

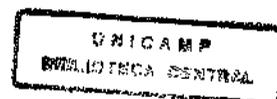
**ASPECTOS TEÓRICOS DO MÉTODO DE GALERKIN
LOCALMENTE DESCONTÍNUO**

LUCIANE A. MAROSTEGAN

Orientador: Marcelo Martins dos Santos

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

**Campinas
1998**



ASPECTOS TEÓRICOS DO MÉTODO DE GALERKIN LOCALMENTE DESCONTINUO

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Luciane A. Marostegan e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 15 de abril de 1998

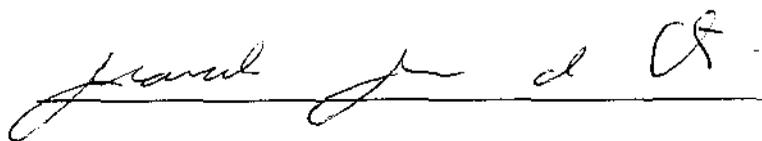


Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos

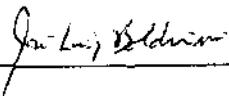
Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Dissertação de Mestrado defendida e aprovada em 15 de abril de 1998

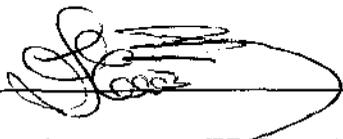
pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). MARCELO MARTINS DOS SANTOS



Prof (a). Dr (a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI



Prof (a). Dr (a). JAIME EDILBERTO MUNOZ RIVERA

QUE A LUTA NUNCA TERMINE...

DEDICO ESTA DISSERTAÇÃO
AOS MEUS PAIS
E AO MEU FILHO GABRIEL.

AGRADECIMENTOS

Agradeço

- ao Prof. Marcelo Martins dos Santos por toda dedicação, amizade e orientação .
- ao apoio permanente da minha família.
- a B. Cockburn pelo preprint [6], tema desta Dissertação .
- ao Prof. José Luis Boldrini e ao Prof. Petrônio Pulino pela sugestão da referência [11].
- à Érika e Elis, que compartilharam comigo essa etapa.
- aos amigos da pós-graduação, à Adriana Mendonça e Gisele Ducati pela amizade e disponibilidade irrestrita.
- à Capes pelo apoio financeiro.
- a todos os professores e funcionários do IMECC.

Índice

INTRODUÇÃO	4
1 PRELIMINARES	6
1.1 Uma desigualdade de Poincaré inversa	6
1.2 Teoria de aproximação em espaços de Sobolev	9
1.3 Teoria de Interpolação para o método de Elementos Finitos . .	11
1.4 Um resultado de Análise Matricial	14
2 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA PROBLEMAS DE CONVECÇÃO-DIFUSÃO	21
2.1 Problema modelo de equação de convecção-difusão	21
2.2 Método de Galerkin clássico com condição de fronteira fracamente imposta	23
2.3 Método de difusão	27
2.4 Método de Galerkin descontínuo	30
3 MÉTODO DE GALERKIN LOCALMENTE DESCONTÍNUO	37
3.1 Formulação Geral	38
3.1.1 Fluxo numérico	40
3.1.2 Uma base ortogonal de V_h	43
3.1.3 A Projeção ortogonal do $L^2((0,1))$ em V_h	44
3.2 Estabilidade na norma L^2	45
3.3 Estimativa do erro no caso linear	50
BIBLIOGRAFIA	64

INTRODUÇÃO

O presente texto tem por objetivo introduzir aspectos teóricos do *Método de Galerkin Localmente Descontínuo* (GLD) [6] para equações de convecção-difusão no caso unidimensional:

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(f(u) - a(u)\partial_x u) = 0 & \text{em } (0, T) \times (0, 1), \\ u(t = 0) = u_0 & \text{em } (0, 1) \text{ (condição inicial)} \\ u(x = 0) = u(x = 1) & \text{em } (0, T) \text{ condição de fronteira periódica} \end{cases} \quad (0.1)$$

A idéia básica do método é transformar o problema num sistema de E.D.P's de primeira ordem e então discretizá-lo pelo método Runge-Kutta-Galerkin Descontínuo (RKGD) [7, 8]. Mostraremos a estabilidade do GLD sob hipótese bastantes gerais e uma estimativa do erro no caso linear, i.e. f linear não nula e a uma constante positiva. Estes resultados são, respectivamente, o conteúdo dos Teoremas 3.2.1 e 3.3.1 abaixo, cujas demonstrações são expostas aqui com detalhes. O método também funciona bem no caso linear multidimensional [6].

Observamos que o GLD difere do *Método de Galerkin Descontínuo* (GD) para equações parabólicas introduzido por [10]. Neste, as soluções aproximadas são contínuas no espaço, pois o espaço de elementos finitos estão contidos em espaços de Sobolev de índice positivo. No GLD os espaços de elementos finitos na variável espacial são subconjuntos de L^1 , a saber,

$$V_h = \{v \in L^1(0, 1); v|_{I_j} \in \mathcal{P}^k(I_j), j = 1 \dots, N\},$$

sendo as funções aproximadas descontínuas no espaço e no tempo.

A taxa de convergência do método é da ordem de $(\Delta x)^k$ para o problema 3.1 no caso linear, i.e. $a(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} a$ e $f'(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} c$. No caso puramente hiperbólico, caso $a = 0$, a taxa de convergência é da ordem de $(\Delta x)^{k+1/2}$, esta é a mesma taxa de convergência do método de Galerkin descontínuo original [6].

A técnica usada para provar o Teorema 3.3.1 é uma combinação do resultado de estabilidade em L^2 , provado no Teorema 3.2.1 e das propriedades de aproximação do espaço de elementos finitos.

Além do Capítulo 3 sobre o GLD, escrevemos dois outros capítulos que auxiliam na compreensão desse método. Como trataremos de aspectos teóricos do *Método de Galerkin Localmente Descontínuo*, no Capítulo 1 apresentamos alguns resultados teóricos de interesse geral. Começamos com uma desigualdade do tipo Poincaré inversa, seguimos com a teoria de Aproximação em Espaços de Sobolev, depois com a Teoria de Interpolação para o Método de Elementos Finitos e finalizamos com um resultado de Análise Matricial.

No Capítulo 2 apresentamos três métodos de elementos finitos: o método de Galerkin clássico, o método de difusão e o método de Galerkin descontínuo, para o problema modelo abaixo de equação de convecção-difusão :

$$\begin{cases} \epsilon \Delta u + u_\beta + u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, e ϵ é uma constante positiva, e $v_\beta = \beta \cdot \nabla v$ denota a derivada na direção β . Tendo em vista que o processo usado por esses métodos é aproximado, é fundamental termos uma idéia da “qualidade” da solução aproximada. Para isso apresentamos, para cada método, um resultado de estabilidade e um teorema de estimativa do erro da aproximação da solução exata u .

Analizamos então no Capítulo 3 a estabilidade e a estimativa do erro no caso linear do Método de Galerkin Localmente Descontínuo para a equação 0.1 onde u é um escalar e $a(u) \geq 0$.

Capítulo 1

PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos alguns resultados teóricos que são de interesse geral. Eles são cruciais para demonstrações nos Capítulos 2 e 3. Começamos com uma desigualdade tipo Poincaré inversa, seguimos com a teoria de Aproximação em Espaços de Sobolev, depois com a teoria de interpolação para o método de Elementos Finitos e finalizamos com um resultado de Análise Matricial. As bibliografias que usamos para estes tópicos, são, respectivamente, [11], [5, 11], [11] e [4].

1.1 Uma desigualdade de Poincaré inversa

Nesta seção demonstramos um resultado que pode ser chamado de uma “desigualdade de Poincaré inversa”, uma vez que será uma desigualdade de Poincaré escrita no sentido contrário. Ela encontra-se enunciada e demonstrada em [11], p. 142, para o caso $l = 1$. A demonstração para um natural l qualquer praticamente não difere daquela para $l = 1$. Esta desigualdade é usada na verificação da estabilidade do *método de difusão com $\epsilon > 0$* [11] (v. Observação 2.3.3).

Lema 1.1.1 (Cf. [11], p. 142). *Se K é um triângulo e $v \in \mathcal{P}^l(K)$, então*

$$\int_K |\nabla v|^2 dx \leq c_l h_K^{-2} \int_K |v|^2 dx,$$

i.e.

$$\|\nabla v\|_K \leq c_l h_K^{-1} \|v\|_K, \tag{1.1}$$

onde $h_K \stackrel{\text{def}}{=} \text{diam}(K)$.

Demonstração: Primeiramente vejamos a demonstração para o caso em que K é o triângulo canônico \hat{K} (dito *triângulo de referência*) de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Neste caso, $h_K = 1$, e 1.1 reduz-se a

$$\|\nabla v\|_K / \|v\|_K \leq C, \quad (1.2)$$

para alguma constante C independente de $v \in \mathcal{P}^l(K)$; notemos que 1.1 é trivialmente satisfeita se $\|v\|_K = 0$. Para provar 1.2, definimos

$$f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \|\nabla v\|_K^2 / \|v\|_K^2,$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbf{R}^N / \{0\}$ e $v = \sum_{i=0}^N x_i \phi_i$, sendo $\{\phi_i\}_{i=0}^N$ uma base de $\mathcal{P}^l(K)$. (O valor exato de N é $(l+1)(l+2)/2$, mas isto não será utilizado.) O que precisamos mostrar é que f é uma função limitada em $\mathbf{R}^N / \{0\}$. Observemos que f é uma função homogênea de grau zero, i.e. $f(s\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$, $\forall s \in \mathbf{R} / \{0\}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^N / \{0\}$, logo, é suficiente mostrar que f é uma função limitada na esfera unitária $S^{N-1} = \{\mathbf{c} \in \mathbf{R}^N; |\mathbf{c}| = 1\}$. Mas isto segue-se do fato de f ser uma função contínua e S^{N-1} ser um conjunto compacto.

No caso geral (K um triângulo qualquer), tomamos uma aplicação afim invertível $F: \hat{K} \rightarrow K$, e temos que

$$\int_{\hat{K}} |\nabla v \circ F(\hat{\mathbf{x}})|^2 d\hat{\mathbf{x}} \leq C \int_{\hat{K}} |v \circ F(\hat{\mathbf{x}})|^2 d\hat{\mathbf{x}}, \quad (1.3)$$

$\forall v \in \mathcal{P}^l(K)$, pelo caso particular que acabamos de provar acima. A aplicação F tem a forma $F(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}$, $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{K}$, onde \mathbf{B} é uma matriz real 2×2 invertível e \mathbf{b} é um vetor do \mathbf{R}^2 . Agora é só uma questão de aplicar o teorema de mudanças de variáveis em 1.3, usando que $\nabla v \circ F = ((\nabla v) \circ F)\mathbf{B}$, para ver o resultado pretendido. De fato, assim procedendo, obtemos que

$$\int_K |(\nabla v(\mathbf{x}))\mathbf{B}|^2 d\mathbf{x} \leq C \int_K |v(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x},$$

onde fizemos o cancelamento do determinante Jacobiano, i.e. $\det \mathbf{B}$, o qual aparece em ambos os membros desta desigualdade. Logo, temos 1.1, visto que \mathbf{B} é uma matriz invertível cuja norma é da ordem de h_K ; mais precisamente,

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathbf{R}^2} = \|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Bz}\|_{\mathbf{R}^2} \leq \|\mathbf{B}^{-1}\| \|\mathbf{Bz}\|_{\mathbf{R}^2}$$

$\forall \mathbf{z} \in \mathbf{R}^2$, logo,

$$\|\mathbf{Bz}\|_{\mathbf{R}^2} \geq \|\mathbf{B}^{-1}\|^{-1} \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{R}^2}, \quad (1.4)$$

onde a norma $\|\cdot\|$ de matriz que estamos usando é a norma de operadores lineares, logo,

$$\|\mathbf{B}^{-1}\|^{-1} \leq \|\mathbf{B}\| \leq 2h_K, \quad (1.5)$$

onde para a última desigualdade usamos a Observação 1.1.3 abaixo. ■

Observação 1.1.2 *A estimativa 1.4 vale em geral para uma matriz invertível de ordem qualquer, com o mesmo argumento dado acima para obtê-la.*

Observação 1.1.3 *Vamos provar aqui a última desigualdade em 1.5:*

Identificando os lados do triângulo K com vetores \mathbf{v}_i , $i = 1, 2, 3$, e o vértice de K , dado pela interseção das origens de \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 , por \mathbf{b} , a nossa aplicação F fica caracterizada pelas equações

$$F(\mathbf{e}_i) = \mathbf{v}_i + \mathbf{b}, \quad i = 1, 2,$$

onde \mathbf{e}_i , $i = 1, 2$ denotam os vetores da base canônica do \mathbf{R}^2 ou seja, tomando \mathbf{B} como sendo a matriz da transformação linear T do \mathbf{R}^2 no \mathbf{R}^2 tal que $T(\mathbf{e}_i) = \mathbf{v}_i$, $i = 1, 2$, temos que a aplicação afim invertível F que transforma \hat{K} em K é dada por

$$F(\mathbf{z}) = \mathbf{Bz} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{R}^2.$$

Notemos que \hat{K} , o *triângulo de referência*, é o triângulo cujos lados podem ser identificados com os vetores \mathbf{e}_i , $i = 1, 2$. (Notemos também que o terceiro lado do triângulo K , identificado com \mathbf{v}_3 , é linearmente dependente de \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 , i.e. $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$. Por esta razão ele não foi usado na caracterização de F que acabamos de dar acima. É imediato verificar que o terceiro lado do triângulo \hat{K} é transformado no terceiro lado do triângulo K , i.e. $F(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$). Feitas estas considerações fica fácil concluir o que desejamos. Com efeito, temos que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}\| &\stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\{\mathbf{z} \in \mathbf{R}^2; \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{R}^2} = 1\}} \|\mathbf{Bz}\|_{\mathbf{R}^2} \\ &\leq \sup_{\{\mathbf{z} \in \mathbf{R}^2; \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{R}^2} = 1\}} \|z_1 \mathbf{v}_1 + z_2 \mathbf{v}_2\|_{\mathbf{R}^2}, \quad \mathbf{z} = (z_1, z_2), \\ &\leq \sup_{\{\mathbf{z} \in \mathbf{R}^2; \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{R}^2} = 1\}} \{|z_1| \|\mathbf{v}_1\|_{\mathbf{R}^2} + |z_2| \|\mathbf{v}_2\|_{\mathbf{R}^2}\} \\ &\leq h_K \sup_{\{\mathbf{z} \in \mathbf{R}^2; \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{R}^2} = 1\}} \{|z_1| + |z_2|\} \\ &\leq h_K \sup_{\{\mathbf{z} \in \mathbf{R}^2; \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{R}^2} = 1\}} 2\|\mathbf{z}\|_{\mathbf{R}^2} \\ &\leq 2h_K. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.2 Teoria de aproximação em espaços de Sobolev

Consideraremos o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ o qual, para quaisquer $m \geq 0$ inteiro, $1 \leq p \leq \infty$, e aberto Ω do \mathbf{R}^n , consiste daquelas funções $v \in L^p(\Omega)$ para as quais todas as derivadas parciais $\partial^\alpha v$, no sentido das distribuições, com $|\alpha| \leq m$ pertencem ao espaço $L^p(\Omega)$. A norma em $W^{m,p}(\Omega)$ será denotada por $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$, i.e.

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha v|^p dx \right)^{1/p}, \quad v \in W^{m,p}(\Omega),$$

se $1 \leq p < \infty$, e

$$\|v\|_{W^{\infty,p}(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{|\alpha| \leq m} \|v\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad v \in W^{\infty,p}(\Omega),$$

se $m = \infty$. Também usaremos a notação $|\cdot|_{W^{j,p}(\Omega)}$, $j \leq m$, para representar a semi-norma dada pelas derivadas de ordem j , i.e.

$$|v|_{W^{j,p}(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{|\alpha|=j} \int_{\Omega} |\partial^\alpha v|^p dx \right)^{1/p}, \quad v \in W^{m,p}(\Omega),$$

se $1 \leq p < \infty$, e

$$|v|_{W^{\infty,p}(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{|\alpha|=j} \|v\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad v \in W^{\infty,p}(\Omega),$$

se $p = \infty$.

Definição 1.2.1 *Dois conjuntos abertos Ω e $\hat{\Omega}$ do \mathbf{R}^n são afim-equivalentes se existe uma aplicação afim invertível:*

$$F : \hat{x} \in \mathbf{R}^n \longrightarrow F(\hat{x}) = B\hat{x} + \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n, \quad B \in M_{n \times n}(\mathbf{R}^n) \text{ invertível}, \quad \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n,$$

tal que $\Omega = F(\hat{\Omega})$

Neste caso, cada ponto $\hat{x} \in \hat{\Omega}$ fica identificado com o ponto $x = F(\hat{x}) \in \Omega$, e vice-versa: cada ponto $x \in \Omega$ fica identificado com o ponto $\hat{x} = F^{-1}(x) \in \hat{\Omega}$.

Teorema 1.2.2 ([5], p. 121). *Sejam $\hat{\Omega}$ um aberto do \mathbf{R}^n , $k \geq 0$ e $m \geq 0$ números inteiros e $p, q \in [1, \infty]$ tais que os espaços de Sobolev $W^{k+1,p}(\hat{\Omega})$ e $W^{m,q}(\hat{\Omega})$ satisfaçam a inclusão*

$$W^{k+1,p}(\hat{\Omega}) \hookrightarrow W^{m,q}(\hat{\Omega}).$$

Seja ainda $\hat{\Pi} \in \mathcal{L}(W^{k+1,p}(\hat{\Omega}), W^{m,p}(\hat{\Omega}))$ uma transformação linear $\mathcal{P}^k(\hat{\Omega})$ invariante, i.e.

$$\hat{\Pi}\hat{p} = \hat{p}, \quad \forall \hat{p} \in \mathcal{P}^k(\hat{\Omega}).$$

Finalmente, para qualquer conjunto aberto Ω afim-equivalente ao conjunto $\hat{\Omega}$, consideramos a transformação linear $\Pi_\Omega \in \mathcal{L}(W^{k+1,p}(\Omega), W^{m,p}(\Omega))$ associada a $\hat{\Pi}$, a qual é definida pela relação

$$(\Pi_\Omega v)^\sim = \hat{\Pi}\hat{v},$$

i.e. $(\Pi_\Omega v)^\sim(x) = (\hat{\Pi}\hat{v})(\hat{x})$, para quaisquer $v \in W^{k+1,p}(\Omega)$ e $x \in \Omega$, onde \hat{x} está relacionado com x segundo a definição 1.2.1 acima (i.e. $x = F(\hat{x})$) e $\hat{v} \stackrel{\text{def}}{=} v \circ F^{-1}$. Então existe uma constante $C(\hat{\Pi}, \hat{\Omega})$ que só depende de $\hat{\Pi}$ e $\hat{\Omega}$ tal que, para todo conjunto Ω afim-equivalente a $\hat{\Omega}$ e qualquer função $v \in W^{k+1,p}(\Omega)$, vale a seguinte estimativa:

$$|v - \Pi_\Omega v|_{W^{m,q}(\Omega)} \leq C(\hat{\Pi}, \hat{\Omega}) |\Omega|^{(1/q)-(1/p)} \frac{h^{k+1}}{\rho^m} |v|_{W^{k+1,p}(\Omega)}, \quad (1.6)$$

onde $h \stackrel{\text{def}}{=} \text{diam}(\Omega)$, $\rho \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\text{diam}(S); \text{onde } S \text{ é uma bola contida em } \Omega\}$ e $|\Omega|$ é a medida de Lebesgue de Ω .

Demonstração: V. [5], p. 121. ■

Este teorema é o resultado que dá o título desta seção, pois $\Pi_\Omega v$ pode ser visto como uma aproximação da função v num subespaço de $W^{m,q}(\Omega)$ e a desigualdade 1.6 fornece uma estimativa do erro cometido nesta aproximação. Seu enunciado foi retirado *ipsis litteris* de [5]. Recomendamos ao leitor também [5], p. 114, para ver o enunciado do teorema das imersões de Sobolev; v. também [1], p. 97. Casos particulares interessantes do teorema acima são o Corolário 1.2.3 abaixo e Teorema 1.3.2 da próxima seção, os quais serão usados nos Capítulos 2 e 3 desta Dissertação.

