



Universidade Estadual de Campinas  
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

---

# Equações estacionárias de Navier-Stokes aplicadas a um problema de microcanais

por

**Elder Jesús Villamizar Roa<sup>†</sup>**

Mestrado em Matemática - Campinas - SP


**Orientador: Prof. Dr. Marcelo M. Santos**

<sup>†</sup>Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

# Equações estacionárias de Navier-Stokes aplicadas a um problema de microcanais

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Elder Jesús Villamizar Roa** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 23 de agosto de 2002.

  
Prof. Dr. Marcelo M. dos Santos

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marcelo M. dos Santos.  
Prof. Dr. José Luiz Boldrini.  
Prof. Dr. José R. dos Santos Filho.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

00050063

UNIDADE 30  
Nº CHAMADA F/UNICAMP  
V712e  
V \_\_\_\_\_ EX \_\_\_\_\_  
TOMBO BCI 51310  
PROC 16.837102  
C \_\_\_\_\_ DX \_\_\_\_\_  
PREÇO R\$ 11,00  
DATA 24/10/02  
Nº CPD \_\_\_\_\_

CM00175705-7

BIB ID 266093

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Villamizar Roa, Elder Jesús

~~11/11/02~~  
V712e Equações estacionárias de Navier-Stokes aplicadas a um problema de microcanais / Elder Jesús Villamizar Roa -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2002.

Orientador : Marcelo Martins dos Santos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Escoamento. 2. Fluido viscoso. 3. Navier-Stokes, Equações de. I. Santos, Marcelo Martins. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

**Dissertação de Mestrado defendida em 23 de agosto de 2002 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

  
Prof (a). Dr (a). MARCELO MARTINS DOS SANTOS

  
Prof (a). Dr (a). JOSÉ RUIDIVAL SOARES DOS SANTOS FILHO

  
Prof (a). Dr (a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI

“Amamos uma coisa na  
medida em que ela  
nos custa”.

*Elder Villamizar*

Às pessoas que mais amo,  
meus pais Luis Antonio e Aminta  
e aos meus irmãos Nancy Smith  
e Luis Hernan.

# Agradecimentos

Ao término deste trabalho, deixo aqui meus sinceros agradecimentos:

A DEUS pela presença em todos os momentos de minha vida.

Ao professor **Marcelo Martins dos Santos** pela competência e dedicação na tarefa de me orientar.

Ao meu amigo e colega Fabio Vitoriano pelas boas discussões matemáticas.

À UNICAMP e à UIS, por me darem a oportunidade de estudar.

Aos professores Sonia Sabogal, Henry Lamos, Marlio Paredes e Bernardo Mayorga da Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga-Colômbia, pelo apoio incondicional que me deram ao longo destes últimos anos.

Aos alunos da Pós-Graduação do IMECC pelos prazerosos, agradáveis e inesquecíveis momentos de convívio durante esses anos, em especial a Silvia, Sofia, Tanha, Edson Licurgo, Marcos Vergès, Emerson, Zé Carlos.

A Cidinha, Tânia, e Ednaldo da secretaria da Pós Graduação, pela gentil ajuda na tramitação de documentos.

À Capes pelo auxílio financeiro.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

# Resumo

Consideramos  $m$  canais finitos com seções transversais constantes, com diâmetros dependendo de  $\epsilon$ . Tais canais são enchidos com fluido viscoso incompressível em estado estacionário. Nos extremos de cada cano, colocamos certos valores da pressão. Mostrada a existência e unicidade da solução, construímos uma solução aproximada de forma que nas saídas o fluxo é descrito como um fluxo de Poiseuille e numa vizinhança do cruzamento, o fluxo se comporta como uma solução reescalada do problema de Leray. Finalmente analisamos a convergência quando  $\epsilon$  tende a zero.

**Palavras-chave:** Escoamento, Fluido viscoso incompressível, Navier-Stokes, Fluxo de Poiseuille, Problema de Leray.



# Abstract

We consider  $m$  finite pipes with constant transversal section and  $\epsilon$  dependent diameter. These pipes will be filled with incompressible fluid in stationary regime. In the exterior extremes of each pipe, boundary pressure values are given. Besides the proof of existence and unicity of solution, we exhibit an approximated solution. This approximated solution behaves like a Poiseuille flow on the extremes of the pipes and a solution of a linear Leray problem elsewhere. Finally, we present the rate of convergence with  $\epsilon$  tending to zero.

**Keywords:** Incompressible fluid, Navier-Stokes, Poiseuille flow, Leray problem.

# Conteúdo

Introdução	1
<b>1 Espaços de funções</b>	<b>10</b>
1.1 Os espaços $L^q$	10
1.2 Os espaços de Sobolev $W^{m,q}$	12
1.2.1 Aspectos Básicos	12
1.2.2 Traço de funções nos espaços $W^{m,q}$	18
1.3 Os Espaços de Sobolev Homogêneos $D^{m,q}$	19
1.4 O Problema $\nabla \cdot \mathbf{v} = f$	20
1.5 Outros espaços de funções	30
<b>2 O Fluxo de Poiseuille e o Problema de Leray</b>	<b>36</b>
2.1 O Fluxo de Poiseuille	38
2.2 O problema de Leray	42
2.3 Comportamento Assintótico	49
<b>3 Resultados técnicos</b>	<b>60</b>
<b>4 Escoamento de fluido viscoso incompressível em canais estreitos</b>	<b>66</b>
4.1 Formulação Matemática do problema	67
4.1.1 Aspectos Geométricos	67
4.1.2 Formulação matemática	68
4.2 Existência da Solução	69
4.2.1 Existência da velocidade $\mathbf{v}^\epsilon$	69
4.2.2 Existência e unicidade da pressão $p^\epsilon$ .	74

4.3 Colagem . . . . .	77
4.4 Estimativa do erro . . . . .	81
<b>Bibliografia</b>	<b>90</b>

# Introdução

É cada vez maior o interesse na indústria atual, a pesquisa e aplicações de fluidos em equipamentos munidos de microcanais. Estes se inserem na área da Engenharia que está sendo conhecida pela sigla MEMS (“*Micro-Electro-Mechanical Systems*”); para uma explicação detalhada sobre o que é MEMS recomendamos o site [www.memsnet.org/mems/what-is](http://www.memsnet.org/mems/what-is). No Brasil temos pesquisa e construção de equipamentos com microcanais no LNLS-Laboratório Nacional de Luz Síncrotron; vide site: [www.lnls.br](http://www.lnls.br).<sup>‡</sup> Como um exemplo, entre outros, de aplicação na indústria de fluidos em microcanais, citamos a construção de um equipamento chamado “Calorímetro” onde podemos estudar o comportamento Físico-Químico de um ou mais fluidos, em condições de temperatura e pressão diferentes das condições ambientais [ZiKo].

De uma forma geral, fluidos em microcanais, são fluidos em domínios com canais estreitos, onde podemos ter um sistema complexo de conexões dos mesmos. Na engenharia clássica, também temos problemas de escoamentos de fluidos em canais estreitos, onde uma dimensão do canal é muito maior do que as demais, e.g. nos sistemas de abastecimento de água e sistema de esgoto de uma cidade. Em engenharia ambiental também poderíamos citar um problema de interesse atual, como o encontro de dois rios, sendo um deles poluído, e aí também o interesse em estudar o efeito da poluição após o encontro dos mesmos; certamente de menor interesse prático, mas que desperta curiosidade científica e poderia ser colocado no mesmo contexto, é o encontro dos rios Negro e Solimões na Amazônia. Vejamos as figuras abaixo.

