MA311 – Notas de aula – Prof. Marcelo Santos

Outros Problemas de Condução do Calor – §10.6 (livro-texto)

Nesta aula consideramos dois problemas de valor inicial e de contorno - PVIC - para a equação do calor. No primeiro a CC é não-homogênea ou, mais precisamente, $u(0,t) = T_1$ e $u(l,t) = T_2$ (para todo $t > 0$) onde T_1 e T_2 são temperaturas fixas e dadas (ou seja, números não negativos). No segundo, a barra está isolada termicamente nas extremidades, i.e. $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$ para todo $t > 0$. (Lembre a 'lei de Fourier': *O fluxo do calor é proporcional ao gradiente da temperatura* - em uma dimensão, o gradiente (espacial, i.e. em relação a x) é somente a derivada em relação a x).

Para resolver o primeiro problema, o primeiro passo é 'homogeinizar' (tornar nula) a CC, com o uso da uma função afim $v(x) = ax + b$: Escrevemos $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$ e impomos que $w(0,t) = w(l,t) = 0$. Então chegamos a

$$T_1 = u(0,t) = v(0) = b, \quad \text{i.e.} \quad b = T_1 \quad \text{e} \quad T_2 = u(l,t) = v(l) = al + b, \quad \text{logo,} \quad a = (T_2 - T_1)/l$$

e, da equação do calor para u, $u_t = u_{xx}$ (tomamos a 'difusividade térmica' α^2 igual a um, por simplicidade de exposição), obtemos que w também satisfaz a mesma equação, i.e. $w_t = w_{xx}$ (para todo $(x,t) \in (0,l) \times (0,\infty)$). (Note que $v_t = v_{xx} = 0$, para todo $(x,t) \in (0,l) \times (0,\infty)$.) Quanto à condição inicial para w, temos

$$w(x,0) = u(x,0) - v(x) \; = \; f(x) - \frac{T_2 - T_1}{l}x - T_1 =: \tilde{f}(x)\,.$$

Como vimos em aula anterior, a solução do PVIC

$$\begin{cases} w_t = w_{xx}, & 0 < x < l,\ t > 0 \\ w(0,t) = w(l,t) = 0, & t > 0 \\ w(x,0) = \tilde{f}(x), & 0 < x < l \end{cases}$$

é dada por $w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}$ onde $b_n = \frac{2}{l}\int_0^l \tilde{f}(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx$ (coeficientes de Fourier em senos da função $\tilde{f}$). (O aluno deve saber calcular essa solução.) Substituindo a expressão acima para $\tilde{f}$ em b_n, obtemos

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l \left[f(x) - \frac{T_2 - T_1}{l}x - T_1 \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx.$$

Como $u(x,t) = w(x,t) + v(x)$, concluimos que a solução do problema em questão é dada por

$$u(x,t) = \frac{T_2 - T_1}{l}x + T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l},$$

onde os b_n são calculados pela fórmula acima. (Se $\alpha^2 \neq 1$, a solução é a mesma exceto que na exponencial teremos o expoente $-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{l^2}t$ no lugar de $-\frac{n^2\pi^2}{l^2}t$. O aluno deve estar convencido de que realmente este é o caso, ou refazer as contas acima sem supor $\alpha^2 = 1$.)

Observamos que se permitirmos a troca de limite $\lim_{t\to\infty}$ com o somatório na fórmula para u (Isto pode ser uma questão delicada: Sempre é possível a permuta de limites?? Lembre que uma soma infinita - uma série - é o limite das suas somas parciais quando o número de termos das mesmas tende a infinito) vemos que $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = v(x)$ para qualquer ponto x da barra (para qualquer $x \in (0,l)$). A função $v(x)$ é nada mais do que a distribuição de temperatura estacionária na barra (solução de equilíbrio) ou seja, se tomarmos $u_t = 0$ (temperatura constante em relação ao tempo), digamos para todo $t >> 1$ (para todo t muito grande), o PVIC para a equação do calor na barra com a CC em questão torna-se simplesmente o 'Problema de Valor de Contorno'

$$\begin{cases} u_{xx} = 0, & 0 < x < l,\ t >> 1 \\ u(0,t) = T_1,\ u(l,t) = T_2, & t > 0 \end{cases}$$

cuja solução é justamente $v(x)$. Verifique. Em particular, no caso anterior da CC homogênea $u(0,t) = u(l,t) = 0$, ou seja, $T_1 = T_2 = 0$, obtemos que a solução de equilíbrio é justamente $u(x,t) \equiv 0$, o que confere com a nossa intuição física: Se mantivermos a temperatura nula nas extremidades da barra para todo tempo $t > 0$, para t muito grande vemos praticamente a temperatura nula em todos os pontos da barra, qualquer que seja a distribuição inicial de temperatura.