Corolário 1.2.3 *Sejam I um intervalo da reta e \mathbf{P} a projeção do $L^2(I)$ em $\mathcal{P}^k(I)$. Então*

$$\|\mathbf{P}v - v\|_{L^\infty(I)} \leq c_k |I|^{k+1/2} |v|_{H^{k+1}(I)}, \quad (1.7)$$

e

$$\|\mathbf{P}v - v\|_{L^2(I)} \leq c_k |I|^{k+1} |v|_{H^{k+1}(I)}. \quad (1.8)$$

Demonstração: Tomando no Teorema 1.2.2 $k \geq 0, m = 0, p = 2, q = \infty, \Omega = I, \hat{\Omega} = (0, 1)$, e $\hat{\Pi}$ a projeção do $L^2((0, 1))$ em $\mathcal{P}^k((0, 1))$, obtemos imediatamente o resultado 1.7. Para o resultado 1.8, tomamos os mesmos valores acima exceto o valor de q que neste caso deve ser igual a 2. ■

1.3 Teoria de Interpolação para o método de Elementos Finitos

O método de elementos finitos é uma técnica geral para construir soluções aproximadas para problemas de valor de fronteira. Ele consiste em dividir o domínio da solução em um número finito de subdomínios, os elementos finitos, e usar conceitos variacionais (soluções fracas), para construir uma aproximação da solução sobre cada coleção de elementos finitos. Para as demonstrações dos resultados de estimativa do erro dos métodos desse capítulo usaremos resultados da teoria de interpolação para o método de elementos finitos. Vamos então fazer uma breve introdução a essa teoria.

Nesta seção trabalhamos com $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ um domínio poligonal, i.e um aberto limitado conexo cuja fronteira é uma curva fechada retilínea por partes. Faremos uma triangulação de Ω em um conjunto $T_h = \{K_1, \dots, K_m\}$ de triângulos K_i , com $\Omega = \cup_{K \in T_h} K = K_1 \cup \dots \cup K_m$ tal que nenhum vértice de um triângulo pertença ao lado de qualquer outro triângulo. Para cada $K \in T_h$ definimos:

$$\begin{aligned} h_K &= \text{diâmetro de } K \\ \rho_K &= \text{diâmetro do círculo inscrito em } K \\ h &= \max_{K \in T_h} h_K \end{aligned}$$

Assumiremos que existe uma constante α independente da triangulação T_h , i.e independente de h , tal que $\frac{\rho_K}{h_K} \geq \alpha \quad \forall K \in T_h$ (condição de ângulo mínimo;

triangulação regular). A constante α é uma medida do menor ângulo em qualquer $K \in T_h$.

Para um dado inteiro não-negativo l introduziremos o espaço de elementos finitos:

$$V_h \equiv V_h^l \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in H^1(\Omega); v|_K \in \mathcal{P}^l(K) \forall K \in T_h\}$$

(espaço das funções polinomiais por partes de grau no máximo l) onde $\mathcal{P}^l(K)$ é a restrição a K dos polinômios de grau no máximo l .

Definição 1.3.1 *Sejam $x^i, i = 1, \dots, N$, os nós de T_h , i.e os vértices dos triângulos K . Dado $v \in C^0(\bar{\Omega})$ definimos o interpolante \bar{v}^h de v , se existir, como sendo o elemento em V_h tal que*

$$\bar{v}^h(x^i) = v(x^i); i = 1, \dots, N.$$

Começaremos enunciando resultados básicos de estimativa do erro $v - \bar{v}^h$ em cada $K \in T_h$.

Teorema 1.3.2 *Seja $K \in T_h$ um triângulo com vértices $a^i; i = 1, 2, 3$. Dado $v \in C^0(K)$, seja o interpolante $\bar{v}^h \in \mathcal{P}^1(K)$ definido por:*

$$\bar{v}^h(a^i) = v(a^i); i = 1, 2, 3. \quad (1.9)$$

Então :

$$\|v - \bar{v}^h\|_{L^\infty(K)} \leq Ch_K^2 |v|_{W^{2,\infty}(K)}; \quad (1.10)$$

$$|v - \bar{v}^h|_{W^{1,\infty}(K)} \leq C \frac{h_K^2}{\rho_K} |v|_{W^{2,\infty}(K)}; \quad (1.11)$$

$$\|v - \bar{v}^h\|_{L^2(K)} \leq Ch_K^2 |v|_{H^2(K)}; \quad (1.12)$$

e

$$|v - \bar{v}^h|_{H^1(K)} \leq C \frac{h_K^2}{\rho_K} |v|_{H^2(K)}; \quad (1.13)$$

onde C é uma constante independente de K e v .

Demonstração: A demonstração deste Teorema é a mesma do Corolário 1.2.3 da seção anterior, ou seja, este Teorema também é uma consequência, podemos dizer, imediata do Teorema 1.2.2. Com efeito, basta fazer as

escolhas apropriadas dos parâmetros no Teorema 1.2.2 para se chegar às estimativas 1.10–1.13 acima: Tomemos $\hat{\Omega} = \hat{K} \equiv$ o triângulo de referência de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$, $\Omega = K$, $k = 1$, $\hat{\Pi}$ o operador de interpolação definido em 1.9 e; $p = q = \infty$, $m = 0$, para se obter 1.10; $p = q = \infty$, $m = 0$, para se obter 1.11; $p = q = 2$, $m = 0$ para se obter 1.12; $p = q = 2$, $m = 1$ para se obter 1.13. ■

Observação 1.3.3 A constante C em 1.10 pode ser tomada como sendo igual a 2 e em 1.11, igual a 6; v. [11], p.85

Observação 1.3.4 Trabalhando com polinômios de grau maior do que 1 obtemos, de forma análoga, as seguintes estimativas:

$$\|v - \bar{v}^h\|_{L^\infty(K)} \leq Ch_K^{l+1} |v|_{W^{l+1, \infty}(K)}; \quad (1.14)$$

$$|v - \bar{v}^h|_{W^{1, \infty}(K)} \leq C \frac{h_K^{l+1}}{\rho_K} |v|_{W^{l+1, \infty}(K)}; \quad (1.15)$$

$$\|u - \bar{w}^h\|_{L^2(K)} \leq Ch_K^{l+1} |v|_{H^{l+1}(K)}; \quad (1.16)$$

e

$$|v - \bar{v}^h|_{H^1(K)} \leq C \frac{h_K^{l+1}}{\rho_K} |v|_{H^{l+1}(K)}; \quad (1.17)$$

onde C é uma constante independente de K e v .

Na verdade, se o leitor preferir, podemos escrever a estimativa do erro local em relação a qualquer norma $\|\cdot\|_{L^p(K)}$, $1 \leq p \leq \infty$, ou, mais geralmente, em relação a qualquer semi-norma $|\cdot|_{W^{m,p}(K)}$, $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \{0, 1, \dots, l\}$, de forma sucinta como uma só estimativa, a saber,

$$|v - \bar{v}^h|_{W^{m,p}(K)} \leq C \frac{h_K^{l+1}}{\rho_K^m} |v|_{W^{l+1,p}(K)}, \quad (1.18)$$

onde C é uma constante independente de K , m , p e v . Com efeito, para obtermos este resultado, basta usarmos o teorema 1.2.2 com $\hat{\Omega} \equiv$ triângulo de referência \hat{K} de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$, $k = l$, $q = p$, $\hat{\Pi} \equiv$ operador de interpolação e $\Omega = K$.

Com a estimativa local 1.18 podemos estimar facilmente o erro de interpolação global em relação a qualquer semi-norma $|\cdot|_{W^{m,p}(\Omega)}$. De fato, usando que a malha (triangulação) é regular, i.e. $\rho_K/h_K \geq \alpha > 0, \forall K, \forall h$, temos:

$$\begin{aligned} |v - \bar{v}^h|_{W^{m,p}(\Omega)}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v - \bar{v}^h|_{W^{m,p}(K)}^2 \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} C^2 h_K^{2(l+1-m)} \left(\frac{h_K}{\rho_K}\right)^{2m} |v|_{W^{l+1,p}(K)}^2 \\ &\leq C^2 \frac{h^{2(l+1-m)}}{\alpha^{2m}} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|_{W^{l+1,p}(K)}^2 \\ &= C^2 \frac{h^{2(l+1-m)}}{\alpha^{2m}} |v|_{W^{l+1,p}(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

então

$$|v - \bar{v}^h|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq C \frac{h^{l+1-m}}{\alpha^m} |v|_{W^{l+1,p}(\Omega)}. \quad (1.19)$$

Em particular, temos as estimativas

$$\begin{aligned} \|v - \bar{v}^h\|_{L^2(\Omega)} &\leq C h^{l+1} |v|_{H^{l+1}(\Omega)} \\ |v - \bar{v}^h|_{H^1(\Omega)} &\leq C h^l |v|_{H^{l+1}(\Omega)}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

as quais são obtidas de 1.19 tomando-se $p = 2$ e, respectivamente, $m = 0$ e $m = 1$.

1.4 Um resultado de Análise Matricial

O teorema que enunciamos e demonstramos a seguir encontra-se como um exercício em [4] (exerc. 15, p. 66; v. também o exerc. 14 da página 87). Nesta Dissertação ele será usado na demonstração do Lema 3.3.3, na forma da Observação 1.4.6.

Teorema 1.4.1 *Seja I um intervalo da reta. Dadas as funções $f_0 \in L^2(I)$, e $f_1, \dots, f_N \in L^2(I)$ linearmente independentes, definimos o funcional*

$$G(f_1, \dots, f_N) = \left| \int_I f_i(t) f_j(t) dt \right|,$$

onde $\left| \int_I f_i(t) f_j(t) dt \right|$ denota o determinante da matriz $N \times N$

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \left[\int_I f_i(t) f_j(t) dt \right], \quad 1 \leq i, j \leq N.$$

Definimos também a aplicação

$$Q(\mathbf{x}) = \int_I [f_0(t) - \sum_{1 \leq j \leq N} x_j f_j(t)]^2 dt,$$

onde $\mathbf{x} \equiv (x_1, \dots, x_N) \in \mathbf{R}^N$. Então

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N} Q = \frac{G(f_0, f_1, \dots, f_N)}{G(f_1, \dots, f_N)}, \quad (1.21)$$

onde $G(f_0, f_1, \dots, f_N) \stackrel{\text{def}}{=} \det \left[\int_I f_i(t) f_j(t) dt \right]_{0 \leq i, j \leq N}$.

Demonstração: Vamos considerar as seguintes notações :

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot) &\equiv (\cdot, \cdot)_{L^2(I)} \\ p_i &\stackrel{\text{def}}{=} (f_0, f_i) \quad \text{para } i = 1, \dots, N; \\ \mathbf{p} &\equiv (p_1, \dots, p_N); \\ p_0^2 &\stackrel{\text{def}}{=} (f_0, f_0); \end{aligned}$$

e

$$G(f_0, f_1, \dots, f_N) \equiv \begin{vmatrix} p_0^2 & \text{---} & \mathbf{p} & \text{---} \\ | & & & \\ \mathbf{p} & & \mathbf{A} & \\ | & & & \end{vmatrix},$$

onde $\text{---}\mathbf{p}\text{---}$ representa uma linha cujas entradas são as coordenadas de \mathbf{p} (explicação análoga para a notação correspondente na vertical).

Um fato interessante da matriz \mathbf{A} é que ela é simétrica e estritamente positiva definida. A simetria provém da simetria do produto interno (\cdot, \cdot) e a positividade pode ser facilmente vista com o seguinte argumento devido a Stieltjes ([4], Apêndice D, p.385):

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= \sum_{1 \leq i, j \leq N} a_{ij} x_i x_j = \sum_{1 \leq i, j \leq N} x_i x_j (f_i, f_j) \\ &= \int_a^b \sum_{1 \leq i, j \leq N} x_i x_j f_i(t) f_j(t) dt = \int_a^b \left(\sum_{1 \leq i \leq N} x_i f_i(t) \right)^2 dt \geq 0. \end{aligned}$$

Notemos que sendo f_1, \dots, f_n linearmente independentes, a desigualdade acima é uma igualdade somente no caso em que

$$\mathbf{x} \equiv (x_1, \dots, x_n) = 0,$$

logo a positividade de A é estrita. Agora, desenvolvendo o quadrado na definição de Q , temos

$$\begin{aligned} Q(x) &= \int_a^b f_0(t)^2 - 2 \sum_{1 \leq j \leq N} x_j f_0(t) f_j(t) + \sum_{1 \leq i, j \leq N} x_i x_j f_i(t) f_j(t) dt \\ &= p_0^2 - 2(\mathbf{p}, \mathbf{x}) + (A\mathbf{x}, \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Para motivar o raciocínio que se segue, abrimos aqui um parêntesis para vermos o que ocorre no caso particular $N = 1$. Neste caso, $Q(x)$ é uma equação do segundo grau em $x \equiv \mathbf{x}$, com coeficiente líder positivo, a saber, $a \stackrel{\text{def}}{=} |(f_1, f_1)|$, logo

$$\min_{x \in \mathbf{R}} Q(x) = -\frac{\Delta}{4a} = p_0^2 - \frac{p^2}{a}, \quad (1.23)$$

onde $p \stackrel{\text{def}}{=} p_1 = (f_0, f_1)$. Notemos (ainda no caso $N = 1$) que $\min Q \geq 0$, como pode ser inferido da desigualdade de Hölder. De fato, pela desigualdade de Hölder, temos que

$$p = \int_I f_0(t) f_1(t) dt \leq \left(\int_I f_0(t)^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_I f_1(t)^2 dt \right)^{1/2},$$

logo,

$$p^2 \leq p_0^2 a,$$

e vale a igualdade se e somente se $\{f_0, f_1\}$ é linearmente independente, ou seja, neste caso, $\min Q > 0$. Observamos que 1.23 é o resultado desejado no caso $N = 1$, i.e. se $N = 1$ então

$$\begin{aligned} \frac{G(f_0, f_1, \dots, f_N)}{G(f_1, \dots, f_N)} &= \frac{G(f_0, f_1)}{G(f_1)} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} (f_0, f_0) & (f_0, f_1) \\ (f_1, f_0) & (f_1, f_1) \end{vmatrix}}{(f_1, f_1)} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} p_0^2 & p \\ p & a \end{vmatrix}}{(f_1, f_1)} \\ &= \frac{p_0^2 a - p^2}{a} \\ &= p_0^2 - \frac{p^2}{a} \end{aligned}$$

No caso geral, escrevendo $\mathbf{x} = s\mathbf{v}$, $s \in \mathbf{R}$, $|\mathbf{v}| = 1$, obtemos

$$Q(\mathbf{v}) = p_0^2 - 2(\mathbf{p}, \mathbf{v})s + (A\mathbf{v}, \mathbf{v})s^2, \quad s \in \mathbf{R},$$

logo,

$$\min_{s \in \mathbf{R}} Q(\mathbf{v}) = p_0^2 - \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{v})^2}{(A\mathbf{v}, \mathbf{v})}. \quad (1.24)$$

Neste ponto, observamos que o mínimo de Q em todo o \mathbf{R}^N é de fato atingido, pois de 1.24 vemos que

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N} Q(\mathbf{x}) &= \min_{\mathbf{v} \in S^{N-1}} \min_{s \in \mathbf{R}} Q(\mathbf{v}) \\ &= p_0^2 - \min_{\mathbf{v} \in S^{N-1}} \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{v})^2}{(A\mathbf{v}, \mathbf{v})}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

onde S^{N-1} é a esfera $N - 1$ -dimensional do \mathbf{R}^N com centro na origem, i.e. $S^{N-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{v} \in \mathbf{R}^N; |\mathbf{v}| = 1\}$; o mínimo da função $\mathbf{v} \in S^{N-1} \rightarrow (\mathbf{p}, \mathbf{v})^2 / (A\mathbf{v}, \mathbf{v})$ existe, e é positivo porque a esfera S^{N-1} é um conjunto compacto e esta é uma função contínua e bem definida ($(A\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0, \forall \mathbf{v} \neq 0$). Apesar de não ser necessário nesta demonstração achamos interessante notar também que de 1.24 ou, equivalentemente, de 1.25, e da desigualdade de Hölder, segue-se que $\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N} Q(\mathbf{x}) \geq 0$. Com efeito, temos:

$$\begin{aligned} |(\mathbf{p}, \mathbf{v})| &= \left| \sum_{1 \leq i \leq N} v_i p_i \right| = \left| \int_I \left(\sum_{1 \leq i \leq N} v_i f_i(t) \right) f_0(t) dt \right| \\ &\text{onde } v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i, \text{ i.e. } \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N) \\ &\leq \left(\int_I \left(\sum_{1 \leq i \leq N} v_i f_i(t) \right)^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_I f_0(t)^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_I \sum_{1 \leq i, j \leq N} v_i v_j f_i(t) f_j(t) dt \right)^{1/2} \left(\int_I f_0(t)^2 dt \right)^{1/2} \\ &= (A\mathbf{v}, \mathbf{v})^{1/2} \left(\int_I f_0(t)^2 dt \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

logo,

$$(\mathbf{p}, \mathbf{v})^2 \leq (A\mathbf{v}, \mathbf{v}) p_0^2.$$

Mas, continuemos com a demonstração : Uma vez que sabemos que a função Q tem mínimo em \mathbf{R}^N , podemos obter a equação satisfeita por um ponto de mínimo \mathbf{x}^{\min} usando que ele é um ponto crítico via a fórmula 1.22:

$$\nabla Q(\mathbf{x}^{\min}) = -2\mathbf{p} + 2A\mathbf{x}^{\min} = 0$$

então

$$Ax^{\min} = \mathbf{p} \quad (1.26)$$

e usando a Regra de Cramer, temos que

$$x^{\min} = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad (1.27)$$

onde A_i é a matriz $N \times N$ obtida de A substituindo a i -ésima coluna pelo vetor \mathbf{p} .

Por outro lado,

$$\begin{vmatrix} p_0^2 & \cdots & \mathbf{p} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ \mathbf{p} & & A & \\ \vdots & & \vdots & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_0^2 & \cdots & \mathbf{p} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & & A & \\ \vdots & & \vdots & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \mathbf{p} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ \mathbf{p} & & A & \\ \vdots & & \vdots & \end{vmatrix}$$

$$= p_0^2 |A| + D_0,$$

onde

$$D_0 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \mathbf{p} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ \mathbf{p} & & A & \\ \vdots & & \vdots & \end{vmatrix}$$

Portanto se tomarmos $\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{G(f_0, f_1, \dots, f_N)}{G(f_1, \dots, f_N)}$, temos que

$$\gamma = p_0^2 + \frac{D_0}{|A|}. \quad (1.28)$$

Agora, vamos ver que

$$Q(x^{\min}) = \gamma$$

e isto encerrará a demonstração. De 1.22, 1.26 e 1.27 vem que

$$\begin{aligned} Q(x^{\min}) &= p_0^2 - 2(\mathbf{p}, x^{\min}) + (\mathbf{p}, x^{\min}) \\ &= p_0^2 - (\mathbf{p}, \frac{\hat{A}}{|A|}), \\ &\text{onde } \hat{A} \stackrel{\text{def}}{=} (|A_1|, \dots, |A_N|) \\ &= p_0^2 - \frac{1}{|A|}(\mathbf{p}, \hat{A}). \end{aligned}$$

Desenvolvendo D_0 pela i -ésima linha e usando que a matriz A é simétrica concluímos que

$$-(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{A}}) = D_0. \blacksquare$$

Observação 1.4.2 Na demonstração acima vimos que $\min_{\mathbf{R}^N} Q \geq 0$. Na verdade, vale a igualdade, i.e. $\min_{\mathbf{R}^N} Q = 0$, se e somente se f_0 for uma combinação linear de f_1, \dots, f_N , como pode ser inferido do ponto onde aplicamos a desigualdade de Hölder naquele argumento, pois, a desigualdade de Hölder é uma igualdade somente no caso em que temos funções linearmente dependentes. Uma outra maneira de verificar este fato é, uma vez obtida a fórmula 1.21, usar a simetria e positividade das matrizes $[(f_i, f_j)]$ juntamente com o fato de f_0 ser linearmente dependente de f_1, \dots, f_N se e somente se $G(f_0, f_1, \dots, f_N) = 0$.

Observação 1.4.3 As quantidade $p_i = \int_I f_i(t) f_0(t) dt$ são chamados de *momentos* e as matrizes $[(f_i, f_j)]$ de *matrizes de Hankel* ([4], Apêndice D, p. 385), ou *matrizes de Gramm* (cf. [12], p. 408).

Um caso particular interessante do Teorema 1.4.1 é o resultado seguinte, que controla o crescimento polinomial via a norma do L^2 . Ele será usado para demonstrar o Lema 3.3.3.