---

<sup>‡</sup>Agradecemos aos Profs. Luiz Otávio e Isaque Alves pela visita ao LNLS

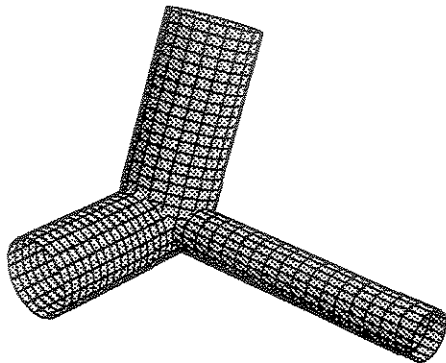


Figura 1: Junção de canos

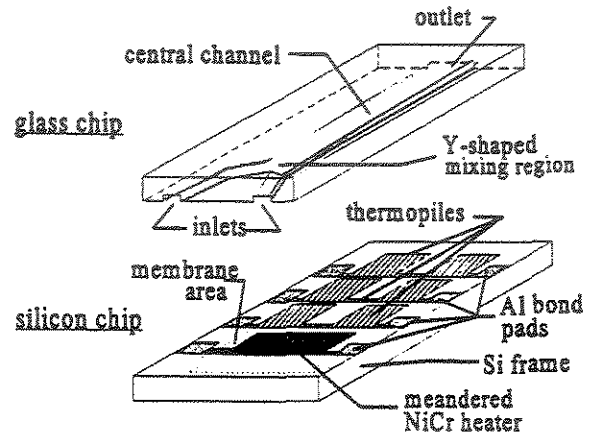


Figura 3: Micro-calorímetro.

Figura tomada de [ZiKo]

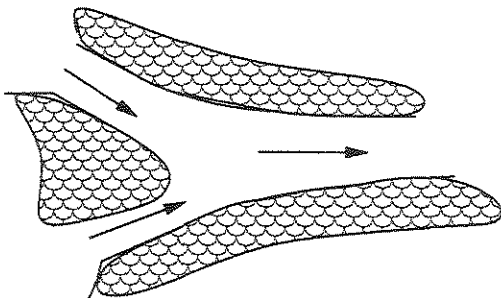


Figura 2: Encontro de rios

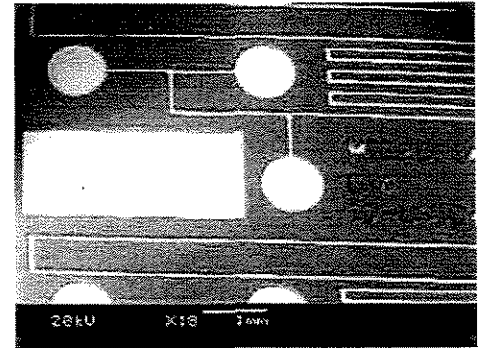


Figura 4: Microcanais.

Micro sistemas para análises químicas por injeção em fluxo (Micro FIA) : do Prof. Ivo M. Raimundo Jr., do Grupo de Instrumentação e Automação em Química Analítica - GIA - Instituto de Química - UNICAMP. Projeto MUSA/LNLS,1999. <http://www.lnls.br>

### Figura 0.1 Tipos de Domínios

Nesta Dissertação estamos interessados no problema matemático de fluidos, em

domínios com canais, incompressíveis e em estado estacionário. Vamos expor, além da demonstração da existência e unicidade de solução para as equações que modelam o problema, uma proposta de aproximação para as soluções. Esta aproximação depende da espessura dos canais. A estimativa do erro nesta aproximação é exibida explicitamente e demonstrada. Seguimos a referência [MP], V. Capítulo 4.

Este tipo de problema físico é a motivação principal deste trabalho. Consideramos o cruzamento de  $m$  canais finitos, onde cada um deles tem seção transversal constante, de diâmetro dependendo de  $\epsilon$ , ou seja, nosso domínio  $\Omega_\epsilon$  é um aberto limitado do  $\mathbb{R}^3$  com fronteira suave que se escreve da forma

$$\Omega_\epsilon = \bigcup_{i=0}^m \Omega_i^\epsilon \quad (1)$$

onde  $\Omega_0^\epsilon$ , é um conjunto limitado, (que pode ser vazio) formado no cruzamento dos  $\Omega_i^\epsilon$ ,  $i = 1, \dots, m$  sendo os domínios (disjuntos)  $\Omega_i^\epsilon$ ,  $i = 1, \dots, m$  cilindros retos de comprimento  $L_i$  e diâmetro  $\epsilon$ .

Tais canais são envidados com fluido viscoso incompressível. Nos extremos de cada canal, vamos colocar certos valores da pressão  $p_i$  e queremos estudar o comportamento do fluido ao longo de cada canal. Este problema tem formulação matemática cujo cenário são as equações de *Navier-Stokes*; na verdade é um problema homogêneo de Navier-Stokes, estacionário. Matematicamente, chamando de  $\mathbf{v}^\epsilon$  e de  $p^\epsilon$  a velocidade e a pressão do fluido quando este se movimenta no domínio  $\Omega_\epsilon$  e se denotamos a fronteira lateral dos canos por

$$\Gamma_\epsilon^i = \{x = (x_3^i, \bar{x}^i) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_3^i < L_i, \bar{x}^i = (x_1^i, x_2^i) \in \epsilon \partial S^i\} \quad (2)$$

e as respectivas fronteiras exteriores por

$$\Sigma_\epsilon^i = \{x^i = (L_i, \bar{x}^i) \in \mathbb{R}^3 : \bar{x}^i = (x_1^i, x_2^i) \in \epsilon S^i\}. \quad (3)$$

onde  $S^i$  representa a seção transversal (constante) de cada canal, o problema pode ser formulado como segue:

Dados  $p_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , encontrar  $(\mathbf{v}^\epsilon, p^\epsilon) \in W^{1,2}(\Omega_\epsilon)^3 \times L^2(\Omega_\epsilon)$  tal que

$$-\mu \Delta \mathbf{v}^\epsilon + (\mathbf{v}^\epsilon \nabla) \mathbf{v}^\epsilon + \nabla p^\epsilon = 0 \text{ em } \Omega_\epsilon \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^\epsilon = 0 \text{ em } \Omega_\epsilon \quad (5)$$

$$\mathbf{v}^\epsilon = 0 \text{ em } \Gamma_\epsilon \quad (6)$$

$$\mathbf{v}^\epsilon \times \mathbf{n}_i = 0 \text{ em } \Sigma_\epsilon^i \quad (7)$$

$$p^\epsilon = p_i, \quad (8)$$

onde  $\mathbf{n}_i$  é o vetor normal exterior unitário a  $\Sigma_\epsilon^i$  e  $i = 1, \dots, m$ .

Nosso objetivo em primeiro lugar é estudar a existência e unicidade da solução deste problema. Uma vez mostrada a existência e unicidade da solução, queremos construir uma solução aproximada da solução real. A solução aproximada é construída como sendo uma colagem entre duas soluções lineares. Tal comportamento é confirmado por um estudo assintótico do fluxo quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Nas saídas cilíndricas (fora de uma vizinhança da área de cruzamento) o fluxo é descrito como um *fluxo de Poiseuille*, e numa vizinhança do cruzamento, o fluxo se comporta como uma solução reescalada do *problema de Leray linear*. A idéia então, consiste em colar estas duas soluções num certo ponto estratégico de truncamento, de forma que dada a espessura  $\epsilon$ , a solução construída aproxime o fluxo efetivo com um erro dado em termos de  $\epsilon$ .