Agora passemos ao nosso segundo problema – condução de calor na barra com as extremidades isoladas. Matematicamente, queremos resolver o PVIC

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < l,\ t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = \tilde{f}(x), & 0 < x < l \end{cases}$$

onde novamente tomamos a difusividade térmica igual a um, por simplicidade de exposição. Infelizmente, aqui não temos uma função auxiliar que reduza o problema a um caso anterior, como acima. Então vamos obter a solução seguindo todos os passos do método de separação de variáveis que aprendemos (Como já adquirimos experiência com a barra não isolada (nas extremidades) e já praticamos com os exercícios das seções 10.1 a 10.5, podemos obter a solução mais rapidamente):

1o. passo – Separação de variáveis
Tomamos $u(x,t) = X(x)T(t)$; derivando e substituindo na equação obtemos o par de EDO

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X \\ T' = -\lambda T \end{cases}$$

onde λ é uma constante arbitrária. Impondo a CC $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$, obtemos $X'(0) = X'(l) = 0$. Aqui temos a novidade em relação a barra não isolada: O "problema de autovalores para X" é então

$$(*) \qquad \begin{cases} -D^2X = \lambda X, & 0 < x < l \\ X'(0) = X'(l) = 0 \end{cases}$$

(onde D^2 denota o operador derivada segunda – em relação a x). (Note a diferença: Antes tínhamos o mesmo operador $-D^2$ mas com a CC $X(0) = X(l) = 0$, ou seja, CC nula nas extremidades $x = 0$ e $x = l$; aqui, são as derivadas que são nulas nas extremidades da barra - ou do intervalo $(0,l)$.) Agora queremos obter os autovalores λ para esse problema (os possíveis valores de λ com os quais o problema $(*)$ tem uma solução $X \not\equiv 0$). Podemos proceder como fizemos inicialmente no caso da barra não isolada, ou seja, analisar os casos $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ e $\lambda > 0$, ou podemos logo descartar um possível sinal de λ calculando uma fórmula para λ em termos de uma autofunção (um 'autovetor') associada(o) ao mesmo, de forma análoga ao que fizemos em aula para a CC nula, a saber: Multipliquemos a equação $-X'' = \lambda X$ por X e integremos por partes no intervalo $(0,l)$, obtendo

$$\lambda \int_0^l X(x)^2 dx = XX'|_{x=0}^{x=l} + \int_0^l X'(x)^2 dx$$

onde o termo de fronteira $XX'|_{x=0}^{x=l}$ é nulo, haja vista a CC $X'(0) = X'(l) = 0$; então obtemos a fórmula para o autovalor λ em função de uma autofunção X:

$$\lambda = \int_0^l X'(x)^2 dx / \int_0^l X(x)^2 dx\,.$$

Daí vemos que qualquer autovalor λ é necessariamente maior do que ou igual a zero (quociente de números não negativos - integrais de quadrado de funções). Obtivemos a mesma fórmula de antes (para a CC nula) mas aqui é possível a função $X'(x) \equiv 0$, i.e. X uma função constante (antes não podia; porque?); na verdade, agora $\lambda = 0$ é um valor possível para λ ($\lambda = 0$ é um autovalor) tendo como autofunção associada qualquer função constante (diferente da nula), e.g. $X(x) \equiv 1$ – de fato, $X(x) \equiv 1$ é uma solução do problema $(*)$ acima com $\lambda = 0$. Resta analisar o caso $\lambda > 0$.

Neste caso, escrevemos $\lambda = \mu^2$ $(\mu > 0)$ e a solução geral da EDO $-X'' = \lambda X$ fica $X(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \operatorname{sen} \mu x$; impondo a CC $X'(0) = X'(l) = 0$, vemos que $c_2 = 0$ e (como não queremos $X \equiv 0$), $\mu l = 0$, donde segue-se a mesma seqüência de autovalores de antes, $\lambda \equiv \lambda_n := n^2\pi^2/l^2$, mas com autofunções associadas $X_n(x) = \cos n\pi x/l$, e também com o autovalor adicional $\lambda = 0$, ou seja, n aqui varia nos 'naturais a partir do zero', $n = 0, 1, 2, \cdots$.

A equação para T nao mudou, logo temos a seqüência de funções $T_n(t) = \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}}$, inclusive $T_0(t) \equiv 1$, as quais multiplicadas por X_n nos fornecem a seqüência de soluções $u_n(x,t) =$

$X_n(x)T_n(t) = \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}} \cos n\pi x/l$, $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ para a equação juntamente com a CC do problema em questão. O próximo passo é obter a função $u(x,t)$ satisfazendo também a condição inicial.

2o. passo – Superposição de soluções
Já que vale o princípio da superposição para a equação do calor juntamente com a CC dada, i.e. uma combinação linear qualquer de soluções também é uma solução, vamos buscar $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x,t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t)$ de forma que a CI seja também satisfeita, ou seja, devemos determinar as constantes c_n de maneira que

$$u(x,0) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi x/l = f(x).$$

Neste caso queremos então expandir a função f em uma série de cosenos, incluindo o termo $\cos n\pi x/l$ quando $n = 0$, ou seja, a função constante $X_0 \equiv 1$. Então devemos ter

$$c_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)dx, \quad c_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 1, 2, \cdots$$

(coeficientes de Fourier de f em cosenos no intervalo $(0,l)$).

Conclusão: A solução da equação do calor na barra com as extremidades isoladas e com difusividade térmica igual a um é dada por

$$u(x,t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{l}t} \cos\frac{n\pi x}{l}$$

onde os coeficientes c_n são os coeficientes de Fourier em cosenos no intervalo $(0,l)$ da distribuição inicial de temperatura (dados acima).