UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

MA224 P – RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

T1 – PROPORCIONALIDADE

GRUPO 1

Bruno Pereira Ferreira, 141868

Eduardo Silva de Luca, 145911

Fernando Bettelli Cintra de Oliveira, 138347

Tarik Eduardo Chuery, 177349

Tiago Moreira Andrade Salviano, 187696

Professor Marcelo Martins dos Santos

CAMPINAS, SP

AGOSTO, 2018

1. Problema indicado pelo professor:

Consideremos no plano um ângulo AÔB e uma reta r que não é paralela ao lado OA nem a OB.

a. Dado qualquer segmento de reta de comprimento x, contido em OA, as paralelas a r traçadas por suas extremidades determinam sobre o lado OB um segmento y. Mostre (demonstre) que a correspondência (associação) $x \rightarrow y$ determina um único valor de y para cada valor de x (i.e. y independe da posição do segmento de comprimento x tomado sobre o lado OA) e que esta correspondência é uma proporcionalidade (as grandezas x e y são proporcionais).

b. A cada ponto X da semirreta OA façamos corresponder o ponto Z em OB tal que XZ seja paralelo à reta r. Chamando de x e z os comprimentos de OX e XZ respectivamente, mostre que a correspondência $x \rightarrow z$ é uma proporcionalidade. Em que condições o fator de proporcionalidade é o mesmo que o da correspondência $x \rightarrow y$ do item (a)?

1.1. Resolução a nível de Ensino Fundamental

a. Em primeiro lugar, precisamos mostrar que não importa qual a posição do segmento escolhido na reta OA. Tomemos dois segmentos distintos PR e QT em OA com medida x e tracemos as paralelas a r em suas extremidades, como mostra a Figura 1.

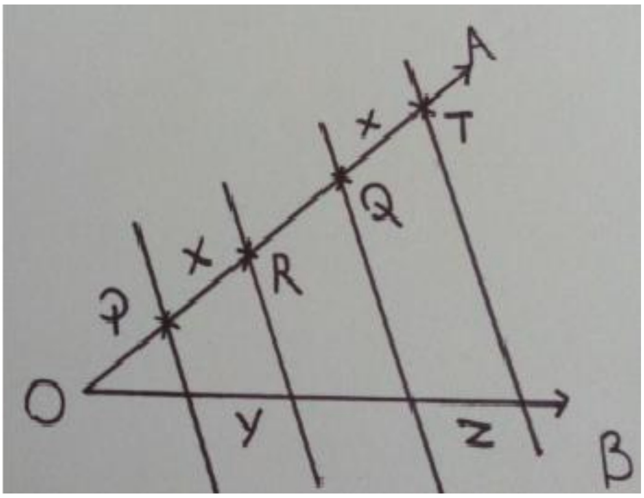

Figura 1

Sejam y e z os comprimentos dos segmentos em OB determinados pelas paralelas. Tracemos então duas retas paralelas a OB que passam por P e Q, respectivamente. Sejam M e N os pontos em que as paralelas a OB cruzam as paralelas a r, como mostra a Figura 2.

