Prova de MA224 - turma P – 12/11/2015

Aluno: ______________________________ **RA:**__________

1. Um bloco de madeira na forma de um paralelepípedo retângulo (um bloco retangular) tem 400cm de comprimento, 90cm de largura e 90cm de altura. O bloco é cortado várias vezes, com cortes paralelos às suas faces, de modo a subdividi-lo em blocos menores, todos de forma de paralelepípedos retângulos de 80cm de comprimento, 30cm de largura e 15cm de altura.

a) (1,0 ponto) Quantas peças foram obtidas?

b) (1,0) Um metro cúbico dessa madeira pesa aproximadamente 900kg. Qual é o peso de uma dessas peças?

2. a) (0,6) Considere a equação do 2o. grau $ax^2 + bx + c = 0$. Dê a fórmula para as suas raízes. Mostre que a soma e o produto das raízes são dados respectivamente por $-b/a$ e c/a.

b) (1,4) Se a soma e o produto das raízes da equação $(4m+3n)x^2 - 5nx + (m-2) = 0$ valem respectivamente, $5/8$ e $3/32$, calcule m e n.

3. a) (0,4) Enuncie o Teorema de Pitágoras.

b) (1,6) Com base na figura abaixo, calcule o comprimento da diagonal BD do quadrilátero $ABCD$ de lados paralelos aos eixos coordenados.

4. Seja Ω um espaço amostral.

a) (0,5) Enuncie as seguintes propriedades básicas de uma medida de probabilidade P definida em Ω (mais precisamente, nos subconjuntos de Ω):

$$P(\Omega) = \quad , \quad P(A \cup B) = \quad , \quad P(A - B) = \quad , \quad P(\emptyset) = \quad , \quad \leq P \leq \quad .$$

b) (1,5) A probabilidade de que a população atual de um país seja de 110 milhões ou mais é de 95%. A probabilidade de ser 110 milhões ou menos é de 8%. Calcule a probabilidade de ser 110 milhões.

5. a) (0,5) Enuncie o Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

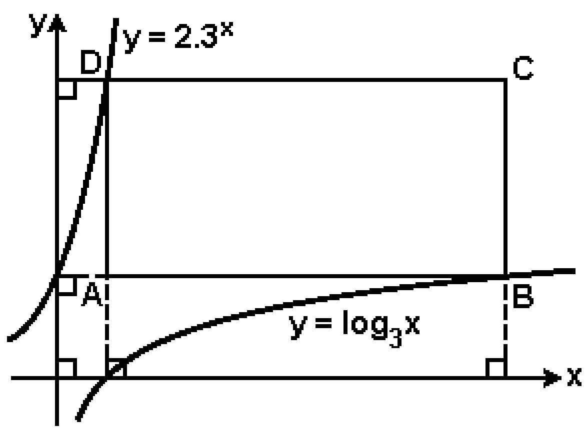
b) (0,5) Enuncie o Princípio de Cavalieri para áreas (o Princípio de Cavalieri no plano).

c) (0,5) Usando o Princípio de Cavalieri (no plano) e o Teorema Fundamental da Proporcionalidade, mostre que a área A limitada por uma elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é diretamente proporcional a a e b, i.e. que $A = Kab$, para alguma constante $K > 1$.

d) (0,5) Deduza o valor da constante K.

Incluir na prova todas as contas feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Boa Prova!


y
y = 2.3ˣ
D
C
A
B
y = log₃x
x

Gabarito/Resoluções/pontuação

Questão 1.

a) Os cortes dividem o comprimento 5 vezes, a largura 3 vezes e a altura 6 vezes

0,5 pontos até aqui

logo, o número de peças obtidas é $5 \times 3 \times 6 = 90$ (noventa). **+ 0,5 pontos**

b) Cada peça tem volume igual a $0,8 \times 0,3 \times 0,15 = 0,036\text{m}^3$ **0,5**

Como 1m^3 pesa 900kg, cada peça pesa $900 \times 0,036 = 32,4\text{kg}$. **+ 0,5**

Questão 2.

a) Fórmula para as raízes: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, **0,1**

onde $\Delta = b^2 - 4ac$. **0,1**

Daí, temos que a soma das raízes é dada por $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$,

+ 0,2

e o produto, por $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$. **+ 0,2**

b) Comparando com o item **a)**, para a equação dada neste item, temos $a = 4m + 3n$, $b = -5n$ e $c = m - 2$, logo, se a soma das raízes vale 5/8, obtemos que $-(-5n)/(4m+3n) = 5/8$, **0,2**

logo, $8n = 4m + 3n$, donde segue que $5n = 4m$, i.e.

$$n = 4m/5. \tag{1}$$

+ 0,2

Por outro lado, se o produto das raízes vale 3/32, analogamente, temos $(m-2)/(4m+3n) = 3/32$,

+ 0,2

donde vem que $32(m-2) = 3(4m+3n)$, logo, $32m - 64 = 12m + 9n$, $20m = 64 + 9n$.

+ 0,2

Usando aí a equação (1), obtemos $20m = 64 + (36m/5)$, **+ 0,2**

logo, $(100 - 36)m/5 = 64$, donde, obtemos $64m/5 = 64$. Então, $\boxed{m = 5}$. **+ 0,2**

Daí, novamente pela equação (1), obtemos também o valor de n: $n = (4 \times 5)/5 = 4$. $\boxed{n = 4}$.

