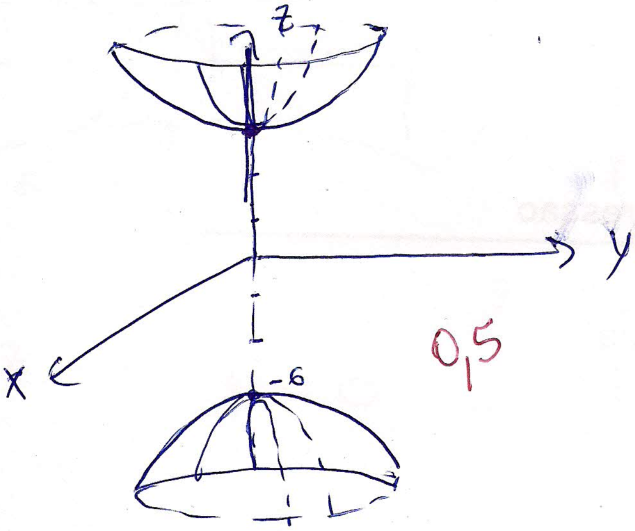
①

Prova 3

① Identifique a quádrica (dê o nome) $z^2 - 4x^2 - 9y^2 = 36$ e faça um esboço do gráfico. Determine as interseções com os eixos e com os planos coordenados.

$$z^2 - 4x^2 - 9y^2 = 36$$

$$\frac{z^2}{6^2} - \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1 \rightarrow \text{hiperbolóide de 2 folhas} \quad 0{,}2$$



0,5

eixo x : $y = z = 0$

0,3 $\quad -\frac{x^2}{9} = 1$ não tem solução!

eixo y : $x = z = 0$

0,3 $\quad -\frac{y^2}{4} = 1$ não tem solução!

eixo z : $x = y = 0$

0,3 $\quad z^2 = 36 \Rightarrow z = \pm 6$

plano xy : $z = 0$ $\quad$ 0,3

$-4x^2 - 9y^2 = 36$ (não tem sol.! conj. vazio)

plano yz : $x = 0$

$z^2 - 9y^2 = 36$ $\quad$ 0,3

$\frac{z^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1 \rightarrow$ hipérbole

plano xz : $y = 0$ $\quad$ 0,3

$\frac{z^2}{36} - \frac{x^2}{9} = 1 \rightarrow$ hipérbole.

$z = k \quad |k| > 6$

$4x^2 + 9y^2 = k^2 - 36 \rightarrow$ elipse.

(2) a) $f(y,z) = z - y^2$ em torno do eixo z

substituir y por $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ — 0,3

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = z - (\pm\sqrt{x^2+y^2})^2 \quad 0,5$$

$$z - (x^2+y^2) = 0$$

$\boxed{z = x^2+y^2}$ 0,5 parabolóide elíptico

b) Parabolóide elíptico 0,6

$$\left.\begin{array}{ll} x = r\cos\theta & z = r^2\cos^2\theta + r^2 sen^2\theta \\ y = r\,sen\,\theta & z = r^2 \end{array}\right\} 0,6$$

(4) a) $$[x\ y]\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [12\ \ 6]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - [9] = 0$$

0,5

b) a' e c' são raízes do polinômio $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(7-\lambda) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 11\lambda + 24 = 0$$
$$\Delta = 121 - 96 = 25$$
$$\lambda = \frac{11 \pm 5}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow a' = 3$$

$$\lambda_2 = \frac{16}{2} = 8 \rightarrow c' = 8$$

$Q = [U_1 \; U_2]$ onde U_1 é solução de norma 1 do sistema $(A - a'I)X = 0$

$$\begin{bmatrix} 4-3 & -2 \\ -2 & 7-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases}$$

$x = 2y$, $y = \alpha \Rightarrow x = 2\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$W_1 = \{(2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ é solução geral

$\|(2\alpha, \alpha)\| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{4\alpha^2 + \alpha^2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{5\alpha^2} = 1$

$\Leftrightarrow \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$

escolhendo $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $U_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ $U_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

$$K' = [d' \; e'] = [12 \; 6] \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{30}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix}$$