Corolário 1.4.4 *Sejam I um intervalo aberto limitado e k um inteiro não-negativo qualquer. Existe uma constante c independente de $q \in \mathcal{P}^k(I)$ e de I (dependente somente de k) tal que*

$$q(\alpha)^2 \leq c(\sup I - \alpha)^{-1} \int_I q(x)^2 dx, \quad (1.29)$$

para todo $\alpha \in I$, i.e.

$$q(\alpha)^2 \leq c(\sup I - \alpha)^{-1} \|p\|_{L^2(I)}^2,$$

para todo $\alpha \in I$.

Demonstração: Primeiramente, vamos tomar $q \in \mathcal{P}^k([0, 1])$ e mostrar que

$$q(0)^2 \leq c \int_0^1 p(x)^2 dx,$$

onde c é uma constante independente de q . Para $q(0) = 0$, isso é trivial. Agora para $q(0) \neq 0$, e supondo $q(0) = 1$, sem perda de generalidade, basta mostrar que

$$0 < c^{-1} \leq \int_0^1 (1 + c_1 x + \cdots + c_k x^k)^2 dx, \forall c_1, \dots, c_k \in \mathbf{R} \quad (1.30)$$

i.e.

$$\inf_{c_i \in \mathbf{R}, i=1, \dots, k} \int_0^1 (1 + c_1 x + \cdots + c_k x^k)^2 dx > 0,$$

Este resultado é um caso particular do Teorema 1.4.1, a saber, $f_0 = 1$, $N = k$, $f_i(x) = x^i$, $i = 1, \dots, k$ e $(a, b) = (0, 1)$.

Em seguida, dado $\alpha \in I$, fazendo a mudança de coordenadas $\lambda(t) = (\sup I - \alpha)t + \alpha$ do intervalo $(0, 1)$ para o intervalo $(\alpha, \sup I)$, de 1.30 vem que

$$(q \circ \lambda)(0)^2 \leq c \int_0^1 (q \circ \lambda)^2(t) dt$$

Daí, escrevendo $x = \lambda(t)$, pelo teorema de mudança de variáveis, obtemos

$$q(\alpha)^2 \leq c(\sup I - \alpha)^{-1} \int_{\alpha}^{\sup I} q(x)^2 dx \leq c(\sup I - \alpha)^{-1} \int_I q(x)^2 dx. \blacksquare \quad (1.31)$$

Observação 1.4.5 Uma variante do enunciado do lema acima é obtida substituindo-se $\sup I$ por $\inf I$. Neste caso, temos a estimativa

$$q(\alpha)^2 \leq c(\alpha - \inf I)^{-1} \|q\|_{L^2(I)}^2. \quad (1.32)$$

para todo $\alpha \in I$. Esta estimativa pode ser obtida de 1.31 de modo simples via a mudança de coordenadas $x = -t$ do intervalo $(-\alpha, -\inf I)$ no intervalo $(\inf I, \alpha)$.

Observação 1.4.6 Caso α seja uma extremidade do intervalo I , superior ou inferior, de 1.29 e 1.32 vemos imediatamente que

$$q(\alpha)^2 \leq c|I|^{-1} \|q\|_{L^2(I)}^2. \quad (1.33)$$

para todo $q \in \mathcal{P}^k(I)$, onde c é uma constante independente de q e de I (depende somente de k).

Capítulo 2

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA PROBLEMAS DE CONVECÇÃO–DIFUSÃO

Neste capítulo apresentaremos três métodos numéricos de elementos finitos para o problema–modelo abaixo de equação de convecção–difusão. Nosso objetivo principal é estabelecer e mostrar resultados de estabilidade. Salvo os detalhes das contas, ele foi retirado integralmente de [11], cap. 9, logo o leitor conhecedor desta referência poderá passar imediatamente para o Capítulo 3 sem prejuízo de compreensão .

2.1 Problema modelo de equação de convecção–difusão

$$\begin{cases} -\epsilon\Delta u + u_\beta + u = f & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \Gamma, \end{cases} \quad (2.1)$$

Aqui u é uma grandeza escalar representando a concentração de alguma substância, $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbf{R}^2$ é um campo velocidade constante de norma um, $u_\beta \stackrel{\text{def}}{=} \nabla u \cdot \beta$ (a derivada direcional de u na direção β), $\epsilon > 0$ é o coeficiente de difusão , Ω é um domínio poligonal–convexo do \mathbf{R}^2 , i.e. um subconjunto aberto do \mathbf{R}^2 , convexo, limitado e com fronteira Γ poligonal, e f e g são funções dadas.

No caso $\epsilon = 0$, o problema correspondente deve ser o seguinte:

$$\begin{cases} u_\beta + u = f & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \Gamma_- \end{cases} \quad (2.2)$$

onde

$$\Gamma_- \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \Gamma; \mathbf{n}(x) \cdot \beta(x) < 0\}$$

sendo $\mathbf{n} \equiv \mathbf{n}(x)$ o vetor normal unitário exterior a Γ em x . Aqui não podemos dar u em toda a fronteira Γ de Ω porque a equação de transporte $u_\beta + u = f$ nos diz que u tem um comportamento bem definido ao longo das *curvas características*

$$\dot{x}(s) = \beta, \quad s \in \mathbf{R}.$$

onde $\dot{x}(s) \equiv \frac{dx}{ds}$. Com efeito, se $u_\beta + u = f$ então

$$\frac{d}{ds}u(x(s)) = \nabla u(x(s)) \cdot \beta + u(x(s)) = f,$$

logo, resolvendo esta e.d.o. para $u(x(s))$, temos

$$u(x(s)) = u(x(0))e^{-s} + \int_0^s f e^{t-s} dt,$$

donde vemos que os valores de u em Γ_- determinam valores de u em

$$\Gamma_+ \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma \setminus \Gamma_- = \{x \in \Gamma; \mathbf{n}(x) \cdot \beta(x) \geq 0\}.$$

Usaremos as seguintes notações :

$$\begin{aligned} (v, w) &= \int_{\Omega} v w dx \\ \|v\| &= \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ \|v\|_s &= \|v\|_{H^s(\Omega)} \\ \langle v, w \rangle &= \int_{\Gamma} (vw)(\mathbf{n} \cdot \beta) ds \\ \langle v, w \rangle_- &= \int_{\Gamma_-} (vw)(\mathbf{n} \cdot \beta) ds \\ \langle v, w \rangle_+ &= \int_{\Gamma_+} (vw)(\mathbf{n} \cdot \beta) ds \\ |v| &= \left(\int_{\Gamma} v^2 |\mathbf{n} \cdot \beta| ds \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Observação 2.1.1 *Uma integração por partes nos dá*

$$(v_\beta, w) = \langle v, w \rangle - (v, w_\beta).$$

Tomando $w = v$ e usando que $(v, v_\beta) = (v_\beta, v)$ obtemos em particular que

$$(v_\beta, v) = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle.$$

Como no Capítulo 1, Seção 1.3, o espaço de elementos finitos é dado por

$$V_h = \{v \in H^1(\Omega); v|_K \in \mathcal{P}^l(K) \forall K \in T_h\},$$

o espaço das funções polinomiais por partes de grau no máximo l . Aqui T_h é uma triangulação de Ω como na Seção 1.3. Também usaremos o espaço

$$\overset{\circ}{V}_h = \{v \in V_h; v = 0 \text{ em } \Gamma\}$$

2.2 Método de Galerkin clássico com condição de fronteira fracamente imposta

O problema 2.1 com a condição de fronteira $g = 0$ tem a seguinte formulação variacional (definição de *solução fraca*): Encontre $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\epsilon(\nabla u, \nabla v) + (u_\beta + u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

E o método de Galerkin clássico correspondente é formulado da seguinte maneira: Encontre $u^h \in \overset{\circ}{V}_h$ tal que

$$\epsilon(\nabla u^h, \nabla v) + (u_\beta^h + u^h, v) = (f, v) \quad \forall v \in \overset{\circ}{V}_h.$$

Para o problema 2.2, vamos considerar uma variação do método de Galerkin clássico, a saber, o *Método de Galerkin clássico com condições de fronteira fracamente impostas*, que é formulado da seguinte maneira: Encontre $u^h \in V_h$ tal que

$$(u_\beta^h + u^h, v) - \langle u^h, v \rangle_- = (f, v) - \langle g, v \rangle_- \quad \forall v \in V_h. \quad (2.3)$$

Para simplificar a notação , introduzimos a forma bilinear

$$\mathcal{B}(w, v) \stackrel{\text{def}}{=} (w_\beta + w, v) - \langle w, v \rangle_-$$

e o funcional linear

$$l(v) \stackrel{\text{def}}{=} (f, v) - \langle g, v \rangle_-.$$

Em termos de \mathcal{B} e l , o método de Galerkin clássico com condições de fronteira fracamente impostas 2.3 fica escrito como

$$\mathcal{B}(u^h, v) = l(v) \quad \forall v \in V_h. \quad (2.4)$$

Além disso, a formulação variacional de 2.2 também pode ser expressa em termos de \mathcal{B} e l como

$$\mathcal{B}(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (2.5)$$

Subtraindo as equações 2.4 e 2.5 acima obtemos a equação do erro

$$\mathcal{B}(e, v) = 0 \quad \forall v \in V_h, \quad (2.6)$$

onde $e \stackrel{\text{def}}{=} u - u^h$ é o erro cometido em se aproximar a solução exata u pela solução aproximada u^h .

A estabilidade do método de Galerkin com condições de fronteira fracamente impostas é uma consequência da seguinte propriedade da forma bilinear \mathcal{B} :

Lema 2.2.1 Para qualquer $v \in H^1(\Omega)$ temos:

$$\mathcal{B}(v, v) = \|v\|^2 + \frac{1}{2}|v|^2,$$

onde $|v| \stackrel{\text{def}}{=} (\int_\Gamma v^2 |\mathbf{n} \cdot \beta| ds)^{1/2}$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(v, v) &= (v_\beta + v, v) - \langle v, v \rangle_- \\ &= (v_\beta, v) + \|v\|^2 - \langle v, v \rangle_- \\ &= \frac{1}{2}\langle v, v \rangle_+ + \|v\|^2 - \langle v, v \rangle_- \\ &= \frac{1}{2}\langle v, v \rangle_+ + \|v\|^2 - \frac{1}{2}\langle v, v \rangle_-. \end{aligned}$$

Agora, como $\mathbf{n} \cdot \beta \leq 0$ em Γ_- , temos que $-\langle v, v \rangle_- = \int_{\Gamma_-} v^2 |\mathbf{n} \cdot \beta| ds$, portanto

$$\mathcal{B}(v, v) = \|v\|^2 + \frac{1}{2}|v|^2. \blacksquare$$

Agora vamos mostrar um resultado de estimativa do erro.

Teorema 2.2.2 *Existe uma constante C , independente de h e u , tal que*

$$\|u - u^h\| + \frac{1}{2}|u - u^h| \leq Ch^l \|u\|_{l+1}$$

Demonstração: Seja $\bar{u}_h \in V_h$ o interpolante de u satisfazendo 1.20 e também a seguinte estimativa, cujo enunciado está em [11], p. 176:

$$|u - \bar{u}^h| \leq Ch^{l+1/2} \|u\|_{s+1}. \quad (2.7)$$

Escrevemos $\eta^h = u - \bar{u}^h$ e $e^h = u^h - \bar{u}^h$. Então $e^h = \eta^h - e$ onde $e = u - u^h$. Pelo Lema 2.2.1 e 2.7,

$$\begin{aligned} \|e^h\|^2 + \frac{1}{2}|e^h|^2 &= \mathcal{B}(e^h, e^h) = \mathcal{B}(\eta^h - e, e^h) \\ &= \mathcal{B}(\eta^h, e^h) - \mathcal{B}(e, e^h) = \mathcal{B}(\eta^h, e^h), \end{aligned}$$

pois, pela equação do erro, $\mathcal{B}(e, v) = 0 \forall v \in V_h$, em particular para $v = e^h$. Logo

$$\begin{aligned} \|e^h\|^2 + \frac{1}{2}|e^h|^2 &= \mathcal{B}(\eta^h, e^h) \stackrel{\text{def}}{=} (\eta_\beta^h + \eta^h, e^h) - \langle \eta^h, e^h \rangle_- \\ &= (\eta_\beta^h, e^h) + (\eta^h, e^h) - \langle \eta^h, e^h \rangle_- \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy, $ab \leq a^2 + \frac{1}{4}b^2$, temos que

$$\begin{aligned} \|e^h\|^2 + \frac{1}{2}|e^h|^2 &\leq \|\eta_\beta^h\|^2 + \frac{1}{4}\|e^h\|^2 + \|\eta^h\|^2 + \frac{1}{4}\|e^h\|^2 + |\eta^h|^2 + \frac{1}{4}|e^h|^2 \\ &= \|\eta_\beta^h\|^2 + \frac{1}{2}\|e^h\|^2 + \|\eta^h\|^2 + |\eta^h|^2 + \frac{1}{4}|e^h|^2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Agora vamos estimar os termos com η^h , usando as estimativas 1.20 e 2.7:

$$\begin{aligned} \|\eta_\beta^h\|^2 + \|\eta^h\|^2 + |\eta^h|^2 &= \|(u - \bar{u}^h)_\beta\|^2 + \|u - \bar{u}^h\|^2 + |u - \bar{u}^h|^2 \\ &\leq \|(u - \bar{u}^h)_\beta\|^2 + C^2 h^{2(l+1)} \|u\|_{l+1}^2 + C^2 h^{2l+1} \|u\|_{l+1}^2. \end{aligned}$$

Vamos agora estimar o termo $\|(u - \bar{u}^h)_\beta\|^2$. Temos que

$$\begin{aligned} \|(u - \bar{u}^h)_\beta\|^2 &= \int_{\Omega} (\nabla(u - \bar{u}^h) \cdot \beta)^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} |\beta|^2 |\nabla(u - \bar{u}^h)|^2 dx \\ &= \|\nabla(u - \bar{u}^h)\|^2 \\ &\leq \|u - \bar{u}^h\|_1^2 \\ &\leq Ch^{2l} \|u\|_{l+1}^2, \end{aligned}$$

onde para a última desigualdade usamos novamente a desigualdade 1.20. Logo

$$\begin{aligned} \|\eta_\beta^h\|^2 + \|\eta^h\|^2 + |\eta^h|^2 &\leq C^2 h^{2l} (1 + h^2 + h) \|u\|_{l+1}^2 \\ &\leq Ch^{2l} \|u\|_{l+1}^2, \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde o último C acima denota alguma constante suficientemente grande e estamos supondo que h seja limitado. De 2.8 e 2.9 temos que

$$\|e^h\|^2 + \frac{1}{2} |e^h|^2 \leq Ch^{2l} \|u\|_{l+1}^2 + \frac{1}{2} \|e^h\|^2 + \frac{1}{4} |e^h|^2.$$

Passando os termos com e^h para o lado esquerdo temos:

$$\frac{1}{2} \|e^h\|^2 + \frac{1}{4} |e^h|^2 \leq Ch^{2l} \|u\|_{l+1}^2.$$

Portanto

$$\|e^h\| + \frac{1}{2} |e^h| \leq Ch^l \|u\|_{l+1}. \quad (2.10)$$

Como $e = e^h - \eta^h$, usando a desigualdade triangular temos que

$$\|e\| = \|e^h - \eta^h\| \leq \|e^h\| + \|\eta^h\| \text{ e } |e| = |e^h - \eta^h| \leq |e^h| + |\eta^h|,$$

logo

$$\begin{aligned} \|e\| + |e| &\leq \|e^h\| + |e^h| + \|\eta^h\| + |\eta^h| \\ &\leq Ch^l \|u\|_{l+1}, \end{aligned}$$

onde para a última desigualdade usamos 2.9 e 2.10. ■

A estimativa acima mostra que se a solução exata u for suficientemente suave, de forma a pertencer ao espaço de Sobolev $H^{l+1}(\Omega)$, então o método de Galerkin clássico convergirá na ordem de $O(h^l)$. Mas em geral a solução exata não é suave e então o método não se aplicará satisfatoriamente, por exemplo, se u for descontínua então $\|u\|_{H^1(\Omega)} = \infty$. Além disso, no caso de $0 < \epsilon \leq h$, sabe-se que o método de Galerkin clássico produzirá soluções oscilatórias. Para contornar esse tipo de problema foi desenvolvido um outro método, o método de difusão (*streamline diffusion*).

2.3 Método de difusão

O Método de difusão (*streamline diffusion*) consiste em substituir as funções testes no método de Galerkin clássico com condições de fronteira fracamente impostas por $v + hv_\beta$. Por conveniência, também multiplica-se os termos de fronteira por $(1 + h)$. Assim, obtemos a seguinte equação :

$$\begin{aligned} & (u_\beta^h + u^h, v + hv_\beta) - (1 + h) \langle u_h, v \rangle_- \\ & = (f, v + hv_\beta) - (1 + h) \langle g, v \rangle_- \quad \forall v \in V_h. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Procedendo de forma análoga à seção anterior, introduzimos as aplicações :

$$\mathcal{B}(w, v) \stackrel{\text{def}}{=} (w_\beta + w, v + hv_\beta) - (1 + h) \langle w, v \rangle_-$$

e

$$l(v) \stackrel{\text{def}}{=} (f, v + hv_\beta) - (1 + h) \langle g, v \rangle_- .$$

Então 2.11 passa a se escrever como

$$\mathcal{B}(u_h, v) = l(v), \quad \forall v \in V_h$$

e obtemos a equação do erro $e = u - u^h$:

$$\mathcal{B}(e, v) = 0, \quad \forall v \in V_h,$$

onde u é a solução exata de 2.2.

Provaremos uma estimativa do erro na seguinte norma:

$$\|v\|_\beta \stackrel{\text{def}}{=} (h\|v_\beta\|^2 + \|v\|^2 + \frac{(1+h)}{2}|v|^2)^{1/2}.$$

Esta escolha de norma relaciona-se com a seguinte propriedade de estabilidade da forma bilinear $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$:

Lema 2.3.1 *Para qualquer $v \in H^1(\Omega)$, temos*

$$\mathcal{B}(v, v) = \|v\|_\beta^2.$$

Demonstração: Mostramos anteriormente que

$$(v_\beta, v) = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle,$$

(Observação 2.1.1) então

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(v, v) &\stackrel{\text{def}}{=} (v_\beta + v, v + hv_\beta) - (1 + h) \langle v, v \rangle_- \\ &= (v_\beta, v) + h(v_\beta, v_\beta) + (v, v) + h(v, v_\beta) - (1 + h) \langle v, v \rangle_- \\ &= h\|v_\beta\|^2 + \|v\|^2 + \frac{1+h}{2} \langle v, v \rangle - (1 + h) \langle v, v \rangle_- \\ &= \frac{1+h}{2} \langle v, v \rangle_+ + \frac{1+h}{2} \langle v, v \rangle_- + h\|v_\beta\|^2 + \|v\|^2 \\ &\quad - (1 + h) \langle v, v \rangle_- \\ &= h\|v_\beta\|^2 + \|v\|^2 + \frac{1+h}{2}|v|^2 \\ &= \|v\|_\beta^2. \blacksquare \end{aligned}$$

Podemos agora provar uma estimativa de erro para o método de difusão.

