

Lista de Exercícios 1

01. [Lucas, 10a. ed., p. 8] Chama-se *plano de incidência* a um par $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ em que \mathcal{P} é um conjunto, cujos elementos chamaremos de *pontos*, e \mathcal{R} é uma coleção de subconjuntos de \mathcal{P} , denominados *retas*, satisfazendo os axiomas

- I1. Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.
- I2. Toda reta contém pelo menos dois pontos.
- I3. Existem três pontos que não estão contidos em uma mesma reta.

Verifique se são planos de incidência os pares $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ seguintes.

- (a) $\mathcal{P} = \{A, B\}$ e $\mathcal{R} = \{\{A, B\}\}$.
- (b) $\mathcal{P} = \{A, B, C\}$ e $\mathcal{R} = \{\{A, B\}, \{A, C\}\}$.
- (c) $\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}$ e $\mathcal{R} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}$.
- (d) $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{R} = \{l; l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; ax + by + c = 0, \text{ sendo } a \cdot b \neq 0\}\}$.
- (e) $\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}$ e $\mathcal{R} = \{\{A, B, C\}, \{A, D\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}$.

Problema desafio (opcional): Você consegue definir ou descrever *círculos* nesses pares?

02. [Id. p. 9] Um conjunto de n cidades é ligado por estradas de modo que existe sempre uma ligando diretamente quaisquer duas delas. Tomando-se as cidades como pontos e as estradas como retas, verifique a validade dos axiomas de plano de incidência (definido acima).

03. Por que o conjunto de todos os pontos de um plano de incidência não pode ser uma reta?

04. Dado um conjunto \mathcal{P} com n pontos, qual é o número máximo de retas que o torna um plano de incidência?

05. Definamos duas retas em um par como no Exercício 1 como sendo *paralelas* se elas não se intersectam. Consideremos o seguinte postulado:

Por um ponto não pertencente a uma dada reta, passa uma única reta paralela a essa reta.

Que pares do Exercício 1 satisfazem este postulado?

06. [Lucas, 10a. ed., p. 9] Denomina-se uma *malha tipo 2-3* a um par $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$, em que \mathcal{P} é um conjunto de pontos e \mathcal{R} é uma coleção de subconjuntos de \mathcal{P} , denominados *retas*, satisfazendo aos seguintes axiomas:

- M1. Cada reta contém exatamente três pontos.
- M2. Por cada ponto passam exatamente duas retas.
- M3. Por dois pontos passa no máximo uma reta.
- M4. Existe pelo menos um ponto no plano.

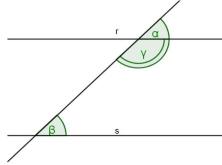
Contra exemplos de tais malhas com 6 e 9 pontos.

07. Seja $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ uma malha tipo 2-3. Mostre que o número de elementos de \mathcal{P} é divisível por 3, e que o número de elementos de \mathcal{R} é divisível por 2.

08. Mostre que, em um plano de incidência, duas retas *concorrentes* (com interseção não vazia) intersectam-se em um único ponto.
09. Também em um plano de incidência, mostre que
- Dada uma reta, existe pelo menos um ponto não pertencente a ela.
 - Dado um ponto qualquer qualquer, existe pelo menos uma reta não passando por ele.
 - Dado um ponto qualquer, existem pelo menos duas retas passando por ele.
10. Usando que toda reta separa o plano em dois lados/semiplanos (conjuntos)¹ disjuntos, demonstre o teorema conhecido como “Postulado de Pasch”: *Se uma reta contém um ponto de um lado de um triângulo então ela também contém um ponto de um dos outros dois lados.*
11. Seja $\mathcal{P} = \mathbb{Q}^2$ (\mathbb{Q} é o conjunto dos números racionais) com a noção de distância usual e com o conjunto de retas $\mathcal{R} = \{ax + by + c = 0; (x, y) \in \mathbb{Q}^2, \text{ sendo } a \text{ ou } b \neq 0\}$. Mostre, usando o *Teorema de Pitágoras* e que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, que não existe um triângulo equilátero (em \mathcal{P}) de lado AB , com $A = (0, 0)$ e $B = (1, 0)$.
12. Exiba graficamente/de forma ilustrativa dois triângulos **distintos** (não congruentes) ABC , DEF tais que $\hat{A}BC = \hat{D}EF$, $\hat{A}CB = \hat{D}FE$ (ângulos da “base” iguais), e, $BC = DE$. (Cf. Teorema I.26 dos *Elementos*.)
13. Na demonstração de Euclides (nos *Elementos*), quantos círculos são usados para se construir um segmento (de reta) igual a um segmento dado por um ponto dado (usando só régua e compasso/só traçando segmentos e círculos)? Descreva-os. (Descreva todos os círculos usados.)
14. Dados comprimentos (números) $a > b > c$ com $b + c > a$, e uma reta l , construir (mostre que existe, só traçando segmentos e círculos/só usando a régua e o compasso) um triângulo ABC tais que $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$, e
- o lado AB está na reta l ;
 - o lado AC está na reta l ;
 - o lado BC está na reta l .
15. Dados um segmento (de reta) a e um ponto P em uma reta l , construir um ponto Q em l tal que $PQ = a$.
16. Dados um ângulo α e um segmento (de reta) AB , construa um ângulo $C\hat{B}A$ igual (congruente) a α .
17. Dados um segmento AB e um triângulo CDE , com AB igual (congruente) a um dos lados de CDE , construa um triângulo FAB congruente a CDE . (Mostre que os triângulos são congruentes.)
18. Mostre que os pontos médios dos lados de um triângulo isósceles formam um triângulo também isósceles.