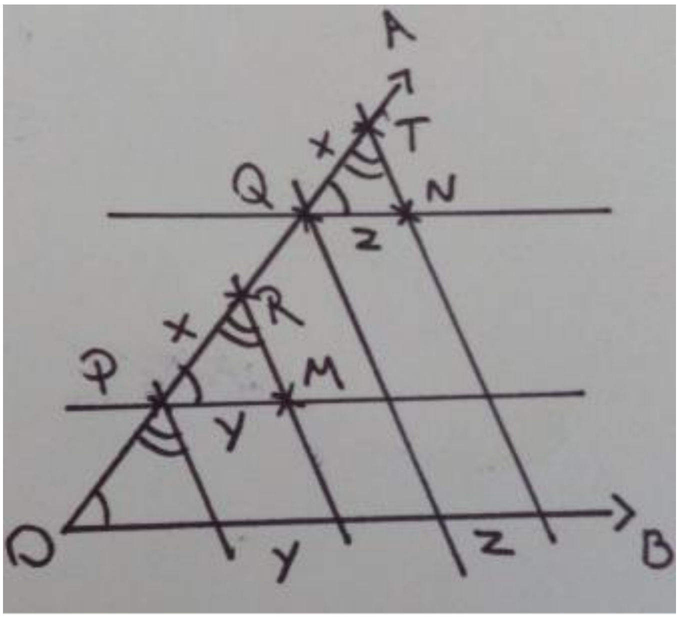

Figura 2

Temos, então, que PM = y e QN = z. Como OA é uma reta que corta duas paralelas entre si, sabemos que $M\hat{P}A$ é congruente a $N\hat{Q}A$, e que $P\hat{R}M$ é congruente a $Q\hat{T}N$. Assim, o triângulo PRM é congruente a QTN pelo caso ALA (ângulo – lado – ângulo). Logo, y = z.

Agora, vamos mostrar que essa correspondência é uma proporcionalidade. Dado que a posição do segmento não importa, vamos construir segmentos de medida x e x’ com origem em O (Figura 3). Pelo caso AA (ângulo – ângulo), temos que o triângulo POT é semelhante ao triângulo QOR. Seja k a razão de semelhança entre eles. Temos então que x’ = kx e y’ = ky. Logo, x’ < x implica que y’ < y e x’ = kx implica que y’ = ky.

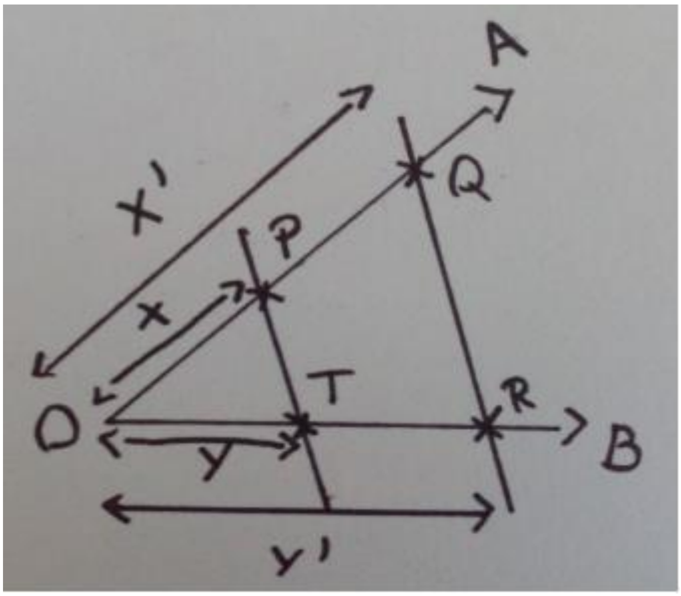

Figura 3

b. Tracemos uma reta paralela a OA com origem em Z (Figura 4). Seja X’ um outro ponto de OA tal que O-X-X’. Como a reta traçada é paralela a OA, temos que X’P = z. E ainda, X’-P-Z’ implica que z < z’. Portanto, x < x’ implica que z < z’.