Para poder fazer esse trabalho, precisamos de uma boa abordagem de alguns tópicos da Análise e da Hidrodinâmica. Tendo em mente nosso objetivo principal, decidimos dividir o trabalho em quatro Capítulos visando dar uma idéia do conteúdo matemático que está por trás deste tipo de problemas. Cada um desses capítulos está estruturado da seguinte maneira:

Para iniciar foi preciso apresentar algumas definições e resultados básicos sobre os espaços de Lebesgue e os espaços de Sobolev. Resultados que se resumem na descrição de algumas desigualdades relativas a estes espaços, convergência, teoremas de imersões, noção do traço nos espaços de Sobolev  $W^{m,q}(\Omega)$ , entre outros. Também foi necessário fazer um rápido estudo sobre outros espaços de funções como é o caso dos espaços de Sobolev homogêneos  $D^{m,q}(\Omega)$ , os espaços  $\mathcal{D}_0^{m,q}(\Omega)$ ,  $H_q^1(\Omega)$ , etc. Na construção da

solução aproximada é inevitável o conhecimento sobre o problema de expressar uma função escalar no  $L^q$  como sendo o divergente de um campo  $\mathbf{v} \in W_0^{m,q}(\Omega)$ ; aspecto sobre o qual foi estabelecido a análise que consideramos necessária. Os assuntos anteriormente enunciados, constituem em termos gerais o primeiro Capítulo deste trabalho.

Levando em consideração que queremos construir uma solução aproximada para nosso problema original, e já sabendo que essa solução está constituída por duas soluções particulares de problemas lineares, decidimos fazer uma abordagem teórica sobre cada uma delas. Em primeiro lugar foi feita uma descrição sobre o fluxo de Poiseuille e em segunda instância analisamos o problema de Leray ou equivalentemente, o problema de determinar o movimento dum fluido num domínio  $\Omega$  com saídas cilíndricas, em relação a um fluxo dado  $\phi_i$  em cada saída e tendendo em cada uma delas à solução Poiseuille, correspondente a  $\phi_i$ . Dentro deste último problema, foi provada a existência e unicidade da solução e além disso descrevemos o comportamento assintótico da solução (decaimento e ordem desse decaimento) junto com todas suas derivadas. Estes aspectos constituem o segundo Capítulo deste trabalho.

No terceiro Capítulo reunimos os resultados técnicos mais importantes para poder realizar uma certa análise asintótica duma solução aproximada para um problema que será tratado no Capítulo quatro. Estes resultados são basicamente desigualdades já conhecidas para domínios padrões  $\Omega$ , mas que devido à dependência de  $\epsilon$  de nosso domínio, é preciso fazer os cálculos das estimativas de forma que possamos saber exatamente qual é a dependência em  $\epsilon$  das mesmas.

No quarto Capítulo realizamos o estudo da existência e unicidade da solução do problema original e baseados na teoria dos dois capítulos anteriores apresentamos a solução aproximada para o problema e realizamos a análise de convergência da mesma. Este estudo se sintetiza na demonstração dos seguintes dois teoremas.

### **Teorema 0.1**

*I. (Existência e unicidade da velocidade  $\mathbf{v}^\epsilon$ ).*

*Seja  $d_i = p_i - \bar{q}$  e sejam  $d = (\sum_{i=1}^m d_i^2)^{\frac{1}{2}}$  e  $c = c(4, 2)$  é a constante do Lema (3.1). Se*



$d$  e o diâmetro  $\epsilon$  do cano, são tais que

$$d < \frac{\mu^2}{4c^2c_2\epsilon^{3/2}} \quad (9)$$

sendo  $c_2$  a constante dada no Lema (3.2), então a equação (4.11), tem uma única solução.

**II.** (Existência e unicidade da Pressão  $p^\epsilon$ ).

Existe uma única  $p^\epsilon \in L_0^2(\Omega_\epsilon)$  tal que (4) é válido no sentido das distribuições. Além disso,  $p^\epsilon = p_i$  em  $\Sigma_\epsilon^i$  no sentido de  $H_n^{-1/2} := (H_n^{1/2})'$ , onde  $H_n^{1/2} = \{\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega_\epsilon)^3 : \varphi \times \mathbf{n} = 0\}$ , sendo  $\mathbf{n}$  o vetor normal unitário exterior a  $\partial\Omega_\epsilon$ .

**Teorema 0.2** Seja  $(\mathbf{v}^\epsilon, p^\epsilon)$  uma solução do problema (4)–(8). Chamando de  $(\mathcal{W}^\epsilon, \Pi^\epsilon)$  a solução aproximada (dada na Seção 3.3), valem as seguintes estimativas:

$$|\Omega_\epsilon|^{-1/2} \|\epsilon^{-2}\mathbf{v}^\epsilon - \mathcal{W}^\epsilon\|_{2,\Omega_\epsilon} \leq c_\epsilon \sqrt{-\epsilon \ln \epsilon} \quad (10)$$

$$|\Omega_\epsilon|^{-1/2} \|\nabla(\epsilon^{-2}\mathbf{v}^\epsilon - \mathcal{W}^\epsilon)\|_{2,\Omega_\epsilon} \leq c\sqrt{-\epsilon \ln \epsilon} \quad (11)$$

$$|\Omega_\epsilon|^{-1/2} \|p^\epsilon - \Pi^\epsilon\|_{2,\Omega_\epsilon/\mathbb{R}} \leq c\epsilon\sqrt{-\epsilon \ln \epsilon}. \quad (12)$$

# Notações Importantes

## A. Notação vetorial e Geométrica

1.  $\mathbb{R}^n$  = Espaço Euclidiano  $n$ -dimensional real,  $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ .

2.  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$   $i$ -ésimo vetor diretor.

3.  $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ .

4. Para  $A = (A_{ij})$  e  $B = (B_{ij})$  matrizes reais de ordem  $n$ , escrevemos

$$A : B \equiv \sum_{i,j=1}^n A_{ij} B_{ij}.$$

5. Para  $A = (A_{ij})$  matriz real de ordem  $n$ , denotamos  $|A| \equiv \left( \sum_{i,j=1}^n A_{ij} A_{ij} \right)^{1/2}$ .

6. Se  $a = (a_1, \dots, a_n)$  e  $b = (b_1, \dots, b_n)$  pertencem ao  $\mathbb{R}^n$ ,

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^n a_i b_i, \quad |a| = \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2}.$$

7.  $B_R$  = bola aberta no  $\mathbb{R}^n$  com centro na origem e raio  $R$ .

8.  $\Omega_R = \Omega \cap B_R$ .

9.  $\delta(\Omega)$  = diâmetro do conjunto  $\Omega$ .

10. Se  $\Omega \subset X$ , então  $\Omega^c = X \setminus \Omega$ .

11.  $\bar{X}$  denota o fecho do conjunto  $X$  na topologia da norma.

12.  $X'$  denota o dual (topológico) do espaço  $X$

## B. Notação de funções e Derivadas

1. Se  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , escrevemos

$$u(x) = u(x_1, \dots, x_n), \quad x \in \Omega.$$

2. Se  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ , escrevemos

$$\mathbf{u}(x) = (u_1(x), \dots, u_n(x)), \quad x \in \Omega.$$

A função  $u_k$  é a  $k$ -ésima componente de  $\mathbf{u}$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

3.  $\text{spt}(u)$  = suporte da função  $u$ .

4.  $u_{x_i}$  = derivada parcial de  $u$  com respeito à variável  $x_i$ .