Teorema 2.3.2 *Existe uma constante C tal que*

$$\|u - u_h\|_\beta \leq Ch^{l+1/2} \|u\|_{l+1}.$$

Demonstração: Seja $\bar{u}_h \in V_h$ um interpolante de u satisfazendo às condições 1.20. Escrevendo $\eta^h = u - \bar{u}^h$, $e^h = u^h - \bar{u}^h$ e $e = u - u^h$ e usando o Lema 2.3.1 com $v = e$, temos :

$$\begin{aligned} \|e\|_\beta^2 &= \mathcal{B}(e, e) = \mathcal{B}(e, \eta^h - e^h) = \mathcal{B}(e, \eta^h) - \mathcal{B}(e, e^h) \\ &= \mathcal{B}(e, \eta^h), \end{aligned}$$

onde usamos que $\mathcal{B}(e, v) = 0$, para todo $v \in V_h$ e, em particular, para $v = e_h$. Assim,

$$\begin{aligned} \|e\|_\beta^2 &= \mathcal{B}(e, \eta^h) = (e_\beta + e, \eta^h + h\eta_\beta^h) - (1 + h) \langle e, \eta^h \rangle_- \\ &= (e_\beta, \eta^h) + h(e_\beta, \eta_\beta^h) + (e, \eta^h) + h(e, \eta_\beta^h) - (1 + h) \langle e, \eta^h \rangle_- . \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy com ϵ , $ab \leq \frac{\epsilon}{2}a^2 + \frac{\epsilon^{-1}}{2}b^2$, temos que

$$\begin{aligned} \|e\|_\beta^2 &\leq \frac{h}{4}\|e_\beta\|^2 + h^{-1}\|\eta^h\|^2 + \frac{h}{4}\|e_\beta\|^2 + h\|\eta_\beta^h\|^2 + \frac{h}{4}\|e\|^2 + h^{-1}\|\eta^h\|^2 \\ &\quad + \frac{h}{4}\|e\|^2 + h\|\eta_\beta^h\|^2 + \frac{h}{4}\|e\|^2 + h^{-1}\|\eta^h\|^2 + \frac{h}{4}\|e\|^2 + h\|\eta^h\|^2, \end{aligned}$$

onde ϵ foi tomado de forma conveniente. Em primeiro lugar, estimamos os termos com η^h :

$$\begin{aligned}
& h^{-1} \|\eta^h\|^2 + h \|\eta_\beta^h\|^2 + h^{-1} \|\eta^h\|^2 + h \|\eta_\beta^h\|^2 \\
& + h^{-1} \|\eta^h\|^2 + h \|\eta^h\|^2 \leq h^{-1} C^2 h^{2(i+1)} \|u\|_{i+1}^2 + h C^2 h^{2i} \|u\|_{i+1}^2 \\
& + h^{-1} C^2 h^{2(i+1)} \|u\|_{i+1}^2 + h C^2 h^{2i} \|u\|_{i+1}^2 + h^{-1} C^2 h^{2(i+1)} + h C^2 h^{2(i+1)} \\
& = C^2 h^{2i+1} \|u\|_{i+1}^2 + C^2 h^{2i+1} \|u\|_{i+1}^2 + C^2 h^{2i+1} \|u\|_{i+1}^2 \\
& + C^2 h^{2i+1} \|u\|_{i+1}^2 + C^2 h^{2i+1} + C^2 h^{2i+3} \\
& \leq C^2 h^{2i+1} \|u\|_{i+1}^2,
\end{aligned}$$

pois $C^2 h^{2i+3} \leq C^2 h^{2i+1} \|u\|_{i+1}^2$. Em segundo lugar, estimamos os termos com e :

$$\begin{aligned}
& \frac{h}{4} \|e_\beta\|^2 + \frac{h}{4} \|e_\beta\|^2 + \frac{h}{4} \|e\|^2 + \frac{h}{4} \|e\|^2 + \frac{h}{4} |e| + \frac{h}{4} |e|^2 \\
& = \frac{h}{2} \|e_\beta\|^2 + \frac{1}{2} \|e\|^2 + \frac{h}{2} |e|^2 \\
& \leq \frac{h}{2} \|e_\beta\|^2 + \frac{1}{2} \|e\|^2 + \frac{1+h}{4} |e|^2 \\
& = \frac{1}{2} \|e\|_\beta^2
\end{aligned}$$

Com estas estimativas, concluímos que

$$\|e\|_\beta^2 \leq C^2 h^{2i+1} \|u\|_{i+1}^2 + \frac{1}{2} \|e\|_\beta^2,$$

logo,

$$\|e\|_\beta^2 \leq 2C^2 h^{2i+1} \|u\|_{i+1}^2,$$

i.e.

$$\|e\|_\beta \leq C h^{i+1/2} \|u\|_{i+1}. \blacksquare$$

O método de difusão pode ser aplicado ao problema 2.1 com $g = 0$ e $\epsilon > 0$. Neste caso, o método é modificado usando funções testes dadas por $v + \delta v_\beta$ onde $v \in H_0^1(\Omega)$, $\delta = 0$ se $\epsilon \geq h$ e $\delta = \overline{C}h$ se $\epsilon < h$, onde \overline{C} é uma constante suficientemente pequena (v. a demonstração da Observação 9.4 em [11], p.186). A formulação variacional correspondente é a seguinte: Encontrar u^h em \mathring{V}_h tal que

$$\epsilon(\nabla u^h, \nabla v) - \epsilon \delta (\Delta u^h, v_\beta) + (u_\beta^h + u^h, v + \delta v_\beta) = (f, v + \delta v_\beta) \quad (2.12)$$

para todo $v \in \mathring{V}_h$. Mas, $(\Delta u^h, v_\beta)$ não está bem definido para $u^h, v \in \mathring{V}_h$, pois uma função em \mathring{V}_h pode ter derivada(s) de primeira ordem descontínua(s),

dando um Laplaciano na forma de uma delta de Dirac. A definição correta é a seguinte:

$$(\Delta u^h, v_\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \Delta u^h v_\beta dx.$$

Notemos que a integral de $\Delta u^h v_\beta$ sobre cada triângulo K está bem-definida, já que u^h e v_β são funções limitadas e suaves no interior de cada triângulo K .

Observação 2.3.3 *Usando-se o Lema 1.1.1 pode-se demonstrar que a forma bilinear \mathcal{B}_ϵ associada ao método 2.12 satisfaz a seguinte propriedade de estabilidade ([11], p. 186):*

$$\mathcal{B}_\epsilon(v, v) \geq \frac{1}{2}(\epsilon \|\nabla v\|^2 + \delta \|v_\beta\|^2 + \|v\|^2) \quad \forall v \in \mathring{V}_h.$$

Observação 2.3.4 O método de difusão para $\epsilon \geq 0$ e $\epsilon = 0$ é basicamente obtido através do método de Galerkin clássico substituindo as funções testes $v \in V_h$ por funções testes da forma $v + hv_\beta$ onde $v \in V_h$. Isto implica que as funções testes pertencem a um espaço diferente das funções aproximadas. Versões do método de Galerkin com esta propriedade são genericamente chamados de Petrov-Galerkin.

Na próxima seção vamos apresentar o *método de Galerkin descontínuo*, o qual tem estabilidade teórica e propriedades de convergência similares ao método de difusão, mas que na prática se realiza um pouco melhor que o método de difusão (v. [11])

2.4 Método de Galerkin descontínuo

O método de Galerkin descontínuo pode ser visto como uma generalização do método clássico com condições de fronteira fracamente impostas em cada triângulo $K \in \mathcal{T}_h$. O Método de Galerkin descontínuo é baseado no seguinte espaço de elementos finitos:

$$V_h = \{v \in L^2(\Omega); v|_K \in \mathcal{P}^l(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

Notemos que agora, entre os pontos da fronteira de cada $K \in \mathcal{T}_h$ não estamos requerendo continuidade. Assim o método fica formulado da seguinte

maneira: Para cada $K \in T_h$, dado u_-^h em ∂K_- encontre $u^h \equiv u^h|_K \in \mathcal{P}^l(K)$ tal que

$$(u_\beta^h + u^h, v)_K - \int_{\partial K_-} u_+^h v_+ \mathbf{n} \cdot \beta ds = (f, v)_K - \int_{\partial K_-} u_-^h v_+ \mathbf{n} \beta ds \quad \forall v \in \mathcal{P}^r(K), \quad (2.13)$$

onde

$$\partial K_- = \{x \in \partial K; \mathbf{n} \cdot \beta < 0\}$$

e

$$\partial K_+ = \{x \in \partial K; \mathbf{n} \cdot \beta \geq 0\},$$

com \mathbf{n} sendo a normal unitária exterior a ∂K em x . Definimos os limites laterais da seguinte forma:

$$v_-(x) = \lim_{s \rightarrow 0^-} v(x + s\beta) \\ v_+(x) = \lim_{s \rightarrow 0^+} v(x + s\beta)$$

para x pertencente a um lado comum entre dois triângulos K, K' . Definimos também o salto de v por:

$$[v] = v_+ - v_-.$$

Para determinar $u_-^h \equiv u^h|_{\mathbf{P}_{K_-}}$ em cada $K \in T_h$, primeiramente determinamos u^h nos triângulos K com $\partial K_- \subset \Gamma_-$ pois $u_-^h = g$ é dado em ∂K_- . Isto então definirá u^h nos triângulos K vizinhos a Γ_- , e podemos continuar o processo até que u^h tenha sido determinado em todo domínio.

Para simplificar a notação escrevemos

$$\mathcal{B}_K(u^h, v) = (f, v)_K \quad \forall v \in \mathcal{P}^l(K),$$

onde

$$\mathcal{B}_K(w, v) \stackrel{\text{def}}{=} (w_\beta + w, v)_K - \int_{\partial K_-} [w] v_+ \mathbf{n} \beta ds$$

e

$$(f, v)_K \stackrel{\text{def}}{=} \int_K f v dx.$$

Sejam

$$\mathcal{B}(w, v) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{K \in T_h} \mathcal{B}_K(w, v)$$

e

$$(f, v) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (f, v)_K.$$

Assim podemos formular o método de Galerkin descontínuo 2.13 do seguinte modo: Encontrar $u^h \in V_h$ tal que

$$\mathcal{B}(u^h, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_h, \text{ com } u_-^h = g \text{ em } \Gamma_-.$$

Como a solução exata u satisfaz

$$\mathcal{B}(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_h,$$

e $[u] = 0$ pois u não tem saltos, temos a equação do erro $e = u - u^h$ dada por:

$$\mathcal{B}(e, v) = 0 \quad \forall v \in V_h.$$

Vamos provar um resultado de estabilidade para o método de Galerkin descontínuo usando a seguinte norma:

$$|v|_\beta^2 = \|v\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K_-} [v]^2 |\mathbf{n} \cdot \beta| ds + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_+} v_-^2 \mathbf{n} \cdot \beta ds$$

Lema 2.4.1 *Para qualquer função suave por partes v , i.e., $v \in C^1$ por partes, temos:*

$$\mathcal{B}(v, v) = |v|_\beta^2 - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_-} v_-^2 \mathbf{n} \cdot \beta ds.$$

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(v, v) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \{(v_\beta + v, v)_K - \int_{\partial K_-} [v] v_+ \mathbf{n} \cdot \beta ds\} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \{(v_\beta, v)_K + (v, v)_K - \int_{\partial K_-} [v] v_+ \mathbf{n} \cdot \beta ds\}. \end{aligned}$$

Usando a observação 2.1.1 segue-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(v, v) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \frac{1}{2} (v, v)_K + (v, v)_K - \int_{\partial K_-} [v] v_+ \mathbf{n} \cdot \beta ds \right\} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\partial K_+} v_-^2 \mathbf{n} \cdot \beta ds - \frac{1}{2} \int_{\partial K_-} v_+^2 \mathbf{n} \cdot \beta ds \right. \\ &\quad \left. - \int_{\partial K_-} (v_+ - v_-) v_+ \mathbf{n} \cdot \beta ds + \|v\|_{L^2(K)}^2 \right\}. \end{aligned}$$

logo,

$$2B(v, v) = 2\|v\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K_+} v_-^2 \mathbf{n} \cdot \beta ds \\ - \int_{\partial K_-} v_+^2 |\mathbf{n} \cdot \beta| ds + 2 \int_{\partial K_-} [v] v_+ |\mathbf{n} \cdot \beta| ds.$$

Como todo lado de ∂K_+ coincide com um lado de $\partial K'_-$, para um triângulo adjacente K' , exceto se $\partial K_+ \subset \Gamma_+$, e similarmente, todo lado de ∂K_- coincide com um lado de $\partial K'_+$, exceto se $\partial K_- \subset \Gamma_-$, temos

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{K_+} v_-^2 \mathbf{n} \cdot \beta ds = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{K_-} v_-^2 |\mathbf{n} \cdot \beta| ds \\ + \int_{\Gamma_+} v_-^2 \mathbf{n} \cdot \beta ds - \int_{\Gamma_-} v_-^2 |\mathbf{n} \cdot \beta| ds$$

e conseqüentemente,

$$2B(v, v) = 2\|v\|^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{K_-} v_-^2 |\mathbf{n} \cdot \beta| ds + \int_{\Gamma_+} v_-^2 \mathbf{n} \cdot \beta ds \\ - \int_{\Gamma_-} v_-^2 |\mathbf{n} \cdot \beta| ds - \int_{K_-} v_+^2 |\mathbf{n} \cdot \beta| ds + 2 \int_{K_-} [v] v_+ |\mathbf{n} \cdot \beta| ds \\ = 2\|v\|^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{K_-} (v_+^2 - 2v_+ v_- + v_-^2) |\mathbf{n} \cdot \beta| ds \\ + \int_{\Gamma_+} v_-^2 \mathbf{n} \cdot \beta ds - \int_{\Gamma_-} v_-^2 |\mathbf{n} \cdot \beta| ds,$$

logo,

$$B(v, v) = \|v\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{K_-} [v]^2 |\mathbf{n} \cdot \beta| ds \\ + \frac{1}{2} \int_{K_+} v_-^2 \eta \cdot \beta ds - \frac{1}{2} \int_{K_-} v_-^2 |\mathbf{n} \cdot \beta| ds \\ = |v|_\beta^2 - \frac{1}{2} \int_{K_-} v_-^2 |\mathbf{n} \cdot \beta| ds. \blacksquare$$

A seguir, vamos provar um resultado para a estimativa do erro para o método no caso $l = 0$.

Teorema 2.4.2 *Seja $l = 0$. Existe uma constante C (dependente apenas de u e l) tal que*

$$|u - u^h|_\beta \leq Ch^{1/2} \|u\|_1.$$

Demonstração: Seja $\bar{u}^h \in V_h$ o interpolante de u definido por $\bar{u}^h|_K \stackrel{\text{def}}{=} \text{valor médio de } u \text{ sobre } K \text{ para } K \in T_h$, i.e. $\bar{u}^h|_K \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|K|} \int_K u(x) dx$. Vamos escrever, como antes, $\eta^h = u - \bar{u}^h$. Aplicando o Lema 2.4.1 com $v = e$ e notando que $e_- = 0$ em Γ_- , temos que

$$\begin{aligned} |e|_\beta^2 &= \mathcal{B}(e, e) = \mathcal{B}(e, u - \bar{u}^h) = \mathcal{B}(e, u - \bar{u}^h) + \mathcal{B}(e, \bar{u}^h - u^h) \\ &= \mathcal{B}(e, \eta^h), \end{aligned}$$

pois $\mathcal{B}(e, v) = 0 \quad \forall v \in V_h$, em particular, para $v = \bar{u}^h - u^h \in V_h$. Então

$$\begin{aligned} |e|_\beta^2 &= \mathcal{B}(e, \eta^h) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{K \in T_h} \mathcal{B}_K(e, \eta^h) \\ &= \sum_{K \in T_h} (e_\beta + e, \eta^h)_K - \int_{\partial K_-} [e] \eta_+^h \mathbf{n} \cdot \beta ds \\ &= \sum_{K \in T_h} \{ (e_\beta, \eta^h)_K - \int_{\partial K_-} [e] \eta_+^h \mathbf{n} \cdot \beta ds \} + (e, \eta^h). \end{aligned}$$

Agora, $e_\beta = (u - u^h)_\beta = u_\beta$ em cada K , pois u^h é constante por partes ($l = 0$). Então $(e_\beta, \eta^h)_K = (u_\beta, \eta^h)_K$, mas $(u_\beta, \eta^h)_K = \int_K u_\beta \eta^h dx$ e $u_\beta \eta^h \in L^1(\Omega)$. Portanto, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} |e|_\beta^2 &= \sum_{K \in T_h} (e_\beta, \eta^h)_K - \int_{\partial K_-} [e] \eta_+^h \mathbf{n} \cdot \beta ds + (e, \eta^h) \\ &\leq \|u_\beta\| \|\eta^h\| + \|e\| \|\eta^h\| \\ &\quad + \left(\sum_{K \in T_h} \int_{\partial K_-} [e]^2 |\mathbf{n} \cdot \beta| ds \right)^{1/2} \left(\sum_{K \in T_h} \int_{\partial K_-} (\eta_+^h)^2 |\mathbf{n} \cdot \beta| ds \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Agora, se $u \in C^1(\Omega)$ então $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, 2$, é limitada em $\bar{\Omega}$, então

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} |\eta^h(x)| \leq Ch.$$

De fato, seja $x \in \Omega$. Então $x \in K$ para algum $K \in T_h$, logo

$$\begin{aligned} |\eta^h(x)| &= |u(x) - \bar{u}^h(x)| = \left| u(x) - \frac{1}{|K|} \int_K u(y) dy \right| \\ &= \left| \frac{1}{|K|} \int_K [u(x) - u(y)] dy \right| \leq \frac{1}{|K|} \int_K |u(x) - u(y)| dy \\ &\leq \frac{1}{|K|} \|\nabla u\|_\infty \int_K |x - y| dy \leq \|u\|_\infty h_K \\ &\quad \text{(pelo Teorema do Valor Médio)} \\ &\leq Ch, \end{aligned}$$

(2.14)

onde $h \stackrel{\text{def}}{=} \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$. Como $\eta_+^h = \lim_{s \rightarrow 0^+} \eta^h(x + s\beta)$, temos

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K_-} |\eta_+^h|^2 |\mathbf{n} \cdot \beta| ds \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} Ch^2 h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} Ch^3 \leq Ch,$$

pois o comprimento de \mathbf{PK}_- é $O(h)$, i.e. $|\mathbf{PK}_-| \leq |\partial K| \leq 3h_K \leq 3h$.

Então

$$|e|_\beta^2 \leq \|u_\beta\| \|\eta^h\| + \|e\| \|\eta^h\| + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K_-} [e]^2 |\mathbf{n} \cdot \beta| ds \right)^{1/2} Ch^{1/2}.$$

Daí, usando a desigualdade de Cauchy com ϵ e que $\|\eta^h\| \leq Ch$, concluiremos que

$$|e|_\beta^2 \leq Ch^{1/2} \|u\|_1.$$

De fato,

$$\begin{aligned} |e|_\beta^2 &= \|e\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K_-} [e]^2 |\eta \cdot \beta| ds + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_+} e^2 \mathbf{n} \cdot \beta ds \\ &\equiv X^2 + \frac{1}{2} Y^2 + \frac{1}{2} Z^2; \end{aligned} \quad (2.15)$$

por outro lado,

$$\begin{aligned} |e|_\beta^2 &\leq Ch \|u_\beta\| + Ch \|e\| + Ch^{1/2} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K_-} [e]^2 |\eta \cdot \beta| ds \right)^{1/2} \\ &\leq Ch \|u_\beta\| + ChX + Ch^{1/2} Y \\ &\leq Ch \|u_\beta\| + \frac{a}{2} C^2 h^2 + \frac{a^{-1}}{2} X^2 + \frac{b}{2} C^2 h + \frac{b^{-1}}{2} Y^2, \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde a e b serão convenientemente escolhidos abaixo. De 2.15 e 2.16 temos que

$$X^2 + \frac{1}{2} Y^2 + \frac{1}{2} Z^2 \leq Ch \|u_\beta\| + \frac{a}{2} C^2 h^2 + \frac{a^{-1}}{2} X^2 + \frac{b}{2} C^2 h + \frac{b^{-1}}{2} Y^2.$$

Então

$$\left(1 - \frac{a^{-1}}{2} X^2 + \frac{1}{2} (1 - b^{-1}) Y^2 + \frac{1}{2} Z^2\right) \leq Ch \|u_\beta\| + \frac{a}{2} C^2 h^2 + \frac{b}{2} C^2 h;$$

escolhendo agora $a = 1$ e $b = 1/2$, segue-se que

$$\frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{4} Y^2 + \frac{1}{2} Z^2 \leq Ch \|u_\beta\| + \frac{1}{2} C^2 h^2 + \frac{1}{4} C^2 h,$$

logo,

$$X^2 + \frac{1}{2}Y^2 + Z^2 \leq X^2 + \frac{1}{2}Y^2 + \frac{1}{2}Z^2 \leq Ch\|u_\beta\| + o(h^2).$$

Então

$$\begin{aligned} |e|_\beta^2 &\leq Ch\|u_\beta\| + o(h^2) \\ &\leq Ch|\beta|\|u\|_1 + o(h^2). \end{aligned}$$

Portanto,

$$|e|_\beta \leq Ch^{1/2}\|u\|_1 + o(h). \blacksquare$$

O método de Galerkin descontínuo tem estabilidade teórica e propriedades de convergência similares ao método de difusão (v. [11] para maiores detalhes).