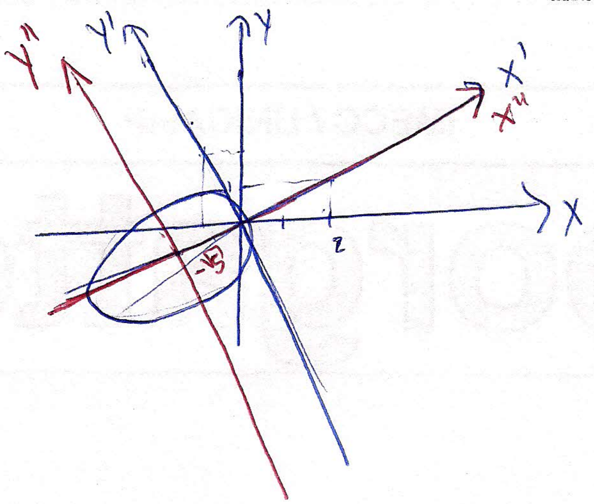
$$\boxed{3x'^2 + 8y'^2 + \frac{30}{\sqrt{5}} x' - 9 = 0}$$

c) Completando quadrado :

$$3(x'^2 + 2 \cdot \sqrt{5}\, x' + 5 - 5) + 8y'^2 - 9 = 0$$
$$3(x' + \sqrt{5})^2 - 15 + 8y'^2 - 9 = 0$$
$$3(x' + \sqrt{5})^2 + 8y'^2 = 24$$
$$\frac{(x' + \sqrt{5})^2}{8} + \frac{y'^2}{3} = 1 \rightarrow \text{elipse}$$

$x'' = x' + \sqrt{5}$

$y'' = y'$



eixo x'': $y'' = 0$

$\Rightarrow y' = 0$ eixo x'

elipse $\dfrac{x''^2}{8} + \dfrac{y''^2}{3} = 1$

eixo y'': $x'' = 0$

$x' + \sqrt{5} = 0$

$x' = -\sqrt{5}$

(3)

$$\begin{cases} y + mz = 1 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 1 - mz$$

(uma solução)

$$x^2 + (1-mz)^2 - z^2 = 0$$

$$x^2 + 1 - 2mz + m^2z^2 - z^2 = 0$$

$$x^2 + (m^2-1)z^2 - 2mz + 1 = 0$$

0,5

$m^2 - 1 \neq 0$

$$x^2 + (m^2-1)\left[z^2 - 2 \cdot \frac{m}{m^2-1} \cdot z + \frac{m^2}{m^2-1} - \frac{m^2}{m^2-1}\right] + 1 = 0$$

$$x^2 + (m^2-1)\left[\left(z - \frac{m}{m^2-1}\right)\right]^2 - m^2 + 1 = 0$$

$$x^2 + (m^2-1)\left(z - \frac{m}{m^2-1}\right)^2 = m^2 - 1$$

$$\frac{x^2}{m^2-1} + \left(z - \frac{m}{m^2-1}\right)^2 = 1$$

1,0

elipse: $m^2 - 1 \neq 0$ $\quad \boxed{m \neq \pm 1}$

$$\boxed{m^2 - 1 > 0 \quad m^2 > 1 \quad m > 1,\ m < -1 \quad |m| > 1}$$

0,5

MA 141 B Geometria analítica

Prof. Daniela Prata dos Santos - Segundo Semestre de 2012

Terceira Prova - 27/11/2012

Nome: **RA:**

Questões	Pontos
Q 1	
Q 2	
Q 3	
Q 4	
T o t a l	

Resolva as questões justificando as respostas. Respostas sem justificativa não serão consideradas.

Questão 1. (2,5 pontos) Identifique a quádrica $z^2 - 4x^2 - 9y^2 = 36$ (dê o seu nome), e faça um esboço do gráfico. Determine as interseções com os eixos e com os planos coordenados.

Questão 2. (*a*) (1,3 pontos) Determine a equação da superfície de revolução gerada pela rotação da parábola $z = y^2$ em torno do eixo z.

(*b*) (1,2 pontos) Identifique a superfície (dê o seu nome) e dê sua equação em coordenadas cilíndricas.

Questão 3. (2,0 pontos) Encontre os valores de m tais que a interseção do plano $y + mz = 1$ com a superfície $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ seja uma elipse.

Questão 4. Considere a cônica de equação $4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$.

(a) (1,0 ponto) Escreva a equação da cônica na forma matricial $X^tAX + KX + f = 0$.

(b) (1,5 pontos) Encontre a', c' e a matriz Q tais que fazendo a mudança de coordenadas $X = QX'$ a equação da cônica pode ser escrita na forma $a'x'^2 + c'y'^2 + d'x' + e'y' + f' = 0$.

(c) (0,5 pontos) Faça um esboço do gráfico da cônica indicando os sistemas de coordenadas usados.

Boa prova a todos!!!