Terceira Prova de Cálculo III - MA311

1o. Semestre de 2013

Q	Notas
1.	
2.	
3.	
4.	
$\sum$	

Aluno: ____________________________ RA: _______________

Assinatura (como no RG): ____________________________

Observações: ***Não é permitido o uso de qualquer equipamento eletrônico. Desligar o celular! Não destaque o grampo da prova.***

Todas as questões (suas resoluções) devem ser justificadas com o conhecimento da Matéria - cf. livro-texto.

Questão 1. (a) **(1,0 ponto)** Determine a convergência das séries numéricas, verificando todas as condições do Teste de Convergência utilizado.

$$\textbf{i)} \sum \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad \textbf{ii)} \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

(b) **(1,0 ponto)** Determine o raio de convergência da série de potências $\sum \frac{(-1)^n}{3^n\sqrt{n}}x^n$.

(c) **(0,5 pontos)** Determine o domínio da função $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n\sqrt{n}}(x+1)^n$.

Questão 2. (a) **(0,5 pontos)** Resolva a equação de Euler $x^2y'' + xy' - y = 0$.

(b) **(0,5 pontos)** Seja $\mathrm{L}[y] = x^2y'' + xy' + (x^2-1)y$.
Escrevendo $\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ (série de Frobenius), mostre que

$$\mathrm{L}[\Phi] = (r^2-1)a_0x^r + [(r+1)^2-1]a_1x^{1+r} + \sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left[(n+r)^2-1\right]a_n + a_{n-2}\right\}x^{n+r}.$$

(c) **(1,0 ponto)** Tomando $r = 1$ no item **b)** (pode usá-lo sem o ter resolvido) obtenha que $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{2n}(n+1)!n!}$ é uma solução da equação $\mathrm{L}[y] = 0$. Faça todos os detalhes para chegar nessa fórmula, incluindo a relação de recorrência.

(d) **(0,5 pontos) Sem usar testes de convergência**, responda (use o Teorema de Frobenius): qual é o domínio da função y_1 no item **c)**?
***Não esqueça de justificar**, com a matéria vista/cf. livro-texto.*

Questão 3. Seja $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x < 0 \\ 0, & 0 \le x < 1 \end{cases}$, $f(x+2) = f(x)$.

(a) **(0,5 pontos)** Sem calcular a série de Fourier (use o Teorema de Fourier), responda: para que valor a série de Fourier converge em $x = 0$? (*Não esqueça a justificativa.*)

(b) **(1,5 pontos)** Calcule a série de Fourier da função f.

(c) **(0,5 pontos)** Tomando $x = -1/2$ deduza o valor da soma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$.

Questão 4. (2,5 pontos) Resolva o PVIF (problema de valor inicial e de fronteira)

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos n\pi x, & 0 < x < 1 \\ u_t(x,0) = 0, & 0 < x < 1, \end{cases}$$

pelo método de separação de variáveis.