5.  $D^k u(x) = \{D^\alpha u(x) : |\alpha| = k\}$ , sendo  $k$  um inteiro não negativo.

Se  $k = 1$ ,  $Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = \nabla u$  é o vetor gradiente.

6.  $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$  = Laplaciano de  $u$ .

7.  $(u, v)$  representa  $\int_{\Omega} uv$  para  $u, v$  funções tais que  $uv$  seja integrável.

8. Dada  $f \in X'$ ,  $u \in X$  denotamos por  $\langle f, u \rangle$  o funcional  $f$  aplicado em  $u$ .

9.  $\nabla \cdot u$  = divergente de  $u$ .

### C. Espaços de Funções

1.  $C(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é contínua}\}$ .

2.  $C^k(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é } k \text{ vezes continuamente diferenciável}\}$ .

3.  $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$ .

4.  $C_0(\Omega)$ ,  $C_0^k(\Omega)$ , etc denota as funções em  $C(\Omega)$ ,  $C^k(\Omega)$ , etc. de suporte compacto.

5.  $D^{m,q}(\Omega)$ . (v. pag. 19)

6.  $D_0^{m,q}(\Omega)$ . (v. pag. 20)

7.  $\mathcal{D}(\Omega)$ . (v. pag. 30)

8.  $\mathcal{D}_0^{m,q}(\Omega)$ . (v. pag. 34)

9.  $\widehat{\mathcal{D}}_0^{m,q}(\Omega)$ . (v. pag. 34)

10.  $H_q^1(\Omega)$ . (v. pag. 30)

11.  $\widehat{H}_q^1(\Omega)$ . (v. pag. 30)

# Capítulo 1

## Espaços de funções

Neste primeiro Capítulo introduziremos alguns espaços de funções básicas junto com algumas propriedades que são de importância relevante para o desenvolvimento dos capítulos seguintes.

### 1.1 Os espaços $L^q$

Para  $q \in [1, \infty)$  e  $\Omega$  um subconjunto aberto não vazio do  $\mathbb{R}^n$  denotamos o espaço vetorial  $L^q = L^q(\Omega)$  como sendo o espaço de todas as (classes de equivalência de) funções reais Lebesgue mensuráveis  $u$  definidas em  $\Omega$ , tais que

$$\|u\|_{q,\Omega} \equiv \left( \int_{\Omega} |u|^q \right)^{1/q} < \infty. \quad (1.1)$$

O funcional (1.1) define uma norma em  $L^q$ , e  $L^q$  com esta norma é um espaço de Banach. Para  $q = 2$ , o espaço  $L^q$  é de Hilbert com produto escalar definido por

$$(f, g) = \int_{\Omega} fg.$$

Por  $L^\infty = L^\infty(\Omega)$  denotamos o conjunto das (classes de equivalência de) funções Lebesgue mensuráveis  $u$  definidas em  $\Omega$  tais que

$$\begin{aligned} \|u\|_{\infty,\Omega} &\equiv \operatorname{supess}\{|u(x)| : x \in \Omega\} \\ &= \inf\{k > 0 : \mu(\{x \in \Omega : |u(x)| > k\}) = 0\} < \infty. \end{aligned} \quad (1.2)$$

O funcional (1.2) define uma norma em  $L^\infty$ , e  $L^\infty$  com esta norma torna-se um espaço de Banach.

Dizemos também que  $u \in L^q_{loc}(\Omega)$ , quando  $u \in L^q(\Omega')$  para qualquer domínio limitado  $\Omega'$  com  $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ .

Relembremos também algumas desigualdades nos espaços  $L^q$  que serão freqüentemente usadas ao longo deste trabalho. Para  $1 \leq q \leq \infty$  temos a desigualdade de Hölder,

$$\int_{\Omega} |uv| \leq \|u\|_{q,\Omega} \|v\|_{q',\Omega} \quad (1.3)$$

para toda  $u \in L^q(\Omega)$ ,  $v \in L^{q'}(\Omega)$  sendo  $q' = q/(q-1)$  ( $q' = 1$ , se  $q = \infty$ ). Duas conseqüências da desigualdade de Hölder são a desigualdade de Minkowski

$$\|u + v\|_{q,\Omega} \leq \|u\|_{q,\Omega} + \|v\|_{q,\Omega}, \quad \forall u, v \in L^q(\Omega) \quad (1.4)$$

e a desigualdade de interpolação

$$\|u\|_{q,\Omega} \leq \|u\|_{s,\Omega}^\theta \|u\|_{r,\Omega}^{(1-\theta)} \quad (1.5)$$

válida para toda  $u \in L^s(\Omega) \cap L^r(\Omega)$  com  $1 \leq s \leq q \leq r \leq \infty$ , e  $q^{-1} = \theta s^{-1} + (1-\theta)r^{-1}$ ,  $\theta \in [0, 1]$  [Ev, p.623]

Uma outra propriedade importante destes espaços é que o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em  $\Omega$ , denotado por  $C_0^\infty(\Omega)$  é denso em  $L^q$ ,  $1 \leq q < \infty$ . Finalmente é bom lembrar que nos espaços  $L^q$  podemos introduzir os seguintes modos de convergência: dada uma seqüência  $\{u_m\} \subset L^q(\Omega)$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ , dizemos que  $\{u_m\}$  converge fortemente ou na norma a alguma  $u \in L^q(\Omega)$  se

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\|_{q,\Omega} = 0;$$

e dizemos que a seqüência  $\{u_m\} \subset L^q(\Omega)$  converge fracamente a  $u \in L^q(\Omega)$ ,  $1 \leq q < \infty$ , se

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(u_m) = \int_{\Omega} f(u), \quad \forall f \in (L^q(\Omega))' = L^{q'}(\Omega), \quad (1.6)$$

onde  $(L^q(\Omega))'$  representa o dual topológico de  $L^q(\Omega)$ ,  $1 \leq q < \infty$ . Em geral, dado um espaço normado  $X$ , representaremos por  $X'$  o seu dual (topológico). Como vale que  $(L^q(\Omega))' = L^{q'}(\Omega)$  via a identificação  $f(v) = \int_{\Omega} f v$ ,  $f \in L^{q'}$ ,  $v \in L^q$  (Teorema de Representação de Riesz [Ev, p.639]), a convergência fraca (1.6) na prática fica determinada por

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f u_m = \int_{\Omega} f u, \quad \forall f \in L^{q'}(\Omega), \quad 1 < q' \leq \infty.$$

No caso  $q = \infty$ , também podemos falar em convergência fraca mas na prática não aparece com muita freqüência. O que é bastante usado aqui é a topologia fraca-\* (para espaços duais [DuSc, p.462] junto com o fato de  $L^\infty(\Omega) = (L^1(\Omega))'$ . Porém, na verdade como a identificação  $L^\infty(\Omega) = (L^1(\Omega))'$  é feita via a mesma fórmula

$$f(v) = \int_{\Omega} f v, \quad f \in L^\infty, \quad v \in L^1,$$

e na prática a topologia fraca do  $L^\infty(\Omega)$  não é muito usada, iremos chamar a topologia fraca-\* do  $L^\infty(\Omega)$  também de topologia fraca, e isto não irá criar confusão. Enfim, dizemos que  $u_m \subset L^q(\Omega)$  converge fracamente para  $u \in L^q(\Omega)$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ , se

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f u_m = \int_{\Omega} f u, \quad \forall f \in L^{q'}(\Omega), \quad 1 \leq q' \leq \infty.$$

Neste caso, usaremos a notação  $u_m \rightharpoonup u$ . Para a convergência forte, usaremos a notação  $u_m \rightarrow u$ .