Para encerrar este Capítulo, observamos que o método de Galerkin descontínuo pode ser aplicado ao seguinte problema:

$$\begin{cases} u_t + u_x = f & \text{em } \Omega = J \times I \equiv (0, 1) \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{para } x \in J, \\ u(0, t) = g(t) & \text{para } t \in I. \end{cases} \quad (2.17)$$

De fato, este problema é um caso particular, $\beta = (1, 1)$, de 2.2. Logo, o método de Galerkin descontínuo pode ser aplicado usando uma triangulação de $\Omega = J \times I$, i.e., uma triangulação em espaço-tempo (v. [11]). Entretanto, esquemas convencionais para resolver o problema 2.17 são baseados em usar discretizações separadas no espaço e no tempo. Em primeiro lugar, um problema semi-discreto para um sistema linear de E.D.O'S é obtido discretizando-se a variável espacial usando elementos finitos ou diferenças finitas, e então um método diferente é usado para discretizar a variável tempo. No próximo Capítulo apresentamos o *Método de Galerkin Localmente Descontínuo*, o qual segue este procedimento.

Capítulo 3

MÉTODO DE GALERKIN LOCALMENTE DESCONTÍNUO

Neste capítulo apresentamos o *Método de Galerkin Localmente Descontínuo* (GLD), introduzido recentemente por [6], para a equação de convecção – difusão unidimensional

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(f(u) - a(u)\partial_x u) = 0 & \text{em } (0, T) \times (0, 1), \\ u(t = 0) = u_o & \text{em } (0, 1) \quad (\text{condição inicial}) \\ u(x = 0) = u(x = 1) & \text{em } (0, T) \quad \text{condição de fronteira periódica} \end{cases}, \quad (3.1)$$

onde f e a são funções reais dadas, sendo f Lipschitziana e $a \geq 0$. Mostraremos a estabilidade do GLD sob hipótese bastantes gerais e uma estimativa do erro no caso linear, i.e. f linear não nula e a uma constante positiva. Estes resultados são, respectivamente, o conteúdo dos Teoremas 3.2.1 e 3.3.1 abaixo, cujas demonstrações são expostas aqui com detalhes. O método também funciona bem no caso linear multidimensional, para o qual referimos [6]. No caso não-linear, não é claro para nós que o método seja estável, pois a demonstração do caso linear precisa ser modificada se $f' = 0$, cf. a Observação 4 da Seção 3.1 e a Observação 3.3.5.

O GLD é inspirado no *Método de Runge-Kutta-Galerkin Descontínuo* (RKGD) para sistemas de Leis de Conservação [7, 8]. Introduzindo uma nova variável dependente $q(u)$, a equação de convecção–difusão em 3.1 é levada

num sistema hiperbólico de primeira ordem para o qual aplica-se o RKGD e obtém-se a formulação do GLD. Observamos que o GLD difere do *Método de Galerkin Descontínuo* (GD) para equações parabólicas introduzido por [10]. Neste, as soluções aproximadas são contínuas no espaço, pois o espaço de elementos finitos estão contidos em espaços de Sobolev de índice positivo. No GLD os espaços de elementos finitos, na variável espacial, são subconjuntos de L^1 , sendo as funções aproximadas descontínuas no espaço e no tempo. Nesta Dissertação não faremos a discretização no tempo, a qual pode ser feita com um método de Runge–Kutta seguindo as referências [7, 8]. Todas as funções aproximadas abaixo serão supostas suaves na variável temporal.

3.1 Formulação Geral

Introduzindo a nova variável $q = \sqrt{a(u)}\partial_x u$, reescrevemos o problema 3.1 acima da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(f(u) - \sqrt{a(u)}q) = 0 & \text{em}(0, T) \times (0, 1), \\ q - \partial_x g(u) = 0 & \text{em}(0, T) \times (0, 1), \\ u(t = 0) = u_0 & \text{em}(0, 1), \\ u(x = 0) = u(x = 1) & \text{em}(0, T), \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $g(u) \stackrel{\text{def}}{=} \int^u \sqrt{a(s)} ds$.

Vamos discretizar este problema. Para isso definimos o fluxo

$$\mathbf{h} \stackrel{\text{def}}{=} (h_u, h_q),$$

onde h_u e h_q são as coordenadas do fluxo \mathbf{h} , nada tendo a ver com derivadas parciais, as quais são definidas por

$$\begin{aligned} h_u &\stackrel{\text{def}}{=} f(u) - \sqrt{a(u)}q \\ h_q &\stackrel{\text{def}}{=} -g(u). \end{aligned}$$

Assim o sistema em 3.2 pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} \partial_t u \\ 0 \end{pmatrix} + \partial_x \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ -q \end{pmatrix}.$$

Tomamos uma partição do intervalo $(0, 1)$, usando a notação de [6]:

$$(0, 1) = \cup \bar{I}_j, \quad I_j = (x_{j-1/2}, x_{j+1/2}), \quad \text{onde}$$

$$0 = x_{1/2} < \dots < x_{N+1/2} = 1, \quad \text{para } j = 1, \dots, N.$$

Escrevemos

$$\Delta x_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2} \quad \text{e} \quad \Delta x = \max_{1 \leq j \leq N} \Delta x_j.$$

Procuramos uma solução aproximada $\mathbf{w}_h = (u_h, q_h)$ de $\mathbf{w} = (u, q)$ tal que para cada tempo $t \in [0, T]$, $u_h(t)$ e $q_h(t)$ pertençam ao espaço de elementos finitos

$$V_h \equiv V_h^k = \{v \in L^1(0, 1) : v|_{I_j} \in \mathcal{P}^k(I_j); j = 1, \dots, N\}$$

onde $\mathcal{P}^k(I_j)$ denota o espaço dos polinômios de grau no máximo k restritos a I_j . Para determinar a solução aproximada $\mathbf{w}_h = (u_h, q_h)$, notemos primeiramente que se multiplicarmos as equações do sistema 3.2 por funções suaves arbitrárias v_u, v_q, v_i , respectivamente, e integrarmos por partes formalmente sobre I_j , teremos:

I)

$$\begin{aligned} & \int_{I_j} \partial_t u(x, t) v_u(x) dx - \int_{I_j} h_u(\mathbf{w}(x, t)) \partial_x v_u(x) dx \\ & + h_u(\mathbf{w}(x_{j+1/2}, t)) v_u(x_{j+1/2}^-) - h_u(\mathbf{w}(x_{j-1/2}, t)) v_u(x_{j-1/2}^+) \\ & = 0 \end{aligned}$$

II)

$$\begin{aligned} & \int_{I_j} q(x, t) v_q(x) dx - \int_{I_j} h_q(\mathbf{w}(x, t)) \partial_x v_q(x) dx \\ & + h_q(\mathbf{w}(x_{j+1/2}, t)) v_q(x_{j+1/2}^-) - h_q(\mathbf{w}(x_{j-1/2}, t)) v_q(x_{j-1/2}^+) \\ & = 0 \end{aligned}$$

III)

$$\int_{I_j} u(x, 0) v_i(x) dx = \int_{I_j} u_0(x) v_i(x) dx.$$

Agora vamos substituir as funções suaves v_u, v_q, v_i por funções testes, $v_{h,u}, v_{h,q}, v_{h,i} \in V_h$, respectivamente, e também substituir a solução exata \mathbf{w} por uma solução aproximada $\mathbf{w}_h = (u_h, q_h) \in V_h$. Como a solução aproximada \mathbf{w}_h será descontínua em cada coordenada, faz-se necessário substituir o fluxo \mathbf{h} por um fluxo numérico

$$\hat{\mathbf{h}} = (\hat{h}_u(\mathbf{w}_h)_{j+1/2}(t), \hat{h}_q(\mathbf{w}_h)_{j+1/2}(t))$$

que definiremos abaixo. Caso contrário, teríamos ambigüidade para os termos h_u ou $h_q(\mathbf{w}_h(x_{j\pm 1/2}, t))$, devido a valores laterais distintos de \mathbf{w}_h em $x_{j\pm 1/2}$. Logo a solução aproximada \mathbf{w}_h , dada pelo *método de Galerkin localmente descontínuo* é definida como a solução da seguinte formulação fraca:

î)

$$\begin{aligned} & \int_{I_j} \partial_t u(x, t) \mathbf{v}_{h,u} dx - \int_{I_j} h_u(\mathbf{w}_h(x, t)) \partial_x \mathbf{v}_{h,u}(x) dx \\ & + \hat{h}_u(\mathbf{w}_h)_{j+1/2}(t) \mathbf{v}_{h,u}(x_{j+1/2}^-) - \hat{h}_u(\mathbf{w}_h)_{j-1/2}(t) \mathbf{v}_{h,u}(x_{j-1/2}^+) \\ & = 0 \end{aligned}$$

$$\forall \mathbf{v}_{h,u} \in \mathcal{P}^k(I_j);$$

îî)

$$\begin{aligned} & \int_{I_j} q_h(x, t) \mathbf{v}_{h,q}(x) dx - \int_{I_j} h_q(\mathbf{w}_h(x, t)) \partial_x \mathbf{v}_{h,q}(x) dx \\ & + \hat{h}_q(\mathbf{w}_h)_{j+1/2}(t) \mathbf{v}_{h,q}(x_{j+1/2}^-) - \hat{h}_q(\mathbf{w}_h)_{j-1/2}(t) \mathbf{v}_{h,q}(x_{j-1/2}^+) \\ & = 0, \end{aligned}$$

$$\forall \mathbf{v}_{h,q} \in \mathcal{P}^k(I_j);$$

îîî)

$$\int_{I_j} u_h(x, 0) v_{h,i}(x) dx = \int_{I_j} u_0(x) v_{h,i}(x) dx,$$

$$\forall v_{h,i} \in \mathcal{P}^k(I_j).$$

3.1.1 Fluxo numérico

Definimos o fluxo numérico $\hat{\mathbf{h}} = \hat{\mathbf{h}}_{conv} + \hat{\mathbf{h}}_{dif}: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^2$ (onde $\hat{\mathbf{h}}_{conv}$ e $\hat{\mathbf{h}}_{dif}$ são, contribuições ao fluxo numérico devidas, respectivamente, às partes convectiva e difusiva da equação em 3.2) da maneira que se segue. Escrevendo um ponto genérico do \mathbf{R}^4 como $(\mathbf{w}^-, \mathbf{w}^+) \equiv (u^-, q^-, u^+, q^+)$, temos:

i)

$$\hat{\mathbf{h}}_{conv}(\mathbf{w}^-, \mathbf{w}^+) \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{f}(u^-, u^+), 0),$$

sendo $\hat{f} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ um *E-fluxo* (*fluxo entrópico*) consistente com a função f no sentido de Osher [13], i.e., \hat{f} satisfaz a desigualdade

$$\{\text{sgn}(u^+ - u^-)\}[\hat{f}(u^-, u^+) - f(u)] \leq 0$$

(condição de E-fluxo).

para todo u entre u^- e u^+ , e \hat{f} é uma função Lipschitziana tal que

$$\hat{f}(u, u) = f(u) \quad \forall u \in \mathbf{R}$$

(condição de consistência).

ii)

$$\hat{\mathbf{h}}_{dif}(\mathbf{w}^-, \mathbf{w}^+) \stackrel{\text{def}}{=} \left(-\frac{[g(u)]}{[u]} \bar{q}, -\overline{g(u)} \right) - \mathbf{C}_{dif}[\mathbf{w}],$$

onde $\bar{\cdot}$ representa a média aritmética entre \cdot^- e \cdot^+ , i.e.

$$\bar{q} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{q^- + q^+}{2} \quad \text{e} \quad \overline{g(u)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g(u^-) + g(u^+)}{2},$$

$[\mathbf{w}]$ representa o salto entre \mathbf{w}^- e \mathbf{w}^+ , i.e. $[\mathbf{w}] \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{w}^+ - \mathbf{w}^-$ e

$$\mathbf{C}_{dif} = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} \\ -c_{12} & 0 \end{pmatrix},$$

sendo $c_{12} \equiv c_{12}(\mathbf{w}^-, \mathbf{w}^+)$ uma função localmente Lipschitziana e limitada, com $c_{12} \equiv 0$ se $a(\cdot) \equiv 0$.

Observação 1 Vale a seguinte relação entre o salto do produto de duas funções quaisquer φ , ψ e suas médias aritméticas:

$$[\varphi\psi] = \bar{\varphi}[\psi] + [\varphi]\bar{\psi}, \tag{3.3}$$

como o leitor pode facilmente verificar.

Observação 2 Em [6] não aparece a hipótese da função c_{12} ser limitada, mas a colocamos acima porque no nosso entender ela é necessária na demonstração do Lema 3.3.4

Observação 3 A forma do fluxo numérico difusivo $\hat{\mathbf{h}}_{dif}$ é escolhida como acima para que valha o Lema 3.2.3

Propriedades do fluxo numérico: Vamos mostrar algumas propriedades do fluxo numérico $\hat{\mathbf{h}}$.

i) Como uma consequência imediata da consistência de \hat{f} com f e da definição de $\hat{\mathbf{h}}_{df}$, temos que $\hat{\mathbf{h}}$ é consistente com o fluxo \mathbf{h} , i.e.

$$\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \mathbf{h}(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{R}^2;$$

ii) No caso em que c_{12} dependa só de (u^-, u^+) , $\hat{\mathbf{h}}$ permite uma resolução local de q_h em função de u_h . De fato, usando $\hat{\Pi}$ e as definições de $\mathbf{h}_q(\mathbf{w}_h)$ e $\hat{\mathbf{h}}_q(\mathbf{w}_h^-, \mathbf{w}_h^+)$, temos

$$\int_{I_j} q_h(x, t) \mathbf{v}_{h,q}(x) dx = \int_{I_j} -g(u_h) \partial_x \mathbf{v}_{h,q}(x) dx + 2g(u_h) - 2c_{12}[u_h];$$

iii) O fluxo numérico pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{w}^-, \mathbf{w}^+) = \left(\frac{[\phi(u)]}{[u]} - \frac{[g(u)]}{[u]} \bar{q}, -\overline{g(u)} \right) - \mathbf{C}[\mathbf{w}]$$

onde $[\cdot] \stackrel{\text{def}}{=} \cdot^- - \cdot^+$ (o salto entre \cdot^- e \cdot^+),

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ -c_{12} & 0 \end{pmatrix},$$

sendo

$$c_{11} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{[u]} \left(\frac{[\phi(u)]}{[u]} - \hat{f}(u_-, u_+) \right)$$

com $\phi(u) \stackrel{\text{def}}{=} \int^u f(s) ds$. Como \hat{f} é um E-fluxo,

$$c_{11} = \frac{1}{[u]^2} \int_{u^-}^{u^+} (f(s) - \hat{f}(u_-, u_+)) ds \geq 0$$

e daí também temos que a matriz \mathbf{C} é semi-positiva definida. De fato,

$$(\mathbf{C}\mathbf{v}, \mathbf{v}) = c_{11}v_1^2 \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \equiv (v_1, v_2) \in \mathbf{R}^2.$$

Esta propriedade será importante para a demonstração da estabilidade do GLD (Teorema 3.2.1 abaixo).

Observação 4 Observamos que $c_{11} \equiv c_{11}(u^-, u^+)$ não tem salto em $u^+ = u^-$. Com efeito, como $\hat{f}(u_-, u_-) = f(u_-)$, temos que

$$\begin{aligned}
 c_{11}(u^-, u^-) &= \lim_{u^+ \rightarrow u^-} \frac{1}{[u]^2} \int_{u^-}^{u^+} [f(s) - \hat{f}(u^-, u^+)] ds \\
 &= \lim_{u^+ \rightarrow u^-} \frac{1}{[u]^2} \int_{u^-}^{u^+} [f(s) - f(u^-)] ds \\
 &\quad + \int_{u^-}^{u^+} [\hat{f}(u^-, u^-) - \hat{f}(u^-, u^+)] ds \\
 &= \lim_{u^+ \rightarrow u^-} \frac{1}{[u]^2} \int_{u^-}^{u^+} f'(u^-)(s - u^-) ds \\
 &\quad + \int_{u^-}^{u^+} O((s - u^-)^2) ds + [\hat{f}(u^-, u^-) - \hat{f}(u^-, u^+)] [u] \\
 &= \lim_{u^+ \rightarrow u^-} \frac{1}{[u]^2} \left\{ f'(u^-) \frac{[u]^2}{2} + O([u]^3) \right. \\
 &\quad \left. - [\hat{f}(u^-, u^+) - \hat{f}(u^-, u^-)] [u] \right\} \\
 &= \frac{f'(u^-)}{2} - \partial_2 \hat{f}(u^-, u^-).
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

No caso linear teremos que

$$c_{11}(u^-, u^-) = \frac{c}{2} - \partial_2 \hat{f}(u^-, u^-).$$

A fórmula 3.4 junto com o enunciado e a demonstração do Lema 3.3.4 sugerem que a estabilidade do GLD depende da condição

$$\partial_2 \hat{f}(u, u) \neq \frac{f'(u)}{2}, \quad \forall u \in \mathbf{R}$$

Encerraremos a Seção 3.1 exibindo uma base ortogonal do espaço vetorial V_h , a qual será usada na demonstração do Lema 3.3.2 abaixo, e destacando propriedades da projeção ortogonal do $L^2((0, 1))$ em V_h , as quais também serão usadas abaixo.

3.1.2 Uma base ortogonal de V_h

Seja $\{Q_i\}_{i=0}^k$ a base ortogonal de $\mathcal{P}^k([-1, 1])$, em relação ao produto interno do L^2 , constituída pelos polinômios de Legendre. A partir desta base

construimos uma base ortogonal de V_h da seguinte maneira: Denotando por χ_{I_j} a função característica do intervalo I_j (definida pelos valores constantes 1 quando restrita ao intervalo I_j e zero no complementar) para $j = 1, \dots, N$ e por λ_j o isomorfismo que transforma o intervalo I_j no intervalo $(-1, 1)$, temos que $\{(Q_i \circ \lambda_j)\chi_{I_j}\}_{i=0, j=1}^{i=k, j=N}$ é uma base ortogonal de V_h . Lembramos que os polinômios de Legendre Q_i satisfazem as seguintes propriedades (v. [3]):

- i) $\int_{-1}^1 Q_i(s)Q_j(s)ds = \frac{2}{2i+1}\delta_{ij}$;
- ii) $Q_i(\pm 1) = (\pm 1)^i$;
- iii) $Q_i(s)$ é uma combinação linear de potências ímpares (pares) de s para valores ímpares (pares) de s e;
- iv) Valem fórmulas de recorrências, as quais nos dão um algoritmo para calcular os polinômios de Legendre (v. [3], p.58).

3.1.3 A Projeção ortogonal do $L^2((0, 1))$ em V_h

Denotaremos por \mathbf{P} a projeção ortogonal do $L^2((0, 1))$ em V_h . A seguinte caracterização de \mathbf{P} (válida em espaços de Hilbert em geral) será usada com frequência:

Dado qualquer z em $L^2((0, 1))$, temos $v = \mathbf{P}z$ se, e somente se,

$$\int_0^1 (v - z)\varphi dx = 0 \quad (3.5)$$

$\forall \varphi \in V_h$, i.e. $v = \mathbf{P}z$ se, e somente se, $v - z \in V_h^\perp$. Usaremos a letra \mathbf{p} para denotar o complemento ortogonal de um vetor qualquer em relação a \mathbf{P} ; no caso acima, escreveríamos $\mathbf{p} = \mathbf{P}z - z = v - z$.

Uma outra propriedade que precisaremos usar é a da projeção de uma função vezes a função característica de um subintervalo I_j da partição do intervalo $(0, 1)$ especificada acima. Para este caso, vale a seguinte fórmula:

$$\mathbf{P}(z\chi_{I_j}) = (\mathbf{P}z)\chi_{I_j}, \quad z \in L^2((0, 1)). \quad (3.6)$$

A prova desta fórmula pode ser feita facilmente usando a caracterização 3.5 da projecção dada acima. Com efeito, se $\varphi \in V_h$ então $\varphi\chi_{I_j} \in V_h$, logo,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [(\mathbf{P}z)\chi_{I_j} - z\chi_{I_j}]\varphi dx \\ &= \int_0^1 (\mathbf{P}z - z)(\varphi\chi_{I_j}) dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

para toda função φ em $L^2((0, 1))$. Também vale a seguinte propriedade:
Seja \mathbf{P}_{k+1} a projecção ortogonal do $L^2((0, 1))$ em V_h^{k+1} . Então

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{P}_{k+1}. \quad (3.7)$$

Este fato é uma consequência de um resultado geral de Análise Funcional:
Sejam V e W subespaços fechados de um espaço de Hilbert H tais que $V \subset W$, e, \mathbf{P}_V e \mathbf{P}_W as projecções ortogonais de H em V e W , respectivamente. Então

$$\mathbf{P}_V = \mathbf{P}_V\mathbf{P}_W. \quad (3.8)$$

Com efeito, para qualquer $z \in H$, temos

$$z = \mathbf{P}_W z + z_1, \quad \text{com } z_1 \in W^\perp \subset V^\perp,$$

logo,

$$\mathbf{P}_V z = \mathbf{P}_V \mathbf{P}_W z + \mathbf{P}_V z_1,$$

mas, $\mathbf{P}_V z_1 = 0$, pois, $z_1 \in V^\perp$, então

$$\mathbf{P}_V z = \mathbf{P}_V \mathbf{P}_W z, \quad \forall z \in H,$$

o que prova 3.8.

