1. (*2.0 pontos*) Considere a equação diferencial:

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = x^4, \quad x > 0$$

(a) (0.5) Mostre que $y_1 = x^2$ e $y_2 = x^2 \ln x$ são linearmente independentes calculando o Wronskiano.

(b) (1.5) Dado que y_1 e y_2 de (a) são soluções da equação homogênea associada, utilize o método de variação de parâmetros para calcular uma solução particular da equação diferencial.

2. (*2.0 pontos*) Resolva por transformada de Laplace o seguinte PVI:

$$y'' + 4y' + 5y = \delta(t - \pi) + \delta(t - 2\pi)$$

onde $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$.

3. (*2.0 pontos*) Considere o sistema linear não homogêneo:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Dê a solução geral do sistema linear homogêneo, usando autovalores e autovetores.

(b) Encontre uma solução particular do sistema linear não homogêneo via variação de parâmetros.

(c) Dê a solução geral do sistema linear não homogêneo.

4. (*2.0 pontos*)

Dado que $x = 0$ é um ponto singular regular para a equação

$$2x^2y'' + xy' - (3 - x^2)y = 0$$

(a) (0.3) Prove que as raízes da equação indicial são : $r_1 = \frac{3}{2}$ e $r_2 = -1$.

(b) (0.7) Prove que a fórmula de recorrência para a maior raiz é:

$$c_k = \frac{-c_{k-1}}{k(2k+5)}$$

para $k \geq 2$.

(c) (1.0) A partir da relação de recorrência encontre a fórmula para o coeficiente geral da solução da equação correspondente à maior raiz. Escreva a solução em série de Frobenius, correspondente à **maior raiz** em torno de $x = 0$.

5. (*2.0 pontos*) Resolva o seguinte problema de valor de contorno usando o método de separação de variáveis justificando detalhadamente TODA a análise:

$$\begin{cases} u_t = 9u_{xx}; & 0 < x < 4, \ t > 0, \\ u(0,t) = u(4,t) = 0; & \\ u(x,0) = 5 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{4} + 8 \operatorname{sen} 2\pi x & \end{cases}$$

$\boxed{1.}$ (a) $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$] 0,1

$= \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \ln x \\ 2x & 2x\ln x + x \end{vmatrix}$] 0,1

$= x^2(\cancel{2x\ln x} + x) - 2x \cdot \cancel{x^2 \ln x}$] 0,1

$= x^3 \neq 0 \ (>0), \ \forall x \neq 0 \ (\forall x > 0)$] 0,2

(b) $\boxed{y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2}$ 0,1 , $\boxed{\begin{matrix} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = x^2 \end{matrix}}$ $\boxed{\text{0,4 aqui}}$

ou (EXCLUSIVO)

$\boxed{\begin{cases} u_1' \cdot x^2 + u_2' \cdot x^2 \ln x = 0 \\ u_1' \cdot 2x + u_2' (2x\ln x + x) = x^2 \end{cases}}$ $\boxed{\text{0,4 aqui}}$

$u_1' = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} 0 & x^2 \ln x \\ x^2 & 2x\ln x + x \end{vmatrix}$] 0,2

$= \frac{1}{x^3} \cdot (-x^4 \ln x)$] 0,1

$= -x \ln x$

$u_1 = -\int x \ln x \, dx$] 0,1

$\left(\begin{matrix} v = \ln x \\ du = x\,dx \end{matrix} \right)$

$= -\int v\,du = -uv + \int u\,dv$

$= -\frac{x^2}{2} \cdot \ln x + \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx$

$= -\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} \ (+c)$] 0,1

$\boxed{\text{Mesma pontuação para o cálculo de } u_2' \text{ e } u_2.}$

$\boxed{2.}$

$$\mathcal{L}\{y'' + 4y' + 5y\} = e^{-\pi s} + e^{-2\pi s} \quad \Big]\ 0,2$$

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + 4s\mathcal{L}\{y\} - 4y(0) + 5\mathcal{L}\{y\} = e^{-\pi s} + e^{-2\pi s}$$

$$(s^2 + 4s + 5)\,\mathcal{L}\{y\} - 2 = e^{-\pi s} + e^{-2\pi s} \quad \Big]\ 0,4$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{2}{s^2+4s+5} + \frac{e^{-\pi s} + e^{-2\pi s}}{s^2+4s+5}$$

$$\Delta = 16 - 20 < 0$$

$$s^2 + 4s + 5 = (s+2)^2 + 1 \quad \Big]\ 0,2$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{2}{(s+2)^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{(s+2)^2+1} + \frac{e^{-2\pi s}}{(s+2)^2+1}$$

$$y = 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\} + u_\pi(t)\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\}(t-\pi) + u_{2\pi}(t)\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\}(t-2\pi) \quad \Big]\ 0,6$$

$$= 2e^{-2t}\,\mathrm{sen}\,t + u_\pi(t)\,e^{-2(t-\pi)}\,\mathrm{sen}\,(t-\pi) + u_{2\pi}(t)\,e^{-2(t-2\pi)}\,\mathrm{sen}\,(t-2\pi) \quad \Big]\ 0,6$$

Questões 3, 4 e 5 : pontuação análoga à P2.