## 1.2 Os espaços de Sobolev $W^{m,q}$ .

### 1.2.1 Aspectos Básicos

Antes de definir os Espaços de Sobolev, é necessário conhecer o conceito de derivada fraca. Suponhamos  $\Omega$  que seja um aberto não vazio do  $\mathbb{R}^n$ ,  $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$  e  $\alpha$  um múltíndice.\* A função  $v$  é dita a  $\alpha$ -ésima derivada parcial fraca de  $u$  se

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

---

\*Um múltíndice  $\alpha$  é um vetor da forma  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , onde cada componente  $\alpha_i$  é um inteiro não negativo; sua ordem  $|\alpha|$  é definida por  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .

(Definição inspirada na fórmula de integração por partes quando  $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ ; neste caso  $v = D^\alpha u$  no sentido clássico.) Notação:

$$v = D^\alpha u, \quad D^\alpha \equiv \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Os espaços de Sobolev  $W^{m,q}$ ,  $q \in [1, \infty]$ ,  $m \in \mathbb{N}$  estão formados pelo conjunto de todas as funções mensuráveis  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tais que para todo  $\alpha$  com  $|\alpha| \leq m$ ,  $D^\alpha u$  existe no sentido fraco e pertence a  $L^q(\Omega)$ .

Os espaços vetoriais  $W^{m,q}$  são espaços de Banach se intruduzirmos neles a norma

$$\|u\|_{m,q,\Omega} := \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{q,\Omega}^q \right)^{1/q} \quad \text{se } q \in [1, \infty) \quad (1.7)$$

$$\|u\|_{m,q,\Omega} := \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{\infty,\Omega} \quad \text{se } q = \infty. \quad (1.8)$$

Dado um espaço de Sobolev  $W^{m,q}(\Omega)$ , definimos  $W_0^{m,q}(\Omega)$  como sendo o subespaço de  $W^{m,q}(\Omega)$  formado pelo fecho de  $C_0^\infty(\Omega)$  na norma (1.7) ou (1.8) dependendo do valor de  $q$ . Claramente,  $W^{0,q}(\Omega) = W_0^{0,q}(\Omega) = L^q(\Omega)$ . Análogo aos espaços  $L^2$ ,  $W^{m,2}$  é um espaço de Hilbert (usualmente denotado por  $H^m(\Omega)$ ) com relação ao produto escalar

$$(u, v)_{m,\Omega} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v).$$

Dada uma função  $u$  em  $W^{m,q}(\Omega)$ , uma questão de bastante interesse é saber se ela pode ser aproximada por funções suaves. Para  $1 \leq q < \infty$ , localmente sempre podemos fazer tal aproximação. De fato, dado  $\epsilon > 0$ , e sendo  $\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$  o resultado abaixo garante a afirmação feita.

**Teorema 1.1** [Ev, p.250] *Seja  $u_\epsilon \equiv \eta_\epsilon * u$  em  $\Omega_\epsilon$ , sendo  $\eta_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \eta(x/\epsilon)$ , com  $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\int_{\mathbb{R}^n} \eta = 1$  (por exemplo tome*

$$\eta(x) = \begin{cases} c \exp(1/(|x|^2 - 1)) & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

*onde  $c > 0$  é escolhida de tal forma que  $\int_{\mathbb{R}^n} \eta = 1$ ). Então*

- i)  $u_\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$  para todo  $\epsilon > 0$ ;*
- ii)  $u_\epsilon \rightarrow u$  em  $W_{loc}^{m,q}(\Omega)$ , quando  $\epsilon \rightarrow 0$ .*



Se queremos uma aproximação global, temos que se  $u \in W_0^{m,q}(\Omega)$  ou se  $u \in W^{m,q}(\mathbb{R}^n)$  a resposta é afirmativa<sup>†</sup>, mas em geral temos que impor algumas restrições. Para ter uma idéia melhor, enunciaremos o Teorema 1.2 abaixo. Para o mesmo precisamos da seguinte definição:

Dizemos que um domínio  $\Omega$  possui a *propriedade do segmento*<sup>‡</sup> se para qualquer  $x \in \partial\Omega$  existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  e um vetor  $y$  tal que se  $z \in \bar{\Omega} \cap U$ , então,  $z + ty \in \Omega$ , para todo  $t \in (0, 1)$ .



Figura 1.1: Com p. do segmento



Figura 1.2: Sem p. do segmento

**Teorema 1.2** [Ga, p.29] *Sejam  $\Omega$  um domínio (i.e um conjunto aberto e conexo) qualquer do  $\mathbb{R}^n$  e  $u \in W^{m,q}(\Omega)$ ,  $1 \leq q < \infty$ . Então,  $u$  pode ser aproximada na norma (1.7) por funções em  $C^m(\Omega) \cap W^{m,q}(\Omega)$ . Além disso, se  $\Omega$  tem a propriedade do segmento,  $u$  pode ser aproximada por funções em  $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ .*

Agora enunciaremos outros resultados envolvendo desigualdades e os Teoremas de imersões de Sobolev (Teoremas 1.9, 1.10 abaixo) fortemente usados no cálculo de estimativas, como veremos no Capítulo 3.

**Lema 1.3** [Ga, p.30] *Dada  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , temos*

$$\|u\|_{n/(n-1), \mathbb{R}^n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \|\nabla u\|_{1, \mathbb{R}^n}. \quad (1.9)$$

Notemos que se substituimos  $u$  por  $|u|^q$ ,  $q \geq 1$  em (1.9), usando a desigualdade de Hölder obtemos que

$$\|u\|_{qn/(n-1), \mathbb{R}^n} \leq \left(\frac{q}{2\sqrt{n}}\right)^{1/q} \|u\|_{q, \mathbb{R}^n}^{1/q'} \|\nabla u\|_{q, \mathbb{R}^n}^{1/q}. \quad (1.10)$$

A desigualdade (1.9) permite deduzir resultados mais gerais; vejamos o seguinte lema

<sup>†</sup>Pode-se mostrar que  $W_0^{m,q}(\mathbb{R}^n) = W^{m,q}(\mathbb{R}^n)$

<sup>‡</sup>Uma característica destes conjuntos é que eles não podem ter elementos nos dois lados da fronteira.

**Lema 1.4** [Ga, p.31] Seja  $r \in [q, nq/(n - q)]$ , se  $q \in [1, n)$ , ou  $r \in [q, \infty)$ , se  $q \geq n$ . Então, para toda  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  temos

$$\|u\|_{r, \mathbb{R}^n} \leq \left(\frac{c}{2\sqrt{n}}\right)^\lambda \|u\|_{q, \mathbb{R}^n}^{1-\lambda} \|\nabla u\|_{q, \mathbb{R}^n}^\lambda \quad (1.11)$$

onde  $c = \max\{q, r(n - 1)/n\}$ ,  $\lambda = n(r - q)/rq$ .

**Lema 1.5** [Ga, p.32] Dada  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , temos a seguinte desigualdade de Sobolev (que pode ser estendida usando densidade, a funções  $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ ,  $1 \leq q < n$ )

$$\|u\|_{r, \mathbb{R}^n} \leq \frac{q(n - 1)}{2(n - q)\sqrt{n}} \|\nabla u\|_{q, \mathbb{R}^n}, \quad q \in [1, n), \quad r = nq/(n - q). \quad (1.12)$$

Os dois resultados seguintes relacionam a norma  $L^q$  de uma função com a norma  $L^q$  das suas primeiras derivadas. (Desigualdades de Poincaré).