3.2 Estabilidade na norma L^2

Teorema 3.2.1 Temos que

$$\frac{1}{2} \int_0^1 u_h^2(x, T) dx + \int_0^T \int_0^1 q_h^2(x, t) dx dt + \Theta_{T, \mathbf{C}}([w_h]) \leq \frac{1}{2} \int_0^1 u_0^2(x) dx$$

onde

$$\Theta_{T, \mathbf{C}}([z]) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \sum_{1 \leq j \leq N} \{[z(t)]\mathbf{C}[z(t)]\}_{j+1/2} dt,$$

$\forall z : [0, T] \rightarrow V_h$.

Para demonstrarmos o Teorema acima, é conveniente alguma preparação. Em primeiro lugar, vejamos como obtê-la no caso contínuo, ou seja, vejamos a versão correspondente para soluções suaves de 3.2.

Proposição 3.2.2 (Estabilidade na norma L^2 –caso contínuo) .

Temos que

$$\frac{1}{2} \int_0^1 u^2(x, T) dx + \int_0^T \int_0^1 q^2(x, t) dx dt = \frac{1}{2} \int_0^1 u_0^2(x) dx,$$

se a solução exata (u, q) de 3.2 é suave.

Demonstração: Vamos reescrever as equações I)–III), substituindo as funções $v(x)$ por funções $v(x, t)$. Em seguida, adicionando-as, somando em $j = 1, \dots, N$ e integrando no tempo de 0 a T , obtemos a formulação variacional:

$$\mathcal{B}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0$$

da equação de convecção–difusão 3.2 em termos da função

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} & \int_0^T \int_0^1 \partial_t u(x, t) \mathbf{v}_u(x, t) dx dt + \int_0^T \int_0^1 q(x, t) \mathbf{v}_q(x, t) dx dt \\ & - \int_0^T \int_0^1 \mathbf{h}(\mathbf{w}(x, t)) \cdot \partial_x \mathbf{v}(x, t) dx dt, \end{aligned} \tag{3.9}$$

onde $\mathbf{w} = (u, q) \equiv (u(x, t), q(x, t))$ e $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_u, \mathbf{v}_q) \equiv (\mathbf{v}_u(x, t), \mathbf{v}_q(x, t))$. Note-mos que aqui, diferentemente do que ocorria no Capítulo 2, a função \mathcal{B} não é em geral uma forma bilinear. Ela é linear na variável \mathbf{v} , mas na variável \mathbf{w} , ela é linear somente no caso em que a equação de convecção–difusão em 3.1 é linear. Isto nos leva a estimativas de caráter diferente daquelas no Capítulo 2.

Afirmção: $\mathbf{h}(\mathbf{w}(x, t)) \partial_x \mathbf{w}(x, t) = \partial_x (\phi(u) - \frac{1}{2}g(u)^2)$ (uma derivada total). De fato, pela definição de \mathbf{h} , temos

$$\mathbf{h}(\mathbf{w}(x, t)) \cdot \partial \mathbf{w}(x, t) = (f(u) - \sqrt{a(u)q}) \partial_x u - g(u) \partial_x q,$$

e por outro lado,

$$\begin{aligned} \partial_x (\phi(u) - g(u)q) &= \partial_x \phi(u) - [\partial_x g(u)q + g(u) \partial_x q] \\ &= f(u) \partial_x u - [\sqrt{a(u)} (\partial_x u) q + g(u) \partial_x q] \\ &= (f(u) - \sqrt{a(u)q}) \partial_x u - g(u) \partial_x q; \end{aligned}$$

além disso, $\partial_x(g(u)q) = \partial_x(\frac{1}{2}g(u)^2)$, pois $q = \partial_x g(u)$. ■

Usando a afirmação acima vemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbf{w}, \mathbf{w}) &= \int_0^T \int_0^1 \partial_t u(x, t) u(x, t) dx dt + \int_0^T \int_0^1 q(x, t)^2 dx dt \\ &\quad - \int_0^T \int_0^1 \partial_x(\phi(u) - \frac{1}{2}g(u)^2) dx dt. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\int_0^T \partial_t u(x, t) u(x, t) dt = \frac{1}{2} u(x, t)^2 \Big|_{t=0}^{t=T} = \frac{1}{2} u(x, T)^2 - \frac{1}{2} u(x, 0)^2$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 \partial_x(\phi(u) - \frac{1}{2}g(u)^2) dt &= \int_0^T (\phi(u(1, t)) - \frac{1}{2}g(u(1, t))^2 \\ &\quad - (\phi(u(0, t)) - \frac{1}{2}g(u(0, t))^2) dt \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $u(1, t) = u(0, t)$ (condição de fronteira periódica), logo,

$$\mathcal{B}(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2} \int_0^T u(x, T)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^T u(x, 0)^2 dx + \int_0^T \int_0^1 q(x, t)^2 dx dt. \quad (3.10)$$

Mas $\mathcal{B}(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = 0$, pois $\mathcal{B}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0$ para toda \mathbf{v} suave, então

$$\frac{1}{2} \int_0^1 u(x, t)^2 dx + \int_0^T \int_0^1 q(x, t)^2 dx dt = \frac{1}{2} \int_0^1 u_0(x)^2 dx. \quad \blacksquare$$

Para demonstrar o caso discreto, Teorema 3.2.1, procedemos inicialmente de maneira análoga ao caso contínuo, i.e. reescrevendo as equações $\hat{\mathbf{I}}-\hat{\mathbf{II}}$ substituindo as funções $v_h(x)$ por $\mathbf{v}_h(x, t)$, adicionando ambas as equações, somando em $j = 1, \dots, N$ e integrando no tempo de 0 a T . Procedendo deste modo, obtemos

$$\mathcal{B}_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \equiv \mathbf{v}_h(t) \in V_h^k \times V_h^k, \quad \forall t \in (0, T)$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \int_{I_j}^1 \partial_t u_h(x, t) \mathbf{v}_{h,u}(x, t) dx dt \\
&+ \int_0^T \int_0^1 q_h(x, t) \mathbf{v}_{h,q}(x, t) dx dt \\
&- \int_0^T \sum_{1 \leq j \leq N} \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{w}_h)_{j+1/2}(t) \cdot [\mathbf{v}_h(t)]_{j+1/2} dt \\
&- \int_0^T \sum_{1 \leq j \leq N} \int_{I_j} \mathbf{h}(\mathbf{w}_h(x, t)) \cdot \partial_x \mathbf{v}_h(x, t) dx dt.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Vamos obter uma expressão para $\mathcal{B}_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{w}_h)$ através do seguinte resultado:

Lema 3.2.3 *Temos que*

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_h(\mathbf{z}, \mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \mathbf{z}_u(x, T)^2 dx + \int_0^T \int_0^1 \mathbf{z}_q(x, t) dx dt \\
&+ \Theta_{T, \mathbf{C}}([\mathbf{z}]) - \frac{1}{2} \int_0^1 \mathbf{z}_u(x, 0) dx,
\end{aligned}$$

para toda função vetorial $\mathbf{z} : [0, T] \rightarrow V_h \times V_h$, onde fazemos a identificação usual $\mathbf{z}(x, t) \equiv \mathbf{z}(t)(x)$ e $\mathbf{z}_u, \mathbf{z}_q$ denotam as coordenadas de \mathbf{z} em $V_h \times V_h$, i.e. $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_u, \mathbf{z}_q)$ e $\Theta_{T, \mathbf{C}}$ está definida no Teorema 3.2.1.

Demonstração: Pela definição de \mathcal{B}_h em 3.11, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_h(\mathbf{z}, \mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \mathbf{z}_u(x, T)^2 dx + \int_0^T \int_0^1 \mathbf{z}_q(x, t)^2 dx dt + \int_0^T \theta_{\text{diss}} dt \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 \mathbf{z}_u(x, 0)^2 dx
\end{aligned}$$

onde

$$\theta_{\text{diss}} \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{1 \leq j \leq N} \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{z})_{j+1/2}(t) \cdot [\mathbf{z}(t)]_{j+1/2} + \int_{I_j} \mathbf{h}(\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)) \cdot \partial_x \mathbf{z}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

Vamos mostrar que

$$\int_0^T \theta_{\text{diss}}(t) dt = \Theta_{T, \mathbf{C}}[\mathbf{z}] :$$

Como

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)) \cdot \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{z}(\mathbf{x}, t) &= \partial_{\mathbf{x}}(\phi(\mathbf{z}_u) - g(\mathbf{z}_u)\mathbf{z}_q) \\ &\equiv \partial_{\mathbf{x}} H(\mathbf{z}(x, t)) \end{aligned}$$

(v. demonstração da Proposição 3.2.2) então

$$\begin{aligned} \theta_{\text{diss}} &= - \sum_{1 \leq j \leq N} \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{z}) \quad (t) \cdot [\mathbf{z}(t)]_{j+1/2} + \int_{I_j} \partial_{\mathbf{x}} H(\mathbf{z}(x, t)) dx \\ &= - \sum_{1 \leq j \leq N} \left\{ \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{z}) \quad (t) [\mathbf{z}(t)]_{j+1/2} + H(\mathbf{z}(x_{j+1/2-}, t)) \right. \\ &\quad \left. - H(\mathbf{z}(x_{j-1/2+}, t)) \right\}. \end{aligned}$$

Daí, usando a periodicidade de $\mathbf{z}(\cdot, t) \equiv \mathbf{z}(t)$, vem que

$$\theta_{\text{diss}} = \sum_{1 \leq j \leq N} \{ [H(\mathbf{z}(t))] - \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{z})_{j+1/2}(t) \cdot [\mathbf{z}(t)]_{j+1/2} \}.$$

Agora, pela definição de H e 3.3, temos que

$$\begin{aligned} [H(\mathbf{z}(t))] &= [\phi(\mathbf{z}_u(t)) - [g(\mathbf{z}_u(t))\mathbf{z}_q(t)]] \\ &= [\phi(\mathbf{z}_u(t))] - [g(\mathbf{z}_u(t))]\mathbf{z}_q(t) - [\mathbf{z}_q(t)]\overline{g(\mathbf{z}_u(t))}, \end{aligned}$$

e, pela definição de $\hat{\mathbf{h}}$, temos

$$\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{z})(t) \cdot [\mathbf{z}(t)] = \hat{\mathbf{h}}_u[\mathbf{z}_u] + \hat{\mathbf{h}}_g[\mathbf{z}_q]$$

onde

$$\hat{\mathbf{h}}_u = \frac{[\phi(\mathbf{z}_u)]}{[\mathbf{z}_u]} - \frac{[g(\mathbf{z}_u)]}{[\mathbf{z}_u]} - c_{11}[\mathbf{z}_u] - c_{12}[\mathbf{z}_q]$$

e

$$\hat{\mathbf{h}} = -\overline{g(\mathbf{z}_u)} + c_{12}[\mathbf{z}_u].$$

Então, substituindo estas expressões acima e fazendo os devidos cancelamentos, obtemos o Lema 3.2.3. ■

Demonstração do Teorema 3.2.1: Tomando $\mathbf{z} = \mathbf{w}_h = (u_h, v_h)$ no Lema 3.2.3 e usando que $\mathcal{B}_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{w}_h) = 0$, vemos que para concluir a demonstração do Teorema 3.2.1, resta apenas verificar que

$$\int_0^1 u_h(x, 0)^2 dx \leq \int_0^1 u_0(x)^2 dx : \quad (3.12)$$

Como

$$\int_{I_j} u_h(x, 0)v(x)dx = \int_{I_j} u_0(x)v(x)dx \quad (3.13)$$

para todo $v \in \mathcal{P}^k(I_j)$ e $u_h(x, 0)|_{I_j} \in \mathcal{P}^k(I_j)$, segue-se, tomando-se $v = u_h(\cdot, 0)|_{I_j}$ e pela desigualdade de Hölder, que

$$\|u_h(\cdot, 0)\|_{L^2(I_j)}^2 = \int_{I_j} u_0(x)u_h(x, 0)dx \leq \|u_0\|_{L^2(I_j)}\|u_h(\cdot, 0)\|_{L^2(I_j)},$$

logo,

$$\|u_h(\cdot, 0)\|_{L^2(I_j)} \leq \|u_0\|_{L^2(I_j)},$$

para todo $j \in \{1, \dots, N\}$, donde resulta 3.12. ■

Observação 3.2.4 Para concluir 3.12 também podemos concluir de forma abstrata, usando que 3.13 implica que $u_h(\cdot, 0)$ é precisamente a projeção ortogonal \mathbf{P} do $L^2((0, 1))$ de u_0 em V_h e que a norma de uma projeção ortogonal de um vetor qualquer não aumenta o seu tamanho.

3.3 Estimativa do erro no caso linear

A seguir vamos tratar da questão de precisão da solução aproximada definida pelo Método de Galerkin Localmente Descontínuo no caso linear, i.e. $f(u) = cu$ e $a(u) = au$ onde c e a são constantes. A nossa meta é demonstrar em detalhes o seguinte teorema:

Teorema 3.3.1 (Estimativa do erro na norma L^2 —Caso linear) *No caso linear, i.e. $f(u) = cu$ e $a(u) \equiv a$, onde c e a são constantes, temos a seguinte estimativa para o erro e $\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{w} - \mathbf{w}_h$ (erro da aproximação \mathbf{w}_h):*

$$\left\{ \int_0^1 |\mathbf{e}_u(x, T)|^2 dx + \int_0^T \int_0^1 |\mathbf{e}_q(x, t)|^2 dx dt + \Theta_{T, \mathbf{C}}([\mathbf{e}]) \right\}^{1/2} \leq C(\Delta x)^k,$$

equivalentemente,

$$\|\mathbf{e}_u(\cdot, T)\|_{L^2((0,1))}^2 + \|\mathbf{e}_q\|_{L^2((0,1) \times (0,T))}^2 + \Theta_{T, \mathbf{C}}([\mathbf{e}]) \leq C(\Delta x)^{2k},$$

onde C representa uma constante dependente apenas de k , $|u|_{k+1}$ e $|u|_{k+2}$.

Para isto precisaremos de alguns resultados auxiliares. Nestes, usaremos com frequência a projeção ortogonal \mathbf{P} do $L^2((0, 1))$ em V_h e suas propriedades; v. Seção 3.1.3.

Lema 3.3.2 *No caso linear, para $\mathbf{p} = \mathbf{P}\mathbf{w} - \mathbf{w}$, $\mathbf{w} = (u, q)$ e $J = I_j \cup I_{j+1}$, $j \in \{1, \dots, N\}$ qualquer, temos*

$$\begin{aligned} |(\bar{\mathbf{p}}_u)_j| &\leq c_k(\Delta x)^{(\hat{k}+1/2)}|u|_{H^{k+1}(J)}, \\ |[\mathbf{p}_u]_j| &\leq c_k(\Delta x)^{(k+1/2)}|u|_{H^{k+1}(J)}, \\ |(\bar{\mathbf{p}}_q)_j| &\leq c_k\sqrt{a}(\Delta x)^{(\hat{k}+1/2)}|u|_{H^{k+2}(J)}, \\ |[\mathbf{p}_q]_j| &\leq \sqrt{a}(\Delta x)^{(k+1/2)}|u|_{H^{k+2}(J)}, \end{aligned}$$

onde $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_q)$, φ_j representa uma grandeza φ localizada em $x_{j+1/2}$, por exemplo, $(\bar{\mathbf{p}}_u)_j = \frac{\mathbf{p}_u}{2}(x_{j+1/2}^+ + x_{j+1/2}^-)$, c_k é uma constante dependente somente de k e $\hat{k} \stackrel{\text{def}}{=} k$ exceto quando a partição é uniforme e k é par; neste caso, $\hat{k} \stackrel{\text{def}}{=} k + 1$.

Demonstração: Pelo Corolário 1.2.3,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}_u\|_{L^\infty(I)} &\leq c_k(\Delta x)^{(k+1/2)}|u|_{H^{(k+1)}(I)} \\ &\leq c_k(\Delta x)^{(k+1/2)}|u|_{H^{(k+1)}(J)}, \end{aligned}$$

onde $I = I_j, I_{j+1}$, logo,

$$\begin{aligned} |(\bar{\mathbf{p}})_j| &\leq \frac{1}{2}|\mathbf{p}_u^+|_j + \frac{1}{2}|\mathbf{p}_u^-|_j \\ &\leq \frac{1}{2}c_k(\Delta x)^{(k+1/2)}|u|_{H^{k+1}(J)} + \frac{1}{2}c_k(\Delta x)^{(k+1/2)}|u|_{H^{k+1}(J)} \\ &= c_k(\Delta x)^{(k+1/2)}|u|_{H^{k+1}(J)}; \end{aligned}$$

analogamente,

$$\begin{aligned} |[\mathbf{p}_u]_j| &= |\mathbf{p}_u^+ - \mathbf{p}_u^-| \leq |\mathbf{p}_u^+| + |\mathbf{p}_u^-| \\ &\leq c_k(\Delta x)^{(k+1/2)}|u|_{H^{k+1}(J)}. \end{aligned}$$

Para as estimativas relativas a \mathbf{p}_q , procedendo de maneira análoga e usando que $q = \sqrt{a}\partial_x u$, obtemos

$$|(\bar{\mathbf{p}}_q)_j| \leq \frac{1}{2}c_k(\Delta x)^{(k+1/2)}\sqrt{a}|u|_{H^{(k+2)}(J)}$$

e

$$|[\overline{p}_q]_j| \leq \frac{1}{2} c_k (\Delta x)^{(k+1/2)} \sqrt{a} |u|_{H^{(k+2)}(J)}.$$

Assim, concluímos o resultado para $\hat{k} = k$.

A seguir devemos mostrar a primeira e terceira desigualdades do lema no caso $\hat{k} = k + 1$, sendo a partição uniforme e k par. Para mostrar esse resultado precisamos somente mostrar a seguinte afirmação :

•**Afirmação 1:** Se $u \in V_h^{k+1}$ então $\overline{p}_u = 0$.

De fato, se \mathbf{P}_{k+1} denota a projeção do L^2 em V_h^{k+1} , como na Seção 3.1.3, então $p_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}_{k+1} u - u$ satisfaz

$$|(\overline{p}_1)_{j+1/2}| \leq c_k (\Delta x)^{(k+1)+1/2} |u|_{H^{k+2}(J)},$$

pelo caso anterior, visto que $k + 1$ é ímpar, o que implica em $\widehat{k + 1} = k + 1$; além disso, $\overline{p}_1 = \overline{p}$. Para ver esta última igualdade, vamos usar 3.7:

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{P}_{k+1} u + p_1 \\ &= \mathbf{P}(\mathbf{P}_{k+1} u) - (\mathbf{P}\mathbf{P}_{k+1} u - \mathbf{P}_{k+1} u) + p_1 \\ &= \mathbf{P}u - (\mathbf{P}\mathbf{P}_{k+1} u - \mathbf{P}_{k+1} u) + p_1, \end{aligned}$$

onde a última igualdade veio de 3.7. Por outro lado $u = \mathbf{P}_u + p$, portanto temos que $\overline{p} = \overline{p}_1$, onde usamos a *Afirmação 1*.