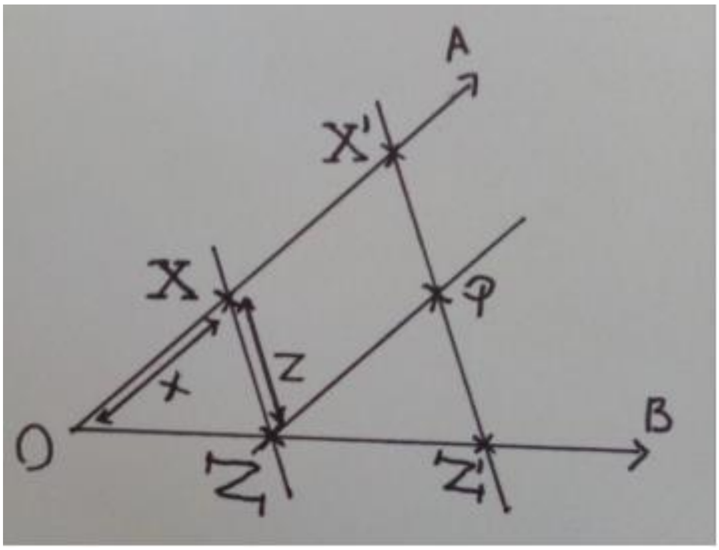

Figura 4

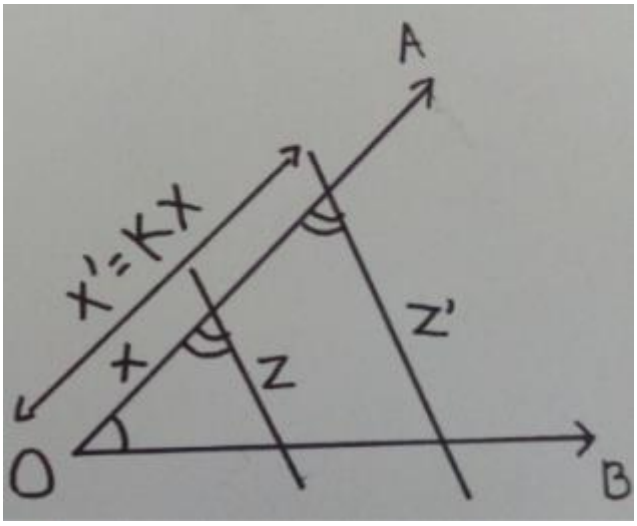

Figura 5

Na Figura 5, temos dois triângulos semelhantes formados ao se traçar retas paralelas a r. O menor tem o lado contido em OA, de comprimento x e o maior, de comprimento x' = kx. Como são semelhantes, $\frac{x}{z} = \frac{x'}{z'} \Rightarrow \frac{x}{z} = \frac{kx}{z'} \Rightarrow z' = \frac{kxz}{x}$ $\Rightarrow z' = kz$. Portanto, x < x' implica que z < z' e x' = kx implica que z' = kz.