**Teorema 1.6** Suponhamos que  $\Omega$  é um subconjunto da faixa de largura  $d$ ,  $L_d = \{x \in \mathbb{R}^n : -d/2 < x_n < d/2\}$ . Então, para toda  $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ , temos que

$$\|u\|_{q, \Omega} \leq (d/2) \|\nabla u\|_{q, \Omega}. \quad (1.13)$$

**Demonstração.** Como  $C_0^\infty(\Omega)$  é denso em  $W_0^{1,q}(\Omega)$ , é suficiente mostrar o resultado para  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ . Como

$$|u(x)| \leq (1/2) \int_{-d/2}^{d/2} |\nabla u| dx_n,$$

temos que (1.13) é válida para  $q = \infty$ . Se  $1 \leq q < \infty$ , usando a desigualdade de Hölder obtemos que

$$|u(x)|^q \leq (d^{q-1}/2^q) \int_{-d/2}^{d/2} |\nabla u| dx_n.$$

Integrando a última desigualdade sobre  $L_d$ , obtemos o resultado.  $\square$

Observemos que é imprescindível no resultado acima que  $\Omega$  esteja dentro de uma faixa, pois por exemplo, se tomamos  $\Omega = \mathbb{R}^n$  e consideramos a seqüência

$$u_m = e^{-|x|/(m+1)}, \quad m \in \mathbb{N}$$

resulta que  $\|u_m\|_{q, \Omega} = (m + 1) \|\nabla u_m\|_{q, \Omega}$ , logo  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m\|_{q, \Omega} / \|\nabla u_m\|_{q, \Omega} = \infty$  contradizendo (1.13). O caso particular de (1.13) quando  $q = 2$ , desempenha um papel

importante em varias aplicações como veremos adiante, assim como também é de particular interesse determinar a menor constante  $\mu$  tal que

$$\|u\|_{2,\Omega}^2 \leq \mu \|\nabla u\|_{2,\Omega}^2. \quad (1.14)$$

A constante  $\mu$  é chamada às vezes de *constante de Poincaré*. Ela depende do domínio  $\Omega$  e quando este é limitado,  $\mu = 1/\lambda$ , sendo  $\lambda$  o menor autovalor do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Observemos que denotando o diâmetro de  $\Omega$  por  $\delta(\Omega)$ ,  $\delta(\Omega) \equiv \sup_{x,y \in \Omega} |x - y|$ , então  $d \leq \delta(\Omega)$  e assim

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \leq \frac{d^2}{4} \leq \frac{(\delta(\Omega))^2}{4}.$$

Observemos também que (1.13) não vale se  $u$  não se anula na fronteira de  $\Omega$ , fato expresso pelo “zero” na notação  $W_0^{1,q}(\Omega)$ , pois por exemplo se  $\Omega$  é um domínio limitado temos que a função constante  $u = 1$  pertence ao espaço  $W^{1,q}(\Omega)$  mas, evidentemente, não temos a desigualdade (1.13) para esta função.

Sendo  $\Omega$  um domínio limitado tal que  $u \in W^{1,q}$  mas não está em  $W_0^{1,q}$ , como relacionar a norma  $L^q$  de  $u$  com a sua norma  $L^q$  do gradiente? A resposta é dada pelo Teorema 1.8 abaixo. Para o mesmo precisamos da seguinte definição:

**Definição 1.7** *Seja  $\Omega$  um domínio do  $\mathbb{R}^n$  com fronteira limitada. Suponhamos que para cada  $x_0 \in \partial\Omega$  existe uma bola de centro em  $x_0$  e raio  $r$ , que denotamos por  $B_r(x_0)$  e uma função escalar  $\rho$  definida num domínio  $M$  de  $\mathbb{R}^{n-1}$  tal que (renomeando e reorientando os eixos de coordenadas se for necessário)*

1. *O conjunto  $\partial\Omega \cap B_r(x_0)$  pode ser representado por uma equação do tipo  $x_n = \rho(x_1, \dots, x_{n-1})$ ,  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in M$ ;*
2.  *$\Omega \cap B_r(x_0) = \{x \in B_r(x_0) : x_n < \rho(x_1, \dots, x_{n-1}), (x_1, \dots, x_{n-1}) \in M\}$ .*

*Então dizemos que  $\Omega$  é um domínio localmente Lipschitziano, se  $\rho$  for Lipschitziana em  $\overline{M}$ .*

**Teorema 1.8** [Ga, p.54] *Seja  $\Omega$  um domínio limitado localmente Lipschitziano do  $\mathbb{R}^n$  e seja  $\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u$  (Média da função  $u$  no domínio  $\Omega$ ). Então, para toda  $u \in W^{1,q}(\Omega)$ ,  $1 \leq q < \infty$ , existe uma constante  $c = c(n, q, \Omega)$  tal que*

$$\|u - \bar{u}\|_{q,\Omega} \leq c \|\nabla u\|_{q,\Omega}. \quad (1.15)$$

Um resultado de relevada importância são os teoremas de imersões de Sobolev, enunciados a seguir.

**Teorema 1.9** [Go, p.35] *Seja  $\Omega$  um domínio limitado do  $\mathbb{R}^n$  e  $u \in W_0^{m,q}(\Omega)$ ,  $q \geq 1, m \geq 0$ . Então,*

- *Se  $m q < n$ , temos que  $W_0^{m,q}(\Omega) \subset L^r(\Omega)$ , para todo  $r \in [q, \frac{nq}{n-mq}]$  e existe uma constante  $c_1 = c_1(m, q, r, n)$  tal que  $\|u\|_{r,\Omega} \leq c_1 \|u\|_{m,q,\Omega}$ .*
- *Se  $m q = n$ , temos que  $W_0^{m,q}(\Omega) \subset L^r(\Omega)$ , para todo  $r \in [q, \infty)$  e existe uma constante  $c_2 = c_2(m, q, r, n)$  tal que  $\|u\|_{r,\Omega} \leq c_2 \|u\|_{m,q,\Omega}$ .*
- *$m q > n$ , temos que cada  $u \in W_0^{m,q}(\Omega)$  é igual q.t.p em  $\Omega$  a uma única função em  $C^k(\bar{\Omega})$ , para todo  $k \in [0, m - (n/q))$  e existe uma constante  $c_3 = c_3(m, q, r, n)$  tal que  $\max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \sup_{\Omega} |D^{\alpha} u| \leq c_3 \|u\|_{m,q,\Omega}$ .*

O seguinte resultado é análogo ao teorema acima, válido para funções do espaço  $W^{m,q}$ .

**Teorema 1.10** [Ga, p.37] *Seja  $\Omega$  um domínio limitado localmente Lipschitziano do  $\mathbb{R}^n$ . Então, o teorema anterior é válido se substituirmos  $W_0^{m,q}(\Omega)$  por  $W^{m,q}(\Omega)$  com  $c_i = c_i(m, q, r, n, \Omega)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .*

O seguinte resultado garante a extensão (conveniente) de funções de um espaço  $W^{m,q}(\Omega)$  ao espaço  $W^{m,q}(\mathbb{R}^n)$ .

**Teorema 1.11** [Ga, p.36] *Seja  $\Omega$  localmente Lipschitziano,  $q \in [1, \infty], m \geq 0$ . Existe um operador linear (( $m, q$ )-extensão)  $E : W^{m,q}(\Omega) \longrightarrow W^{m,q}(\mathbb{R}^n)$  e uma constante  $c$  que independe de  $u$  tal que*

- (i)  $E(u)|_{\Omega} = u, \quad u \in W^{m,q}(\Omega)$ ;
- (ii)  $\|E(u)\|_{m,q,\mathbb{R}^n} \leq c \|u\|_{m,q,\Omega}$ .