•**Afirmação 2:** Se $u_{k+1}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{x - \alpha}{\Delta x/2} \right)^{k+1}$, $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} x_{j+1/2}$, então $\overline{p}_{u_{k+1}} = 0$

A Afirmação 2 implica a Afirmação 1, pois para todo $u \in V_h^{k+1}$, temos que $u = \sum_{s=1}^N Q_s \chi_{I_s}$ com $Q_s \in \mathcal{P}^{k+1}(\mathbf{R})$ e $Q_s = c_s u_{k+1} + r_s$, onde c_s é uma constante e $r_s \in \mathcal{P}^k(\mathbf{R})$, pelo Algoritmo de Euclides, logo, usando 3.7,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_u &= \sum_{s=1}^N (\mathbf{P}(c_s u_{k+1} + r_s) - (c_s u_{k+1} + r_s)) \chi_{I_s} \\ &= \sum_{s=1}^N c_s (\mathbf{P}u_{k+1} - u_{k+1}) \chi_{I_s}, \end{aligned}$$

donde

$$\overline{\mathbf{p}}_u = c_s \overline{\mathbf{p}}_{u_{k+1}}.$$

Vamos mostrar a Afirmação 1: Seja $v_{ij} = \{(Q_i \circ \lambda_j)\chi_{I_j}\}_{i=0, j=1}^{i=k, j=N}$ a base ortogonal de V_h , construída na Seção 3.1.2. Lembramos que Q_i são os polinômios de Legendre e que estes satisfazem as propriedades i)–iv) da Seção 3.1.2, λ_j é o isomorfismo que transforma o intervalo I_j no intervalo $[-1, 1]$ e χ_{I_j} é a função característica do intervalo I_j . Aqui a partição do intervalo $(0, 1)$ é uniforme, logo, podemos escrever

$$I_j = (\alpha - \Delta x, \alpha), \quad \alpha \stackrel{\text{def}}{=} x_{j+1/2}, \quad j = 1, \dots, N$$

e o nosso isomorfismo λ_j fica dado por

$$\lambda_j(x) = \frac{2}{\Delta x}(x - \alpha) + 1, \quad j = 1, \dots, N.$$

Denotaremos o produto interno e a norma do $L^2((0, 1))$, respectivamente, por (\cdot, \cdot) e $\|\cdot\|$ e escreveremos $u = u_{k+1}$, $x_j = \alpha - \frac{\Delta x}{2}$ e $x_{j+1} = \alpha + \frac{\Delta x}{2}$. Usaremos a fórmula de projeção $\mathbf{P}u = \sum_{ij}(u, v_{ij})/\|v_{ij}\|^2$ (válida em espaços de Hilbert), sendo

$$\begin{aligned} \|v_{ij}\|^2 &= \int_{I_j} (Q_i \circ \lambda_j)^2 \chi_{I_j}^2 dy \\ &= \int_{I_j} Q_i \left(\frac{x - x_j}{\Delta x/2} \right)^2 dx = \int_{-1}^1 Q_i(s)^2 \frac{\Delta x}{2} ds \\ &= \frac{\Delta x}{2i+1}, \end{aligned}$$

pois $\int_{-1}^1 Q_i(s)^2 ds = \|Q_i\|_{L^2((-1,1))}^2 = \frac{2}{2i+1}$ (propriedade i) da Seção 3.1.2). Assim, obtemos as seguintes igualdades para $x \in J = I_j \cup I_{j+1}$, onde $j \in$

$\{1, \dots, N\}$ fixado:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}u(x) &= \sum_{i=0}^k \frac{(u, v_{ij})}{\Delta x / (2i+1)} v_{ij}(x) \\
&\quad + \sum_{i=0}^k \frac{(u, v_{i,j+1})}{\Delta x / (2i+1)} v_{i,j+1}(x) \\
&= \sum_{i=0}^k \frac{2i+1}{\Delta x} \int_{I_j} u(y) Q_i(\lambda_j(y)) dy Q_i(\lambda_j(x)) \chi_{I_j}(x) \\
&\quad + \sum_{i=0}^k \frac{2i+1}{\Delta x} \int_{I_{j+1}} u(y) (Q_i(\lambda_{j+1}(y))) dy Q_i(\lambda_{j+1}(x)) \chi_{I_{j+1}}(x) \\
&= \sum_{i=0}^k \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^1 u(x_j + \frac{\Delta x}{2}s) Q_i(s) ds Q_i(\lambda_j(x)) \chi_{I_j}(x) \\
&\quad + \sum_{i=0}^k \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^1 u(x_{j+1} + \frac{\Delta x}{2}s) Q_i(s) ds Q_i(\lambda_{j+1}(x)) \chi_{I_{j+1}}(x) \\
&= \sum_{i=0}^k \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^1 ((x_j + \frac{\Delta x}{2}s - \alpha) / \frac{\Delta x}{2})^{k+1} Q_i(s) ds Q_i(\frac{x - x_j}{\Delta x/2}) \\
&\quad \chi_{I_j}(x) \\
&\quad + \sum_{i=0}^k \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^1 ((x_{j+1} + \frac{\Delta x}{2}s - \alpha) / \frac{\Delta x}{2})^{k+1} Q_i(s) ds \\
&\quad Q_i(\frac{x - x_{j+1}}{\Delta x/2}) \chi_{I_{j+1}}(x) \\
&= \sum_{i=0}^k \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^1 (s-1)^{k+1} Q_i(s) ds Q_i(\frac{x - x_j}{\Delta x/2}) \chi_{I_j}(x) \\
&\quad + \sum_{i=0}^k \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^1 (s+1)^{k+1} Q_i(s) ds Q_i(\frac{x - x_{j+1}}{\Delta x/2}) \chi_{I_{j+1}}(x).
\end{aligned}$$

Daí segue-se que

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}u_{j+1/2}^+ &\equiv \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \mathbf{P}u(x) \\
&= \sum_{i=0}^k \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^1 (s+1)^{k+1} Q_i(s) ds (-1)^i,
\end{aligned}$$

e

$$\mathbf{P}u_{j+1/2}^- \equiv \lim_{x \rightarrow \alpha^-} \mathbf{P}u(x) = \sum_{i=0}^k \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^1 (s-1)^{k+1} Q_i(s) ds,$$

lembrando que $Q_i(\pm 1) = (-1)^i$ (propriedade ii) da Seção 3.1.2), logo,

$$\begin{aligned}
(\overline{\mathbf{P}u})_j &\equiv (\overline{\mathbf{P}u})_{j+1/2} = \frac{(\mathbf{P}u)_{j+1/2}^+ + (\mathbf{P}u)_{j+1/2}^-}{2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^k (-1)^i \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^1 (s+1)^{k+1} Q_i(s) ds \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^k \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^1 (s-1)^{k+1} Q_i(s) ds \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^k \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^1 Q_i(s) \{ (s-1)^{k+1} + (s+1)^{k+1} (-1)^i \} ds \\
&= \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i \leq k} \sum_{0 \leq j \leq k+1} \binom{k+1}{j} \int_{-1}^1 Q_i(s) s^j \{ (-1)^{k+1-j} + (-1)^i \} ds \\
&= \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i \leq k} \sum_{0 \leq j \leq k+1} \binom{k+1}{j} \{ (-1)^{1-j} + (-1)^i \} \int_{-1}^1 Q_i(s) s^j ds,
\end{aligned}$$

onde para a última igualdade usamos que k é par. Agora,

$$\{ (-1)^{1-j} + (-1)^i \} \neq 0$$

somente quando $|1-j+i|$ é par, i.e. $|j-i|$ ímpar, e neste caso temos que

$$\int_{-1}^1 Q_i(s) s^i ds = 0,$$

pela propriedade iii) da Seção 3.1.2, logo, $(\overline{\mathbf{P}u})_j = 0$, e portanto, $(\overline{\mathbf{P}u})_j = (\overline{\mathbf{P}_h u})_j - (\overline{u})_j = 0$, onde usamos que $(\overline{u})_j = u_{k+1}(\alpha) = 0$. Isto completa a demonstração. ■

Lema 3.3.3 *Para partições uniformes, temos que*

$$|[\mathbf{P}(\mathbf{z})]_j| \leq c_k (\Delta x)^{-1/2} \|\mathbf{P}\mathbf{z}\|_{L^2(J)},$$

para todo $\mathbf{z} \in L^2((0, 1))$, onde $J = I_j \cup I_{j+1}$, $j \in \{1, \dots, N\}$ qualquer.

Demonstração: Escrevamos $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} x_{j+1/2}$ e $q = \mathbf{P}(\mathbf{z})$. Como $q \in V_h^k$, existem $q_1, q_2 \in \mathcal{P}^k$ tais que $q|_{I_j} = q_1$ e $q|_{I_{j+1}} = q_2$, logo, $q(\alpha^-) = q_1(\alpha)$ e $q(\alpha^+) = q_2(\alpha)$. Por 1.33, temos

$$q_1(\alpha)^2 \leq c |I_j|^{-1} \|q_1\|_{L^2(I_j)}^2, \quad \text{e} \quad q_2(\alpha)^2 \leq c |I_{j+1}|^{-1} \|q_2\|_{L^2(I_{j+1})}^2.$$

Como a partição é uniforme ($|I_j| = \Delta x, \forall j = 1, \dots, N$) daí segue-se que

$$\begin{aligned} ||q_j||^2 &= |q_2(\alpha) - q_1(\alpha)|^2 \leq 2(|q_2(\alpha)|^2 + |q_1(\alpha)|^2) \\ &\leq 2c(\Delta x)^{-1} \left(\int_{I_j} q_1(x)^2 dx + \int_{I_{j+1}} q_2(x)^2 dx \right) \\ &= 2c(\Delta x)^{-1} \int_j q(x)^2 dx. \end{aligned}$$

Portanto

$$||q_j|| \leq c_k(\Delta x)^{-1/2} ||q||_{L^2(J)}. \blacksquare$$

Lema 3.3.4 *Se $f(u) = cu$, $a(u) = au$, $\partial_2 \hat{f}(u, u) \neq \frac{c}{2}$ e $\mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{w}) - \mathbf{w}$, então*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_h(\mathbf{p}, \mathbf{P}(\mathbf{e})) &\leq \frac{1}{2} \Theta_{T, \mathbf{C}}(|\mathbf{P}(\mathbf{e})|) + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 |\mathbf{P}(\mathbf{e}_q(t))(x)|^2 dx dt \\ &\quad + (\Delta x)^{2k} \int_0^T C_1(t) dt \\ &\quad + (\Delta x)^k \int_0^T C_2(t) \left\{ \int_0^1 |\mathbf{P}(\mathbf{e}_u(t))(x)|^2 dx \right\}^{1/2} dt, \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_h(\mathbf{p}, \mathbf{P}(\mathbf{e})) &\leq \frac{1}{2} \Theta_{T, \mathbf{C}}(|\mathbf{P}(\mathbf{e})|) + ||\mathbf{P}(\mathbf{e}_q)||_{L^2((0,T) \times (0,1))}^2 \\ &\quad + (\Delta x)^{2k} \int_0^T C_1(t) dt + (\Delta x)^k \int_0^T C_2(t) ||\mathbf{P}(\mathbf{e}_u)||_{L^2((0,1))} dt, \end{aligned}$$

onde

$$C_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} c_k \left\{ \left(\frac{(|c| + c_{11})^2}{c_{11}} \right) |_{\infty} \Delta x + |c_{12}|_{\infty}^2 c_k \right\} |u(t)|_{k+1}^2 + ac_k (\Delta x)^{2(\hat{k}-k)} |u(t)|_{\hat{k}+1}^2$$

e

$$C_2(t) \stackrel{\text{def}}{=} c_k \{ \sqrt{a} |c_{12}|_{\infty} |u(t)|_{k+1} + a (\Delta x)^{\hat{k}-k} |u(t)|_{\hat{k}+2} \},$$

sendo $\left(\frac{(|c| + c_{11})^2}{c_{11}} \right) |_{\infty} \stackrel{\text{def}}{=}} \sup_j \frac{(|c| + c_{11}^j)^2}{|c_{11}^j|}$, $|c_{12}|_{\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_j |c_{12}^j|$ (c_{12} é uma função limitada, por hipótese), $\hat{k} \stackrel{\text{def}}{=} k$ exceto quando a partição é uniforme e k é par; neste caso, $\hat{k} \stackrel{\text{def}}{=} k + 1$.

Observação 3.3.5 Usando a Observação 4 da Seção 3.1 é possível mostrar que $\left(\frac{(|c| + c_{11})^2}{c_{11}} \right) |_{\infty}$ é de fato uma quantidade finita.

Demonstração do Lema 3.3.4: Para simplificar a notação vamos tomar $\mathbf{v}_h \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}(e)$. Pela definição de $\mathcal{B}_h(\cdot, \cdot)$, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_h(\mathbf{p}, \mathbf{v}_h) &= \int_0^T \int_0^1 \partial_t \mathbf{p}_u(x, t) \mathbf{v}_{h,u}(x, t) dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^1 \mathbf{p}_q(x, t) \mathbf{v}_{h,q}(x, t) dx dt \\ &\quad - \int_0^T \sum_{1 \leq j \leq N} \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{p})_{j+1/2} \cdot (t) [\mathbf{v}_h(t)]_{j+1/2} dt \\ &\quad - \int_0^T \sum_{1 \leq j \leq N} \int_{I_j} \mathbf{h}(\mathbf{p}(x, t)) \cdot \partial_x \mathbf{v}_h(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Pela caracterização da projeção em L^2 3.5 e usando que $\partial_t \mathbf{p}_u = \mathbf{P}(\partial_t u) - \partial_t u$, temos

$$\int_0^T \int_0^1 \partial_t \mathbf{p}_u(x, t) \mathbf{v}_{h,u}(x, t) dx dt = 0$$

e

$$\int_0^T \int_0^1 \mathbf{p}_q(x, t) \mathbf{v}_{h,q}(x, t) dx dt = 0.$$

Temos também que

$$\int_0^T \sum_{1 \leq j \leq N} \int_{I_j} \mathbf{h}(\mathbf{p}(x, t)) \cdot \partial_x \mathbf{v}_h(x, t) dx dt = 0;$$

de fato, como estamos no caso linear,

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{p}(x, t)) \cdot \partial_x \mathbf{v}_h(x, t) &= (f(\mathbf{p}_u) - \sqrt{a(\mathbf{p}_u)} \mathbf{p}_q, -g(\mathbf{p}_u)) \cdot \partial_x \mathbf{v}_h(x, t) \\ &= (c \mathbf{p}_u - \sqrt{a} \mathbf{p}_q) \partial_x \mathbf{v}_{h,u}(x, t) - \sqrt{a} \mathbf{p}_u \partial_x \mathbf{v}_{h,q}(x, t) \end{aligned}$$

e $\mathbf{p}_u = \mathbf{P}_h u - u$ e $\mathbf{p}_q = \mathbf{P}_h q - q$ são ortogonais a $\mathbf{v}_{h,u}$ e $\mathbf{v}_{h,q}$, respectivamente. Portanto,

$$\mathcal{B}_h(\mathbf{p}, \mathbf{v}_h) = - \int_0^T \sum_{1 \leq j \leq N} \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{p})_{j+1/2} \cdot (t) \cdot [\mathbf{v}_h(t)]_{j+1/2} dt.$$

A seguir vamos estimar o integrando acima. Em primeiro lugar, observamos que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{p})_{j+1/2}(t) \cdot [\mathbf{v}_h(t)] &= (c \overline{\mathbf{p}_u} - c_{11}^j[\mathbf{p}_u]) [\mathbf{v}_{h,u}] \\ &\quad + (-\sqrt{a} \overline{\mathbf{p}_q} - c_{12}^j[\mathbf{p}_q]) [\mathbf{v}_{h,u}] \\ &\quad + (-\sqrt{a} \overline{\mathbf{p}_u} + c_{12}^j[\mathbf{p}_u]) [\mathbf{v}_{h,q}] \\ &\equiv \theta_1 + \theta_2 + \theta_3, \end{aligned}$$

onde $[\cdot] \equiv [\cdot]_j \equiv [\cdot]_{j+1/2}$ e θ_i , $i = 1, \dots, 3$ estão definidos de modo claro, os quais serão estimados abaixo. A igualdade acima vem da forma de $\hat{\mathbf{h}}$ no caso linear. De fato, $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{p})_{j+1/2} \equiv (\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{p}_u}, \hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{p}_q})$, onde

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{p}_u} &= \frac{[\phi(\mathbf{p}_u)]}{[\mathbf{p}_u]} - \frac{[g(\mathbf{p}_u)]}{[\mathbf{p}_u]} \overline{\mathbf{p}_q} - c_{11}^j[\mathbf{p}_u] - c_{12}^j[\mathbf{p}_q] \\ &= c\overline{\mathbf{p}_u} - \sqrt{a}\overline{\mathbf{p}_q} - c_{11}^j[\mathbf{p}_u] - c_{12}^j[\mathbf{p}_q]\end{aligned}$$

e

$$\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{p}_q} = -\overline{g(\mathbf{p}_u)} + c_{12}^j[\mathbf{p}_u] = \sqrt{a}\overline{\mathbf{p}_u} + c_{12}^j[\mathbf{p}_u].$$

• **Estimativa de θ_1 :** Pelo Lema 3.3.2, $|c\overline{\mathbf{p}_u}| \leq c_k(\Delta x)^{k+1/2}|u|_{H^{k+1}(J)}$ e $|c_{11}^j[\mathbf{p}_u]| \leq |c_{11}^j|c_k(\Delta x)^{(k+1/2)}|u|_{H^{k+1}(J)}$, logo,

$$|\theta_1| \leq c_k(\Delta x)^{(k+1/2)}|u|_{H^{k+1}(J)}.$$

• **Estimativa de θ_2 :** Pelos Lemas 3.3.2 e 3.3.3,

$$\begin{aligned}|\theta_2| &\leq (\sqrt{a}|\overline{\mathbf{p}_q}| + |c_{12}^j| |[\mathbf{p}_q]|) |[\mathbf{v}_u]| \\ &\leq (\sqrt{a}c_k\sqrt{a}(\Delta x)^{(k+1/2)}|u|_{H^{k+1/2}(J)} \\ &\quad + |c_{12}^j|\sqrt{a}(\Delta x)^{(k+1/2)}|u|_{H^{k+2}(J)} |[\mathbf{v}_u]|) \\ &\leq (\sqrt{a}c_k\sqrt{a}(\Delta x)^{(k+1/2)}|u|_{H^{k+1/2}(J)} \\ &\quad + |c_{12}^j|\sqrt{a}(\Delta x)^{(k+1/2)}|u|_{H^{k+2}(J)}^2 c_k(\Delta x)^{(-1/2)} \|[\mathbf{v}_u]\|_{L^2(J)}) \\ &\leq c_k(\Delta x)^{(k)}(a|u|_{H^{k+2}(J)}(\Delta x)^{(k-k)} \\ &\quad + \sqrt{a}|c_{12}^j||u|_{H^{k+2}(J)}) \|[\mathbf{v}_u]\|_{L^2(J)}.\end{aligned}$$

• **Estimativa de θ_3 :** Novamente pelos Lemas 3.3.2 e 3.3.3, temos

$$\begin{aligned}|\theta_3| &\leq (\sqrt{a}c_k(\Delta x)^{(k+1/2)}|u|_{H^{k+1}(J)} + |c_{12}^j|c_k(\Delta x)^{(k+1/2)}) \|[\mathbf{v}_u]\| \\ &\leq c_k(\Delta x)^{(k)}(\sqrt{a}(\Delta x)^{(k-k)}|u|_{H^{k+1}(J)} + |c_{12}^j| \|[\mathbf{v}_q]\|_{L^2(J)}).\end{aligned}$$

Como $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{p})_{j+1/2} \cdot (t)[\mathbf{v}_h(t)]_j \equiv \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$, pelas estimativas acima, vem que

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{p})_{j+1/2} \cdot (t) \cdot [\mathbf{v}_h(t)]_j &\leq c_k(\Delta x)^{(k+1/2)}|u|_{H^{k+1}(J)} \\ &\quad + c_k(\Delta x)^{(k)}(a|u|_{H^{k+2}(J)}(\Delta x)^{(k-k)} \\ &\quad + \sqrt{a}|c_{12}^j||u|_{H^{k+2}(J)}) \|[\mathbf{v}_u]\|_{L^2(J)} \\ &\quad + c_k(\Delta x)^{(k)}(\sqrt{a}(\Delta x)^{(k-k)}|u|_{H^{k+1}(J)} \\ &\quad + |c_{12}^j| \|[\mathbf{v}_q]\|_{L^2(J)}).\end{aligned}$$

Para simplificar, vamos observar que

$$\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{p})_{j+1/2} \cdot (t) \cdot [\mathbf{v}_h(t)]_j \leq \frac{1}{2}c_{11}^j[\mathbf{v}_u]^2 + \frac{1}{4}\|\mathbf{v}_q\|_{L^2(J)}^2 + \frac{1}{2}c_1^j(t)(\Delta x)^{(2k)} + \frac{1}{2}c_2^j(t)(\Delta x)^{(k)}\|\mathbf{v}_u\|_{L^2(J)},$$

onde

$$c_1^j(t) \stackrel{\text{def}}{=} c_k \left\{ \left(\frac{|c|+c_{11}^j}{c_{11}^j} \Delta x + |c_{12}^j|^2 c_k \right) |u(t)|_{H^{k+1}(J)}^2 + a c_k (\Delta x)^{2(\hat{k}-k)} |u(t)|_{H^{k+1}(J)}^2 \right\}$$

e

$$c_2^j(t) \stackrel{\text{def}}{=} c_k \left\{ \sqrt{a} |c_{12}^j| |u(t)|_{H^{k+1}(J)} + a (\Delta x)^{\hat{k}-k} |u(t)|_{H^{k+2}(J)} \right\}.$$