+ 0,2

Questão 3.

a) Enunciado como e.g. um dos enunciados 1. a 3. em http://www.ime.unicamp.br/ msantos/Pitagoras-enunciados.pdf: **0,4 pontos**

Enunciado informal, como e.g. o enunciado 4. em http://www.ime.unicamp.br/ msantos/Pitagoras-enunciados.pdf: **0,2 pontos**

b) Pondo $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, pela figura dada temos $\log_3 a_1 = 0$, logo,

$$\boxed{a_1 = 1} \tag{2}$$

0,25 pontos até aqui

e, $a_2 = 2 \cdot 3^0$, logo,

(3) $$\boxed{a_2 = 2}.$$

+ **0,25**

Além disso, também pela figura, temos que $D = (a_1, 2 \cdot 3^{a_1})$, **0,1**

logo, como $a_1 = 1$ (ver (2)), obtemos que

(4) $$D = (1, 6)$$

+ **0,1**

Analogamente, $b_2 = a_2$ **0,1**

e $b_2 = \log_3 b_1$, **0,1**

logo, como $a_2 = 2$ (ver (3)), obtemos que $2 = \log_3 b_1$, e, então, $b_1 = 3^2 = 9$. Portanto,

$B = (b_1, \log_3 b_1)$ **0,2**

$= (9, \log_3 9) = (9, 2)$. + **0,1**

(5) $$B = (9, 2)$$

De (4) e (5), $A = (1, 2)$ + **0,1**

e, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ABD, concluímos que

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 \\ &= (6-2)^2 + (9-1)^2 \\ &= 4^2 + 8^2 \\ &= 80 \end{aligned}$$

0,2

donde, $\overline{BD} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ + **0,1**

Questão 4.

a) Cada propriedade enunciada corretamente: **0,1 pontos**

$$P(\Omega) = 1, \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$
$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B), \quad P(\emptyset) = 0, \quad 0 \leq P \leq 1.$$

b) Seja p a população do país. Pelos dados do problema, temos

$P(\{p \geq 110\}) = 0,95$ e $P(\{p \leq 110\}) = 0,08$ **0,4**

(com a unidade tomada em milhão). Daí, como $\{p = 110\} = \{p \geq 110\} \cap \{p \leq 110\}$ **0,2**

e a probabilidade de todo o espaço amostral (de populações/o conjunto dos números naturais) é igual a 1, **0,2**

pelas propriedades de uma medida de probabilidade, temos:

$$\begin{aligned} 1 &= P(\{p \geq 110\} \cup \{p \leq 110\}) && \textbf{0,2} \\ &= P(\{p \geq 110\}) + P(\{p \leq 110\}) - P(\{p = 110\}) && \textbf{0,2} \\ P(\{p = 110\}) &= P(\{p \geq 110\}) + P(\{p \leq 110\}) - 1 && \textbf{0,1} \\ &= 0,95 + 0,08 - 1 = 1,03 - 1 && +\textbf{0,1} \\ &= 0,03 \end{aligned}$$

Portanto, a resposta é 3%. + **0,1**

Questão 5.

a) *Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função crescente. Se vale a propriedade $f(nx) = nf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, então esta propriedade também vale para qualquer $c \in \mathbb{R}^+$.*

Enunciado correto: **0,5 pontos**
Enunciado parcialmente correto: **0,25 pontos**

b) *Dadas duas figuras no plano, F e F', e uma reta r_0 nesse plano, se a razão entre os comprimentos dos conjuntos $F \cap r$ e $F' \cap r$ for uma constante K, em relação a qualquer reta r no plano paralela à reta r_0, então a razão entre as áreas de F e F' também é K.*

Enunciado correto: **0,5 pontos**
Enunciado parcialmente correto: **0,25 pontos**

c) Para mostrar que $A = Kab$ basta mostrar que fixado b (arbitrariamente) ou a (também arbitrariamente), temos que A é proporcional a a ou, respectivamente, a b. **0,1**
Fixado b, seja $f(a) = A$ (a área da elipse dada, com b fixado). Como aumentando a a elipse aumenta, temos que a área A também aumenta, ou seja, f é uma função crescente. **0,05**

Tomando r_0 como sendo a reta $y = 0$, uma reta r (qualquer) paralela a r_0 é da forma $r = y$ ($y \in \mathbb{R}$), e sua interseção com a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (obtida fixando y e variando x) é vazio ou o segmento de reta dado pela inequação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, i.e.

$$\begin{gathered} x^2/a^2 \leq 1 - y^2/b^2 \\ \sqrt{x^2/a^2} \leq \sqrt{1 - y^2/b^2} \\ |x|/a \leq \sqrt{1 - y^2/b^2} \\ |x| \leq a\sqrt{1 - y^2/b^2} \end{gathered}$$

cujo comprimento é $2a\sqrt{1 - y^2/b^2}$. **0,1**
Da mesma forma, substituindo a por na, temos que a interseção da reta r com a elipse $\frac{x^2}{(na)^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é vazio ou o segmento $|x| \leq na\sqrt{1 - y^2/b^2}$, cujo comprimento é $2na\sqrt{1 - y^2/b^2}$. **0,05**
Como a razão entre os comprimentos dos segmentos $|x| \leq na\sqrt{1 - y^2/b^2}$é e $|x| \leq a\sqrt{1 - y^2/b^2}$ é constante, e igual a n, concluímos, pelo Princípio de Cavalieri (no plano), que $f(na) = nf(a)$, quaisquer que sejam $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}^+$. **0,1**
Daí, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalide, $f(ca) = cf(a)$, para quaisquer $c, a \in \mathbb{R}^+$, ou seja a área A com b fixado é proporcional a a. **0,05**
Analogamente, a área A com a fixado é proporcional a b. **0,05**

d) Para deduzir o valor da constante K, basta tomarmos o caso em que $a = b = 1$, pois neste caso temos que $A = K$ **0,2**
e a elipse reduz-se ao círculo de raio 1, **0,2**
cuja área, como sabemos, é π. Logo $K = \pi$. **0,1**