## 1.2.2 Traço de funções nos espaços $W^{m,q}$

Faremos um breve comentário sobre a possibilidade de atribuir valores na fronteira de  $\Omega$  a uma função  $u \in W^{m,q}(\Omega)$  (o traço de  $u$ ). Se  $u \in C(\bar{\Omega})$ , claramente  $u$  tem valor em  $\partial\Omega$  no sentido usual, i.e, faz sentido  $u|_{\partial\Omega}$ , a restrição de  $u$  a fronteira de  $\Omega$ ; mas em geral a função  $u$  pode não estar definida nem q.t.p em  $\partial\Omega$  e assim não existe um sentido direto de expressar  $u$  em  $\partial\Omega$ . A noção de traço resolve este problema.

Observemos que dada  $u \in W^{m,q}(\Omega)$  com  $mq > n$ , o Teorema 1.10 garante a possibilidade de atribuir valores a  $u$  na fronteira, pois nesse caso, como  $u$  é igual q.t.p a uma única função em  $C^k(\bar{\Omega})$ , para todo  $k \in [0, m - (n/q))$ , a  $u$  pode ser redefinida num conjunto de medida nula, permitindo assim, a continuidade até a fronteira. Em termos gerais, usando algumas desigualdades junto com um par de resultados técnicos, obtemos o seguinte Teorema.

**Teorema 1.12** [Ga, p.43] *Seja  $\Omega$  um domínio limitado localmente Lipschitziano e suponhamos que  $r = q(n - 1)/(n - mq)$  se  $mq < n$ , e  $r \in [1, \infty)$  se  $mq \geq n$ . Então existe uma única aplicação linear contínua  $\gamma$  de  $W^{m,q}(\Omega)$ ,  $q \in [1, \infty)$ ,  $m \geq 1$  em  $L^r(\partial\Omega)$  tal que para toda  $u \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ ,  $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$ . Além disso, no caso  $m = 1$  existe  $c = c(n, r, q, \Omega)$  e  $\lambda = n(r - q)/q(r - 1)$  tal que*

$$\|\gamma(u)\|_{r,\partial\Omega} \leq c \|u\|_{q,\Omega}^{(1-\lambda)} \|u\|_{1,q,\Omega}^\lambda. \quad (1.16)$$

Uma outra caracterização do operador traço é dada no seguinte teorema; para isso é necessário definir uma nova classe de espaços: Os espaços vetoriais  $W^{1-1/q}(\partial\Omega) \subset L^q(\partial\Omega)$  constituídos pelas funções  $u$  tais que o funcional

$$\|u\|_{1-\frac{1}{q},q,\partial\Omega} := \|u\|_{q,\partial\Omega} + \left( \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{|u(y) - u(y')|^q}{|y - y'|^{n-2+q}} d\sigma_y d\sigma_{y'} \right)^{1/q} \quad (1.17)$$

é finito.

**Teorema 1.13** [Ga, p.45] *Seja  $\Omega$  um domínio localmente Lipschitziano e seja  $q \in (1, \infty)$ . Se  $u \in W^{1,q}(\Omega)$ , então  $\gamma(u) \in W^{1-1/q,q}(\partial\Omega)$  e além disso existe uma constante  $c_1 = c_1(n, q, \Omega)$  tal que*

$$\|\gamma(u)\|_{1-1/q,q,\partial\Omega} \leq c_1 \|u\|_{1,q,\Omega}. \quad (1.18)$$

Reciprocamente, dada  $\omega \in W^{1-1/q,q}(\partial\Omega)$ , existe  $u \in W^{1,q}(\Omega)$  e  $c_2 = c_2(n, q, \Omega)$  tal que  $\gamma(u) = \omega$  e

$$\|u\|_{1,q,\Omega} \leq c_2 \|\gamma(u)\|_{1-1/q,q,\partial\Omega}. \quad (1.19)$$

**Observação 1.14** Para o caso  $m \geq 2$ , referimos ao leitor interessado, ver o Teorema 3.4 de [Ga, p.48].

Para terminar esta parte, mencionamos o seguinte resultado que relaciona o traço de funções em  $W^{1,q}$  com funções em  $W_0^{1,q}$ .

**Teorema 1.15** [Ev, p.259] Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , limitado, com  $\partial\Omega$  sendo de classe  $C^1$  (i.e. a função escalar  $\rho$  da definição (1.7) é de classe  $C^1$ ) e seja  $u \in W^{1,q}(\Omega)$ . Então,  $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$  se, e somente se  $\gamma(u) = 0$  em  $\partial\Omega$ .

### 1.3 Os Espaços de Sobolev Homogêneos $D^{m,q}$

Os espaços de Sobolev homogêneos são definidos da seguinte forma. Para  $m \geq 0$ ,  $1 \leq q < \infty$ , definimos

$$D^{m,q} = D^{m,q}(\Omega) \equiv \{u \in L_{loc}^1(\Omega) : D^\alpha u \in L^q(\Omega), |\alpha| = m\}.\S$$

Em  $D^{m,q}$  introduzimos a seminorma

$$|u|_{m,q,\Omega} \equiv \left( \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^q \right)^{1/q}. \quad (1.20)$$

Consideremos  $P_m$  como sendo o conjunto dos polinômios de grau  $m$  e para  $u \in D^{m,q}$ , chamamos de  $[u] = \{w \in D^{m,q} : w = u + p_{m-1}, \text{ para algum } p_{m-1} \in P_{m-1}\}$ . Denotemos por  $\mathbf{D}^{m,q} = \mathbf{D}^{m,q}(\Omega)$  o espaço de todas as classes de equivalência  $[u]$ ,  $u \in D^{m,q}$ , e assim vemos que (1.20) é uma norma em  $\mathbf{D}^{m,q}$  e mostra-se também que,  $\mathbf{D}^{m,q}$  com esta norma é um espaço de Banach, e em particular, se  $q = 2$ ,  $\mathbf{D}^{m,q}$  é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por

$$[u, v]_{m,\Omega} \equiv \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v.$$

---

<sup>\S</sup>Aqui estamos considerando que as funções  $u$  vão de  $\Omega$  em  $\mathbb{R}$ .

Junto aos espaços  $D^{m,q}$  consideramos os espaços  $D_0^{m,q} = D_0^{m,q}(\Omega)$  definidos como sendo o fecho do conjunto das funções  $C_0^\infty(\Omega)$  na seminorma (1.20).

Uma questão natural é a relação entre  $D^{m,q}(\Omega)$  e  $W^{m,q}(\Omega)$ . A resposta será dada a partir das seguintes observações.

Se  $\Omega$  é limitado ou está contido em alguma faixa  $L_d$ , definida anteriormente, e se existe uma seqüência  $\{u_k\}$  em  $C_0^\infty(\Omega)$  tal que quando  $k$  tende ao infinito

$$\|D^\alpha(u_k - u)\|_{q,\Omega} \rightarrow 0, \quad \forall |\alpha| = m,$$

então  $\|D^\alpha(u_k - u)\|_{q,\Omega} \rightarrow 0$ , para todo  $0 \leq |\alpha| < m$ ; em outras palavras  $D_0^{m,q}(\Omega) = W_0^{m,q}(\Omega)$ . Agora, se  $\Omega$  é limitado e localmente Lipschitziano os espaços  $D^{m,q}(\Omega)$  e  $W^{m,q}(\Omega)$  são algebricamente iguais [Ga, p.60].