(Observemos que C_i^j é C_i , definido no Lema 3.3.4, $i = 1, 2$, localizado em $x_{j+1/2}$.) De fato, usando a desigualdade de Cauchy com ϵ em θ_1 e θ_3 , temos que

$$|\theta_1| \leq c_k (\Delta x)^{(k+1/2)} |u|_{H^{k+1}(J)} \frac{(|c|+c_{11}^j)}{\sqrt{c_{11}^j}} \sqrt{c_{11}^j} \|\mathbf{v}_u\| + \frac{1}{2}c_k^2 (\Delta x)^{(2k+1)} |u|_{H^{k+1}(J)}^2 \frac{|c|+c_{11}^j}{c_{11}^j} + \frac{1}{2}c_{11}^j [\mathbf{v}_u]^2$$

e

$$|\theta_3| \leq c_k^2 (\Delta x)^{(2k)} (a (\Delta x)^{(2(\hat{k}-k))}) |u|_{H^{\hat{k}}(J)}^2 + 2\sqrt{a} (\Delta x)^{(\hat{k}-k)} |u|_{H^{k+1}(J)} |c_{12}^j| |u|_{H^{k+1}(J)} + |c_{12}^j|^2 |u|_{H^{k+1}(J)}^2 + \frac{1}{4}\|\mathbf{v}_q\|_{L^2(J)}^2.$$

Logo,

$$\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{p})_{j+1/2} \cdot (t) \cdot [\mathbf{v}_h(t)]_j \leq \frac{1}{2}c_{11}^j[\mathbf{v}_u]_j^2 + \frac{1}{4}\|\mathbf{v}_q\|_{L^2(J)}^2 + \frac{1}{2}c_1^j(t)(\Delta x)^{(2k)} + \frac{1}{2}c_2^j(t)(\Delta x)^{(k)}\|\mathbf{v}_u\|_{L^2(J)}^2.$$

Daf, como

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_h(\mathbf{p}, \mathbf{v}_h) &= - \int_0^T \sum_{1 \leq j \leq N} \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{p})_{j+1/2} \cdot (t) \cdot [\mathbf{v}_h(t)]_j dt \\ &\leq \int_0^T |\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{p})_{j+1/2} \cdot (t) \cdot [\mathbf{v}_h(t)]_j| dt, \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_h(\mathbf{p}, \mathbf{P}(\mathbf{e})) &\leq \int_0^T \sum_{1 \leq j \leq N} \left[\frac{1}{2} c_{11}^j [\mathbf{P}(\mathbf{e}_u)]^2 + \frac{1}{4} \|\mathbf{P}(\mathbf{e}_q)\|_{L^2(J)}^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} C_1^j(t) (\Delta x)^{(2k)} + \frac{1}{2} C_2^j(t) (\Delta x)^{(k)} \|\mathbf{P}(\mathbf{e}_u)\|_{L^2(J)} \right] dt \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{1 \leq j \leq N} c_{11}^j [\mathbf{P}(\mathbf{e}_u)]^2 dt \\
 &\quad + \frac{1}{4} \int_0^T \sum_{1 \leq j \leq N} \|\mathbf{P}(\mathbf{e}_q)\|_{L^2(J)}^2 dt \\
 &\quad + \frac{1}{2} (\Delta x)^{(2k)} \int_0^T \sum_{1 \leq j \leq N} C_1^j(t) dt \\
 &\quad + \frac{1}{2} (\Delta x)^{(k)} \int_0^T \sum_{1 \leq j \leq N} C_2^j(t) \|\mathbf{P}(\mathbf{e}_u)\|_{L^2(J)} dt.
 \end{aligned}$$

Agora basta usar que $J = I_j \cup I_{j+1}$ e aplicar a desigualdade de Cauchy-Schwarz de forma adequada no \mathbf{R}^N para concluir a demonstração. ■

Finalmente estamos preparados para a demonstração do Teorema 3.3.1 da estimativa do erro cometido na aproximação de \mathbf{w} por \mathbf{w}_h , no caso linear.

Demonstração do Teorema 3.3.1:

(i) **Caso contínuo/Motivação** : Primeiramente vamos estimar o erro entre duas soluções suaves $\mathbf{w}_i = (u_i, q_i)$, $i = 1, 2$, do seguinte problema de valor inicial para o sistema em 3.2:

$$\begin{cases} \partial_t u_i + \partial_x (f(u_i) - \sqrt{a(u_i)} q_i) = 0 \\ q_i - \partial_x g(u_i) = 0 \\ u_i(t=0) = u_{0,i}. \end{cases}$$

Pela definição da forma $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$ dada em 3.9, temos $\mathcal{B}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0$ para toda \mathbf{v} suave. Como estamos no caso linear, \mathcal{B} é bilinear, logo, obtemos a *equação do erro*

$$\mathcal{B}(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = 0$$

para $\mathbf{e} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$ e para toda \mathbf{v} suave. Daí e de 3.10, obtemos imediatamente que

$$0 = \frac{1}{2} \int_0^1 \mathbf{e}_u(x, T)^2 dx + \int_0^T \int_0^1 \mathbf{e}_q(x, t)^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_0^1 \mathbf{e}_u(x, 0)^2 dx,$$

logo, concluímos a seguinte igualdade:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \mathbf{e}_u(x, T)^2 dx + \int_0^T \int_0^1 \mathbf{e}_q(x, t)^2 dx dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (u_{0,1}(x) - u_2(x))^2 dx,$$

onde usamos que $\mathbf{e}_u(x, 0) = u_{0,1}(x) - u_{0,2}(x)$.

Agora observamos que o ponto crucial no argumento acima foi que pudemos tomar $\mathbf{v} = \mathbf{e}$ na equação do erro. Este passo não será possível no caso discreto abaixo (demonstração do Teorema 3.3.1), pois o erro e da aproximação \mathbf{w}_h não pertencerá ao espaço das funções testes. A idéia da demons-

tração do teorema que se segue tem como inspiração o argumento acima, contornando delicadamente esta dificuldade com boas estimativas.

(ii) Caso discreto (Demonstração do teorema): Como $\mathcal{B}_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) = 0$ e $\mathcal{B}_h(\mathbf{w}, \mathbf{v}_h) = 0$ para toda $\mathbf{v}_h \equiv \mathbf{v}_h(t) \in V_h^k \times V_h^k$ e para todo $t \in (0, T)$, e como estamos no caso linear (logo \mathcal{B} é bilinear) segue-se a equação do erro:

$$\mathcal{B}_h(\mathbf{e}, \mathbf{v}_h) = 0$$

para toda $\mathbf{v}_h \equiv \mathbf{v}_h(t) \in V_h^k \times V_h^k$, para todo $t \in (0, T)$. Aqui começa a diferença do caso contínuo: Não podemos tomar $\mathbf{v}_h = \mathbf{e}$ na equação do erro acima, pois $\mathbf{e} = \mathbf{w} - \mathbf{w}_h$ não pertence ao espaço das funções testes V_h^k (visto que \mathbf{w} não é uma função polinomial por partes). A solução é trabalhar com a projeção (ortogonal) do L^2 de \mathbf{e} em V_h^k . Tomemos então $\mathbf{v}_h = \mathbf{P}(\mathbf{e})$, onde \mathbf{P} é a projeção do $L^2(0, 1)$ em V_h^k . Lembremos que, pela definição de projeção ortogonal em espaços de Hilbert, a nossa projeção \mathbf{P} fica caracterizada por

$$\int_0^1 (\mathbf{P}(\phi)(x) - \phi(x))v(x)dx = 0, \quad \forall \phi \in L^2(0, 1), \quad \forall v \in V_h^k, \quad (3.14)$$

i.e. dada $\phi \in L^2(0, 1)$, $\mathbf{P}(\phi)$ é o único elemento em V_h^k que satisfaz esta equação para todo elemento $v \in V_h^k$, cf. a Observação 4 na Seção 3.1.3. Além disso, para $\phi \in V_h^k \times V_h^k$, temos $\mathbf{P}(\phi) = (\mathbf{P}(\phi_u), \mathbf{P}(\phi_q))$. Notemos que

$$\mathbf{e} - \mathbf{P}(\mathbf{e}) = \mathbf{w} - \mathbf{P}(\mathbf{w}).$$

De fato, \mathbf{P} é um operador linear, e $\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{w} - \mathbf{w}_h$ e $\mathbf{w}_h \in V_h^k$. Notemos também que

$$u_h(t=0) = \mathbf{P}(u_0),$$

pois de $\hat{\text{III}}$) e de 3.14 temos

$$\int_{I_j} (u_h(x, 0) - u_0(x))v_{h,j}(x)dx = 0, \quad \forall v_{h,j} \in \mathcal{P}^k(I_j),$$

logo,

$$\int_0^1 (u_h(x, 0) - u_0(x))v(x)dx = 0, \quad \forall v \in V_h^k,$$

cf. o final da demonstracao do Teorema 3.2.1. Pelo Lema 3.2.3 temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_h(\mathbf{P}(\mathbf{e}), \mathbf{P}(\mathbf{e})) &= \frac{1}{2} \int_0^1 |\mathbf{P}(\mathbf{e}_u(T))(x)|^2 dx + \int_0^T \int_0^1 |\mathbf{P}(\mathbf{e}_q(t))(x)|^2 \\ &\quad + \Theta_{\mathcal{T}, \mathbf{C}}([\mathbf{P}(\mathbf{e})]) - \frac{1}{2} \int_0^1 |\mathbf{P}(\mathbf{e}_u(0))(x)|^2 dx \\ &\equiv \frac{1}{2} \|\mathbf{P}(\mathbf{e}_u(T))\|_{L^2((0,1))}^2 + \|\mathbf{P}(\mathbf{e}_q)\|_{L^2((0,1) \times (0,T))}^2 \\ &\quad + \Theta_{\mathcal{T}, \mathbf{C}}([\mathbf{P}(\mathbf{e})]) - \frac{1}{2} \|\mathbf{P}(\mathbf{e}_u(0))\|_{L^2((0,1))}; \end{aligned}$$

daí, como $\mathbf{P}(\mathbf{e}_u(0)) = \mathbf{P}(u_0 - u_h(0)) = \mathbf{P}(u_0) - u_h(0) = 0$ e

$$\mathcal{B}_h(\mathbf{P}(\mathbf{e}), \mathbf{P}(\mathbf{e})) = \mathcal{B}_h(\mathbf{P}(\mathbf{e}) - \mathbf{e}, \mathbf{P}(\mathbf{e})) = \mathcal{B}_h(\mathbf{P}(\mathbf{w}) - \mathbf{w}, \mathbf{P}(\mathbf{e}))$$

(aqui usamos a bilinearidade de \mathcal{B}_h , visto que estamos no caso linear, a equação do erro e a definição de \mathbf{e}) vem que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \|\mathbf{P}(\mathbf{e}_u(T))\|_{L^2((0,1))}^2 + \|\mathbf{P}(\mathbf{e}_q)\|_{L^2((0,1) \times (0,T))}^2 + \Theta_{\mathcal{T}, \mathbf{C}}([\mathbf{P}(\mathbf{e})]) \\ &= \mathcal{B}_h(\mathbf{P}(\mathbf{w}) - \mathbf{w}, \mathbf{P}(\mathbf{e})). \end{aligned} \quad (3.15)$$

No caso contínuo, o lado direito desta equação é nulo; aqui, temos a seguinte estimativa pelo Lema 3.3.4

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_h(\mathbf{P}(\mathbf{w}) - \mathbf{w}, \mathbf{P}(\mathbf{e})) &\leq \frac{1}{2} \Theta_{\mathcal{T}, \mathbf{C}}([\mathbf{P}(\mathbf{e})]) + \frac{1}{2} \|\mathbf{P}(\mathbf{e}_q)\|_{L^2((0,1) \times (0,T))}^2 \\ &\quad + (\Delta x)^{2k} \int_0^T \mathcal{C}_1(t) dt + (\Delta x)^k \int_0^T \mathcal{C}_2(t) \|\mathbf{P}(\mathbf{e}_u)\|_{L^2((0,1))} dt \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 estão definidos no Lema 3.3.4. Combinando 3.15 e 3.16 temos

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{P}(\mathbf{e}_u(T))\|_{L^2((0,1))}^2 + \|\mathbf{P}(\mathbf{e}_q)\|_{L^2((0,1) \times (0,T))}^2 + \Theta_{\mathcal{T}, \mathbf{C}}([\mathbf{P}(\mathbf{e})]) \\ &\leq 2(\Delta x)^{2k} \int_0^T \mathcal{C}_1(t) dt + 2(\Delta x)^k \int_0^T \mathcal{C}_2(t) \|\mathbf{P}(\mathbf{e}_u)\|_{L^2((0,1))} dt \end{aligned} \quad (3.17)$$

Como todos os termos são não negativos, temos em particular que

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |\mathbf{P}(\mathbf{e}_u(T))(x)|^2 dx \\ & \leq 2(\Delta x)^{2k} \int_0^T C_1(t) dt + 2(\Delta x)^k \int_0^T C_2(t) \|\mathbf{P}(\mathbf{e}_u)\|_{L^2((0,1))} dt; \end{aligned}$$

$T > 0$ é arbitrário, logo, escrevendo $K_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{T_0} C_1(t) dt$, $T_0 > 0$, e aplicando a desigualdade de Cauchy com $2ab \leq a^2 + b^2$, $a, b \geq 0$, segue-se que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|\mathbf{P}(\mathbf{e}_u(t))(x)\|_{L^2((0,1))}^2 \\ & \leq 2(\Delta x)^{2k} K_1 + \int_0^T T_0 C_2(t)^2 dt + \Delta x^{2k} \int_0^T \|\mathbf{P}(\mathbf{e}_u(t))(x)\|_{L^2((0,1))}^2, \end{aligned}$$

para todo $T \in (0, T_0)$; tomando $K_0 \stackrel{\text{def}}{=} 2(\Delta x)^{2k} K_1 + \int_0^{T_0} C_2(t)^2 dt$ e usando a desigualdade de Gronwall (v. [9]) obtemos

$$\|\mathbf{P}(\mathbf{e}_u(T))\|_{L^2((0,1))} \leq (\Delta x)^{2k} (1 + K_0 T_0 e^{K_0 T_0}) \equiv (\Delta x)^{2k} C,$$

para todo $T \in (0, T_0)$ (como $T_0 > 0$ é arbitrário, esta desigualdade vale para todo $T > 0$). Substituindo esta desigualdade em 3.17, concluímos que

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{P}(\mathbf{e}_u(T))\|_{L^2((0,1))}^2 + \|\mathbf{P}(\mathbf{e}_q)\|_{L^2((0,1) \times (0,T))}^2 + \Theta_{T,\mathbf{C}}(\{\mathbf{P}\})(\mathbf{e}) \\ & \leq 2(\Delta x)^{2k} K_1 + 2(\Delta x)^{2k} \int_0^{T_0} C_2(t) dt \\ & \equiv C(\Delta x)^{2k}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Agora resta mostrar que

$$\|\mathbf{e}_u(T)\|_{L^2((0,1))}^2 + \|\mathbf{e}_q\|_{L^2((0,T) \times (0,1))} + \Theta_{T,\mathbf{C}}(\{\mathbf{e}\}) \leq C(\Delta x)^{2k},$$

que é a desigualdade 3.18 acima sem a projeção \mathbf{P} .

Do Teorema de Pitágoras em espaços de Hilbert, da desigualdade 3.18 e do resultado 1.8 temos que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_u\|_{L^2((0,1))}^2 & = \|\mathbf{e}_u(T) - \mathbf{P}(\mathbf{e}_u(T))\|_{L^2((0,1))}^2 + \|\mathbf{P}(\mathbf{e}_u(T))\|_{L^2((0,1))}^2 \\ & \leq c_k (\Delta x)^{2(k+1)} |u|_{(k+1)}^2 + C(\Delta x)^{2k}, \end{aligned}$$

onde usamos também que $\mathbf{e}_u - \mathbf{P}(\mathbf{e}_u) = u - \mathbf{P}(u) = \mathbf{p}_u$. Então

$$\|\mathbf{e}_u(T)\|_{L^2((0,1))} \leq C(\Delta x)^{2k},$$

visto que $\Delta x \leq 1$. Analogamente, temos

$$\|\mathbf{e}_q(t)\|_{L^2((0,1))}^2 \leq c_k(\Delta x)^{2(k+1)} |u|_{(k+1)}^2 + \|\mathcal{P}\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbf{e}_\Pi(L))}(t, \infty),$$

logo, integrando em t , vem que

$$\|\mathbf{e}_q\|_{L^2((0,T) \times (0,1))}^2 \leq \mathcal{C}(\Delta x)^{2k}.$$

Agora vamos estimar o termo correspondente à matriz C :

$$\begin{aligned} \Theta_{\tau, \mathbf{C}}(\mathbf{e}) &= \int_0^T \sum_{1 \leq j \leq N} c_{11}^j [\mathbf{e}_u]_{j+1/2}^2 dt \\ &= \int_0^T \sum_{1 \leq j \leq N} c_{11}^j \{[\mathbf{e}_u - \mathbf{P}(\mathbf{e}_u)] + [\mathbf{P}(\mathbf{e}_u)]\}^2 dt \\ &\leq \int_0^T \sum_{1 \leq j \leq N} c_{11}^j 2\{[\mathbf{e}_u - \mathbf{P}(\mathbf{e}_u)]^2 + [\mathbf{P}(\mathbf{e}_u)]^2\} dt \\ &\leq 2\Theta_{\tau, \mathbf{C}}([\mathbf{P}(\mathbf{e})]) + 2|c_{11}|_\infty \int_0^T \sum_{1 \leq j \leq N} [\mathbf{e}_u - \mathbf{P}(\mathbf{e}_u)]^2 dt \\ &\leq \mathcal{C}(\Delta x)^{2k} + 2c_k(\Delta x)^{2k+1} \int_0^T \sum_{1 \leq j \leq N} |u(t)|_{H^{(k+1)}(I_j \cup I_{j+1})}^2 dt \\ &\leq \mathcal{C}(\Delta x)^{2k} + 4c_k(\Delta x)^{2k} \int_0^T |u(t)|_{H^{(k+1)}((0,1))}^2 dt \\ &\equiv \mathcal{C}(\Delta x)^{2k}, \end{aligned}$$

onde na penúltima desigualdade usamos 3.18 e o Lema 3.3.2. ■

BIBLIOGRAFIA

- [1] Adams, R.A., *Sobolev Spaces*, Academic Press (1975).
- [2] Becker, E.B., Carey, G.F. & Oden, J.T., *Finite Elements*, Prentice Hall (1981)
- [3] Bell, W.W., *Special Functions for Scientists and Engineers*, D. Van Nostrand Company LTD London, (1968).
- [4] Belman, R., *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, (1970).
- [5] Ciarlet, P., *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland (1975).
- [6] Cockburn, B., *The Local Discontinuous Galerkin Method for Time-Dependent Convection-Diffusion Systems*, (1997), preprint.
- [7] Cockburn, B. & Lin S.Y., *TVB Runge-Kutta Local Projection Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Conservation Laws II: General Framework*, *Math. Comp.*, **52** (1989) 411-435.
- [8] Cockburn, B. & Lin S.Y., *TVB Runge-Kutta Local Projection Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Conservation Laws III: One-Dimensional Systems*, *Journal of Computational Physics*, **84** (1989) 90-113.
- [9] Evans, L.C., *Partial Differential Equations*, Berkeley mathematics Lecture Notes volume 3A 1993.
- [10] Jamet, P., *Galerkin-Type Approximations which are Discontinuous in the time for parabolic Equations in a variable Domain*, *SIAM J. Numerical Analysis*, **15**(1978) 912-928. 259-288.

- [11] Johnson, C., *Numerical Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*, Cambridge Univ. Press (1994).
- [12] Lima, E.L., *Curso de Análise, v. 2*, 3a. ed., IMPA (Projeto Euclides) (1989).
- [13] Osher, S., *Riemann Solvers, The Entropy Condition, and Difference Aproximations*, SIAM J. Numerical Analysis, **21** (1984), 217-235.