1.2. Resolução a nível de Ensino Médio

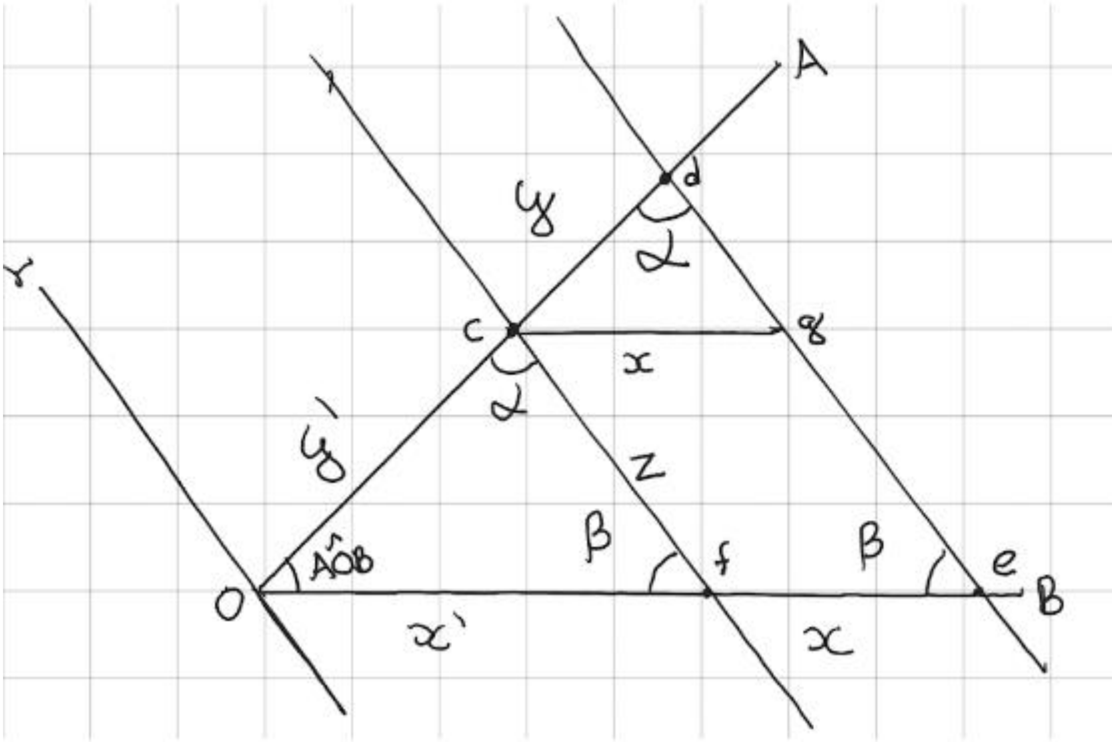

Figura 6

a. Da Figura 6, temos que os triângulos cof e doe são semelhantes, visto que a inclinação da reta que corta um ponto em A e outro em B são paralelas. Pelo critério AAA (ângulo – ângulo – ângulo) temos que os os dois triângulos são congruentes (proporcionais). Além disso, temos que o segmento cg e fe tem o mesmo comprimento, pois são paralelos entre si, e cortam duas retas paralelas entre si com a mesma inclinação. Para demonstrar a proporcionalidade pedida iremos utilizar a Lei dos Senos:

$$\frac{y'}{sen\ \beta} = \frac{x'}{sen\ \alpha} = constante \leftrightarrow y' = \frac{sen\ \beta}{sen\ \alpha} \times x'\ ,\ \frac{sen\ \beta}{sen\ \alpha} = k \leftrightarrow y' = k \times x'$$

Para o triângulo maior resolvemos de maneira análoga, podendo concluir que y e x são (diretamente) proporcionais entre si.

b. Utilizando novamente a Lei dos Senos, temos:

$$\frac{z}{sen\ (A\hat{O}B)} = \frac{x}{sen\ \alpha} = constante \leftrightarrow k = \frac{sen\ \alpha}{sen\ (A\hat{O}B)} \leftrightarrow z = k \times x$$

E assim demonstramos a proporcionalidade entre z e x.

Problemas propostos pelo grupo:

2. (PUC - MG) Certa máquina de calcular faz 200 operações por minuto, enquanto que um calculista faz 46 dessas operações no mesmo tempo. Quão rápida é a máquina em relação ao calculista?

2.1. Resolução

Se a máquina é m vezes mais rápida que o calculista, ela faz m vezes o número de operações que o calculista faz por minuto. Para descobrir m, montamos a equação:

$$200 = 46m \Rightarrow m = \frac{200}{46} \cong 4{,}35.$$

3. Durante uma tempestade de 20 minutos, 10 mm de chuva caiu sobre uma região cuja área total é de 100 km². Sendo que a densidade da água é de 1.0g/cm³, qual a massa de água que caiu na região? Dados**:** Volume = Área x Altura.

3.1. Resolução

Sabendo-se que a definição de densidade é d = m/V, onde m é a massa e V o volume, então, a partir da definição e do dado do exercício que V=(A.h) onde A é a área e h a altura. A massa pode ser escrita da seguinte maneira:

$$m(A, h) = d.h.A$$

Como temos que a densidade é uma relação de proporção, a razão massa/volume vai ser sempre a mesma, concluindo então que a densidade é um valor constante. Para essa primeira parte vamos mudar as seguintes unidades de medidas:

$$A = (100\ km^2)\frac{10^6\ m^2}{1\ km^2} = 1.10^8\ m^2$$

$$h = 10\ mm = 1.10^{-2}\ m$$

$$d = 1\frac{g}{cm^3} = 1000\frac{kg}{m^3}$$

Portanto a massa de água que caiu em 20 minutos de chuva foi:

$$m = \left(1000\ \frac{kg}{m^3}\right)(1.10^8\ m^2)(1.10^{-2}\ m) \Rightarrow\ m =\ 1.10^9\ kg.$$

4. (PUC – Campinas – 2015) Para fazer a digitalização de 30 páginas, um estagiário leva 28 minutos. Se o estagiário trabalhar durante suas 4 horas e 40 minutos de expediente com o dobro dessa velocidade de digitalização, nesse expediente de trabalho, ele será capaz de digitalizar um total de quantas páginas?