¹Por definição, dois pontos estão no mesmo lado/semiplano se o segmento que os une não intersecta a reta.

19. Sejam $ABCD$, $EFGH$ dois paralelogramos com áreas e bases BC, FG iguais (congruentes) numa mesma reta. Mostre que os lados opostos AD, EH estão numa mesma reta paralela às bases.
20. Mostre que os ângulos β e γ são suplementares (iguais a dois retos) se e



somente se as retas r e s são paralelas (não se intersectam).

21. Mostre que os ângulos da base de um triângulos isósceles são iguais entre si usando a congruência “LAL”. (*Demonstração de Pappus; cf. <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI5.html>*.)
22. Demonstre o teorema (a proposição) I.43 de Euclides/dos *Elementos* usando a fórmula que conhecemos hoje da área de um paralelogramo.
23. Mostre que a esfera (no espaço, \mathbb{R}^3) com as “retas” sendo os círculos maiores (interseções da esfera com planos passando pelo centro da mesma) satisfaz os axiomas 2 e 3 de *plano de incidência* – v. Exercício 1. Satisfaz o Axioma 1? *Problema desafio (opcional)*: O 5o postulado de Euclides/nos *Elementos* vale nesse “plano”?
24. (Ref.: *Notas de aula do Prof. Ricardo Bianconi*.) O plano da *Geometria Hiperbólica* é o conjunto $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$, com as retas (linhas) sendo de dois tipos: verticais $l_a = \{(x, y) \in \mathbb{H}; x = a\}$, $a \in \mathbb{R}$, ou arcos de circunferência $l_{p,r} = \{(x, y) \in \mathbb{H}; (x - p)^2 + y^2 = r^2\}$, $p \in \mathbb{R}, r > 0$. Mostre que o par $(\mathbb{H}, \mathcal{R})$, onde \mathcal{R} é a coleção formada por todas as linhas $l_a, l_{p,r}$, é um plano de incidência. *Problema desafio (opcional)*: O 5o postulado de Euclides/nos *Elementos* vale nesse plano?
25. (a) Mostre que dois quadrados (quaisquer) de lados congruentes são congruentes. (*Sugestão*: use que a diagonal de um paralelogramo o divide em dois triângulos iguais (congruentes).) Vale o mesmo resultado para para paralelogramos? i.e. se dois paralelogramos têm lados dois a dois congruentes então eles são congruentes. Se não, e quanto à área? nesse caso, os dois paralelogramos têm a mesma área?

(b) Mostre que se dois quadrados são iguais em área, então eles têm lados congruentes (de mesmo “tamanho”).

26. (a) O teorema (a Proposição) I.31 (dos *Elementos*) depende do 5o postulado (de Euclides)? (Justifique. *Sugestão*: faça uma árvore (um grafo) conectando todos os resultados usados para demonstrar o teorema I.31, a partir dos postulados (axiomas), incluindo as *Noções comuns*; comece voltando, partindo do teorema até chegar nos postulados.)

(b) Mostre que o teorema I.30 implica no 5o. postulado (ou seja, assumindo o teorema I.30 como verdadeiro (como postulado) demonstre o 5o. postulado). Conclua que o 5o postulado e o teorema (a Proposição) I.30 são equivalentes.

(c) O *Axioma de Playfair* (John Playfair, 1748-1819) afirma que existe no máximo uma reta paralela a uma dada reta passando por um ponto dado (cf. e.g. <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI30.html>).² Mostre que o 5o postulado é equivalente a este axioma (i.e. suponha o 5o postulado como verdadeiro e demonstre o Axioma de Playfair, e, suponha o Axioma de Playfair como verdadeiro e demonstre o 5o postulado).

27. Faça (pesquise e faça) uma demonstração do Teorema de Pitágoras distinta de (não similar a) qualquer uma das seguintes: de Euclides (em *Os Elementos*); de Pitágoras, cf. Howard Eves - *Uma Introdução à História da Matemática*; de um ex-presidente dos EUA; de Leonardo Da Vinci.

28. Sejam $ABCD$ um quadrado, de lados opostos AB, CD e AC, BD , e, E o ponto médio de AB . Mostre que, em área, o quadrado de lado ED é $5/4$ vezes o quadrado $ABCD$ (ou seja, o quadrado sobre ED é o quadrado sobre AB mais o quadrado sobre EB). *Pode usar que o quadrado sobre AB é 4 vezes o quadrado sobre ED .*³

29. Demonstre, usando o “bom português contemporâneo” (de forma clara e sucinta), o Teorema (a Proposição) II.4 de Euclides/*Os Elementos*. Escreva a equação algébrica equivalente ao enunciado.

30. Enuncie e demonstre, usando o “bom português contemporâneo” (de forma clara e sucinta), o teorema (a Proposição) II.12 de Euclides/*Os Elementos*. Escreva a equação algébrica (uma fórmula) equivalente à Tese do teorema.

²Também conhecido como o *Axioma das Paralelas*, cf. e.g. https://pt.wikipedia.org/wiki/Postulado_das_paralelas.

³Isto pode ser mostrado usando o teorema II.1 (de Euclides/*Os Elementos*).