Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Professor: Dr. Marcelo Martins dos Santos
MA 720 - Análise no $\mathbb{R}^n$ - Turma A

Lista de exercícios 3 - Análise no $\mathbb{R}^n$

1. Sejam $A \subset \mathbb{R}^4$ aberto e $f : A \to \mathbb{R}^3$ de classe $C^1(A)$ e posto 3 em todo A. Demonstre que $\|f(x)\|$ não assume máximo para $x \in A$.

2. Sejam $n \leq m$ números naturais e $f : A \to \mathbb{R}^m$ uma submersão de classe $C^1(A)$, onde $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. Prove que $f(U)$ é aberto para todo conjunto aberto $U \subset A$.

3. Sejam $f, g : A \to \mathbb{R}$ integráveis. Prove que

$$\left(\int_A fg \right)^2 \leq \left(\int_A f^2 \right) \left(\int_A g^2 \right).$$

4. Seja K um conjunto compacto e conexo e seja $f : K \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que existe $c \in K$ tal que

$$\int_K f = f(c)\mathrm{vol}\,(K).$$

5. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que o conjunto $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ em medida nula em $\mathbb{R}^2$.

6. Seja Q um retângulo em $\mathbb{R}^n$ e $g : Q \to \mathbb{R}$ integrável.
   (a) Se $g(x) = 0$ para todo x exceto em um conjunto de medida nula, então prove que $\int_Q g = 0$.
   (b) Mostre que, se $g(x) \geq 0$ para todo $x \in Q$ e se $\int_Q g = 0$, então $g(x) = 0$ exceto em um conjunto de medida nula.

7. Seja $f : A \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^1(A)$, onde A é um aberto de $\mathbb{R}^n$. Se para algum $a \in A$, $f'(a)$ é isomorfismo, então mostre que

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathrm{vol}\;(f\,(B[a, r]))}{\mathrm{vol}\;(B[a, r])} = \left|\det f'(a)\right|.$$

8. Prove que a 1-forma

$$\omega = \frac{-z}{y^2 + z^2} dy + \frac{y}{y^2 + z^2} dz$$

é fechada em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}$ mas não é exata.

9. Considere o 3-cubo singular $f : [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$f(u, v, w) = \left(w \,\mathrm{sen}\left(\pi u + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi v}{2}\right), w \,\mathrm{sen}\left(\pi u + \frac{\pi}{2}\right) \mathrm{sen}\left(\frac{\pi v}{2}\right), w \cos\left(\pi u + \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

e a 3 forma $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$.
   (a) Calcule $\int_f \omega$ pela definição.
   (b) Obtenha uma 2-forma φ tal que $d\varphi = \omega$.
   (c) Calcule $\int_{\partial f} \varphi$ pela definição e verifique o Teorema de Stokes.