Uma outra propriedade importante é que se  $\Omega$  é limitado e localmente Lipschitziano, dada  $u \in D^{m,q}(\Omega)$ , então temos que  $u \in W_{loc}^{m,q}(\Omega)$ .

## 1.4 O Problema $\nabla \cdot \mathbf{v} = f$

Nesta Seção queremos resolver o problema de representar uma função escalar como o divergente de um campo de vetores num espaço de funções conveniente. Considerando um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , limitado, o problema é formulado como segue: Dado  $f \in L^q(\Omega)$ ,  $q \in (1, +\infty)$ , com

$$\int_{\Omega} f = 0, \tag{1.21}$$

achar um campo de vetores  $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = f \\ \mathbf{v} \in W_0^{1,q}(\Omega) \\ \|\mathbf{v}\|_{1,q,\Omega} \leq c \|f\|_{q,\Omega}, \quad c = c(n, q, \Omega). \end{cases} \tag{1.22}$$

Vamos mostrar a solução deste problema baseados na construção explícita do campo  $\mathbf{v}$ , para um domínio especial, como veremos no Lema 1.19 abaixo. para o mesmo, vamos precisar fazer um par de comentários sobre algumas transformadas integrais e

desigualdades relacionadas.

A transformada integral de uma função  $f$  com núcleo  $K$ , é uma função  $\Psi$  definida por

$$\Psi(x) \equiv \int_{\Omega} K(x, y) f(y) dy. \quad (1.23)$$

Se consideramos a situação em que  $K(x, y) = K(x - y)$  e definido em todo  $\mathbb{R}^n$ , a transformada (1.23) com  $\Omega = \mathbb{R}^n$  é chamada de *convolução*, e é denotada por  $K * f$ . Com isto estamos prontos para apresentar o seguinte resultado

**Teorema 1.16** [Ga, p.89] *Seja  $K \in L^s(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq s < \infty$ . Se*

$$f \in L^q(\mathbb{R}^n), \quad 1 \leq q \leq \infty.$$

*Então  $K * f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ ,  $r^{-1} + 1 = s^{-1} + q^{-1}$ , e além disso*

$$\|K * f\|_{r, \mathbb{R}^n} \leq \|K\|_{s, \mathbb{R}^n} \|f\|_{q, \mathbb{R}^n}. \quad (1.24)$$

**Definição 1.17** *Dada uma função regular  $k(x, y)$  dizemos que um núcleo  $K$  da forma*

$$K(x, y) = \frac{k(x, y)}{|y|^n}, \quad x \in \Omega, \quad y \in \mathbb{R}^n - \{0\} \quad (1.25)$$

*é um núcleo Singular se, e somente se, satisfaz as seguintes condições*

1.  $k(x, y) = k(x, \beta y)$  para todo  $x, y$  e para todo  $\beta > 0$ ;
2. Para todo  $x \in \Omega$ ,  $k(x, y)$  é integrável na esfera de raio 1 e

$$\int_{|y|=1} k(x, y) dy = 0;$$

3. Para algum  $q > 1$ , existe uma constante  $c > 0$  tal que

$$\int_{|y|=1} |k(x, y)|^q dy \leq c, \quad \text{uniformemente em } x.$$

Para transformadas integrais definidas por núcleos singulares temos o seguinte resultado fundamental (devido a Calderón e Zygmund).



**Teorema 1.18** [CaZi, 1956, Teorema 2] *Seja que  $K(x, y)$  um núcleo singular e seja  $N(x, y) \equiv K(x, x - y)$ . Então, se  $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 < q < \infty$ , o limite*

$$\Psi(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y| \geq \epsilon} N(x, y) f(y) dy \quad (1.26)$$

*existe para quase todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Além disso,  $\Psi \in L^q(\mathbb{R}^n)$  e  $\|\Psi\|_{q, \mathbb{R}^n} \leq c \|f\|_{q, \mathbb{R}^n}$ .*

Para demonstrar o lema abaixo precisamos também da seguinte definição:

Um subconjunto aberto  $\Omega$  do  $\mathbb{R}^n$ , é dito *estrelado* em relação a um ponto  $x_0$ , se para todo  $x \in \Omega$ , o segmento  $\{\lambda x + (1 - \lambda)x_0, \lambda \in [0, 1]\}$  está em  $\overline{\Omega}$ .

Claramente, se  $\Omega$  é convexo e  $x_0$  está em  $\Omega$ , então  $\Omega$  é estrelado em relação a  $x_0$ .

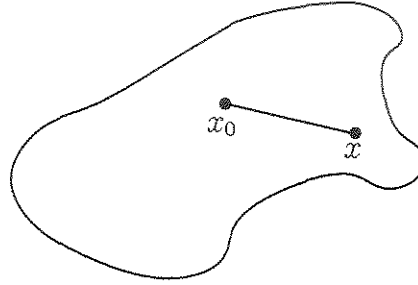


Figura 1.3: Conjunto Estrelado

**Lema 1.19** *Seja  $\Omega$  subconjunto limitado do  $\mathbb{R}^n, n \geq 2$ , um domínio estrelado com respeito a todo ponto de  $B_R(x_0)$  com  $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ . Então, para qualquer  $f \in L^q(\Omega)$  satisfazendo (1.21), temos que o problema (1.22) tem pelo menos uma solução  $v$ , e a constante  $c$  de (1.22) admite a seguinte estimativa*

$$c \leq c_0 \left( \frac{\delta(\Omega)}{R} \right)^n \left( 1 + \frac{\delta(\Omega)}{R} \right) \quad \text{com } c_0 = c_0(n, q).$$

*Além disso, se  $f \in C_0^\infty(\Omega)$ , então  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ .*

**Demonstração.** Vai ser dividida em duas partes. Em primeiro lugar, no caso quando  $f \in C_0^\infty(\Omega)$  e em segundo, quando  $f \in L^q(\Omega)$ .

**Parte A.**

Suponhamos  $f \in C_0^\infty(\Omega)$ . Se fazemos a mudança de variáveis  $x' = (x - x_0)/R$ , mudamos o ponto  $x_0$  à origem de coordenadas e a bola  $B_R(x_0)$  se transforma em  $B_1(0)$  que denotaremos simplesmente por  $B$ . Além disso, nosso domínio  $\Omega$  se transforma em um domínio  $\Omega'$  que também é estrelado em relação a todo ponto de  $B$ , com diâmetro  $\delta(\Omega') = \delta(\Omega)/R$ , o campo  $v$  e a função  $f$  são agora  $\mathbf{v}'$  e  $f'$  definidos em  $\Omega'$ . Com isto, a equação em (1.22) se converte em

$$\nabla \cdot \mathbf{v}' = Rf' \equiv F'. \quad (1.27)$$

$F'$  tem média zero e  $F' \in C_0^\infty(\Omega')$ . Além disso, se temos  $F'$  e  $\mathbf{v}'$  verificando (1.27), os respectivos  $\mathbf{v}$  e  $f$  verificam a equação em (1.22).

Vamos resolver o problema dando uma fórmula explícita de solução ((1.28) abaixo). Para motivá-la tomamos a decomposição de Helmholtz-Weyl [Ga, p.102], a qual permite decompor

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Daí, a primeira equação em (1.22) se escreve como

$$\Delta p = f,$$

então,  $p = N * f$ , onde  $N$  é a solução fundamental da equação de Laplace em  $\mathbb{R}^n$ . