema?

(b) Qual o valor da bandeirada?

Resolução item (a)

Pela definição de proporcionalidade, as grandezas proporcionais devem estar relacionadas por uma função linear.

O preço da corrida é determinado pela função

$$p(x) = b + xq$$

onde **x** é a quantidade de quilômetros percorrida, **q** é o valor cobrado por quilômetro e **b** é o valor da bandeirada.

A função pode ser reescrita como

$$p(x) = b + r(x)$$

Assim, $r(x)$ e x são diretamente proporcionais, com constante de proporcionalidade q.

Resolução item (b)

Podemos substituir os dados do enunciado montando um sistema linear de equações:

$$\begin{cases} b + 12q = & 39{,}65; \\ b + 7q = & 25{,}12. \end{cases}$$

Então,

$$5q = 39,65 - 25,15 = 14,5$$

$$q = \frac{14,5}{5} = 2,9$$

e

$$b = 39,65 - 122,9$$

$$b = 39,65 - 34,8 = 4,85$$

2.3

Uma famosa fábrica de chocolate possui uma máquina A que produz 600 bombons em 8 minutos. Por causa da grande demanda, o dono da fábrica resolveu acelerar a produção adquirindo um equipamento B mais moderno. Ele observou que os dois aparelhos trabalhando juntos fabricam 600 bombons em 3 minutos. Em quanto tempo a máquina B confecciona 600 bombons? Dê a resposta em minutos com segundos.

Resolução nível Ensino Fundamental (8º ano)

Assumiremos que as máquinas não apresentam defeito e tenham uma produção de bombons constante.

Como os aparelhos fabricam de forma constante, temos que a máquina A produzirá uma quantidade k em 1 minuto na mesma proporção que 600 em 8 minutos, ou seja

$$k = \frac{600}{8} \implies k = 75$$

Na mesma proporção, em 3 minutos, A produzirá x bombons:

$$k = \frac{x}{3} = 75 \implies x = 3 \cdot 75 = 225$$

Assim, a máquina B confeccionará $600 - 225 = 375$ bombons em 3 minutos. Logo, para fazer 600, serão necessários y minutos:

$$\frac{375}{3} = \frac{600}{y}$$

$$y = \frac{3 \cdot 600}{375} = \frac{1800}{375}$$

$$y = 4,8$$

Para ser coerente com o enunciado, temos que transformar as unidades de tempo. Como 1 minuto corresponde a 60 segundos, temos que 0,8 minuto corresponde a t segundos, na seguinte proporção:

$$\frac{0,8}{t} = \frac{1}{60} \implies t = 48.$$

Portanto, a resposta é 4 minutos e 48 segundos.

Resolução nível Ensino Médio

Assumiremos que as máquinas não apresentam defeito e tenham uma produção de bombons constante.

Observemos que o enunciado trata sempre da quantidade de 600 bombons. Assim, não precisamos nos preocupar com esta quantidade em si.

Vamos focar na duração de tempo para a produção do total de bombons.

A máquina A gasta 8 minutos, a máquina B fabrica em x minutos e as duas juntas fazem em 3. Dessa forma, em 1 minuto, a A realizou $\frac{1}{8}$ trabalho, a B completou $\frac{1}{x}$ e as duas juntas fizeram $\frac{1}{3}$.

Daí, montamos a equação

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$$

que pode ser resolvida como:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{8}{24} - \frac{3}{24}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{5}{24}$$

$$5x = 24 \implies x = 4,8$$

Para ser coerente com o enunciado, temos que transformar as unidades de tempo. Como 1 minuto corresponde a 60 segundos, temos que 0,8 minuto corresponde a t segundos, na seguinte proporção:

$$\frac{0,8}{t} = \frac{1}{60} \implies t = 48.$$

Portanto, a resposta é 4 minutos e 48 segundos.

2.4

Em uma empresa de móveis, um cliente encomenda um guarda-roupa nas dimensões 220 cm de altura, 120 cm de largura e 50 cm de profundidade. Alguns dias depois, o projetista, com o desenho elaborado na escala 1 : 8, entra em contato com o cliente para fazer sua apresentação. No momento da impressão, o profissional percebe que o desenho não caberia na folha de papel que costumava usar. Para resolver o problema, configurou a impressora para que a figura fosse reduzida em 20%. A altura, a largura e a profundidade do desenho impresso para a apresentação serão, respectivamente?

Resolução

Como o problema não identifica a unidade da escala e todos os dados fornecidos estão em centímetros, vamos considerar que a escala também se encontra nessa unidade.

Portanto, temos que 1 cm no desenho do papel equivale a 8 cm no móvel real.

Neste problema teremos que usar a proporcionalidade em dois momentos diferentes.

O primeiro deles acontece quando vamos transformar as medidas do guarda-roupa de acordo com a escala, pois temos a função $d = \frac{1}{8}r$, sendo **d** a medida do desenho no papel, e **r** a medida real do móvel.

Então:

- Altura: $d = \frac{1}{8} \cdot 220 = 27,5cm$
- Largura: $d = \frac{1}{8} \cdot 120 = 15cm$
- Profundidade: $d = \frac{1}{8} \cdot 50 = 6,25cm$

O segundo momento acontece quando temos que diminuir em 20% os valores já transformados.

Neste caso, temos a função $f = \frac{80}{100} \cdot d = 0,8d$, pois como queremos reduzir em 20%, significa que vamos pegar 80% do valor transformado na escala. Na função, temos como **d** o valor do desenho e **f** o valor final, depois das duas transformações necessárias.

Assim:

- Altura: $f = 0,8 \cdot 27,5 = 22cm$
- Largura: $f = 0,8 \cdot 15 = 12cm$
- Profundidade: $f = 0,8 \cdot 6,25 = 5cm$

Portanto a altura, a largura e a profundidade do desenho impresso serão 22 cm, 12 cm e 5 cm, respectivamente.

3 Observações e referências

Problema 2.1: Adaptado de `https://brainly.com.br/tarefa/3090180`

Problema 2.2: Adaptado de `https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/dy64ywxbj34gc.pdf`

Problema 2.3: Adaptado de `https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/rlsles28o5k.pdf`

Problema 2.4: Adaptado de `https://www.qconcursos.com/questoes-do-enem/disciplinas/matematica-matematica/aritmetica-e-problemas/razao-e-proporcao-e-numeros-proporcionais`