4.1. Resolução

Já que em seu ritmo normal de digitalização, um estagiário digitaliza 30 páginas a cada 28 minutos, se ele então dobrar a velocidade de produção, digitalizará 60 páginas no mesmo tempo.

Agora queremos saber quantas páginas o estagiário, no ritmo mais rápido, digitaliza em 4 horas e 40 minutos. Em 1 hora temos 60 minutos, logo 4 horas equivalem a 4.60 = 240 minutos, e somando os 40 minutos restantes, teremos 280 minutos. Assim, temos as seguintes proporções:

$$60\, páginas \rightarrow 28\, min$$

$$x\, páginas \rightarrow 280\, min$$

Então $28.x = 60.280 \Rightarrow x = \frac{60.280}{28} \Rightarrow x = 600\, páginas.$

5. **(**UNI-RIO - Adaptado) O ^{201}TI é um isótopo radioativo usado na forma de $TlCl_3$ (cloreto de Tálio) para diagnóstico do funcionamento do coração. Sua meia-vida é de 73h (≈3 dias). Certo hospital possui 20 g deste isótopo. Qual sua massa, em gramas, após se passarem 9 dias?

5.1. Resolução a nível de Ensino Médio

Segundo o enunciado, a meia vida do ^{201}TI é de 73h ou 3 dias, aproximadamente. Isso quer dizer que a massa do isótopo decai pela metade após esse período. No momento inicial a massa era

$$m = 20\ g$$

Após 3 dias, sua massa cai pela metade, ou seja, no terceiro dia a massa era $m = \frac{20}{2} = 10\ g.$ Passados mais 3 dias, novamente, a massa cai pela metade $m = \frac{10}{2} = 5\ g.$ Finalmente, nos 3 dias restantes, ela cai pela metade novamente: $m = \frac{5}{2} = 2{,}5\ g.$ Portanto, no 9º dia, a massa final foi de 2,5g.

5.2. Resolução a nível de Ensino Superior

Pelo enunciado, podemos concluir que temos o exercício trata sobre decaimento. Sabemos que a taxa de variação da massa A de um elemento químico no tempo é proporcional à própria massa, então:

$$\frac{dA}{dt} = kA \Rightarrow \frac{dA}{A} = kdt$$

Integrando a equação acima, ficamos com

$$\int \frac{dA}{A} = k \int dt \Rightarrow ln|A| + c_1 = kt + c_2 \Rightarrow ln|A| = kt + c_3 \ (c_3 = c_1 + c_2)$$

Agora, aplicando a exponencial, temos ($|A| = A$, pois o valor da massa sempre é positivo)

$$A = e^{kt + c_3} = e^{kt}e^{c_3} = ce^{kt} \ (c = e^{c_3})$$

Ficamos então com a função $A(t) = ce^{kt}$. Existem agora duas situações para analisarmos, que são os valores da constante c e da constante de proporcionalidade k. Quando t = 0, a massa é m = 20 g, logo

$A(0) = 20 = ce^{k.0} = c = 20$, que nos leva a $A(t) = 20e^{kt}$.

Como a meia-vida é de 3 dias, a massa nesse tempo cai pela metade (m = 10 g), e então

$$A(3) = 10 = 20e^{3k} \Rightarrow e^{3k} = 0{,}5 \Rightarrow 3k = \ln(0{,}5) \Rightarrow k = \frac{\ln(0{,}5)}{3}.$$

Finalmente, a função é escrita como

$$A(t) = 20e^{\frac{\ln(0{,}5)t}{3}}.$$

Então, após 9 dias, a massa final é

$$A(9) = 20e^{\frac{9\ln(0{,}5)}{3}} = 2{,}5\ g.$$

Referência Bibliográfica

- Problema proposto pelo professor: Lima, E. et. al., Temas e Problemas Elementares, Coleção do Professor de Matemática, SBM. O item (a) é o exemplo 3 do Capítulo 1, e o item (b) é o exercício 12 do mesmo capítulo.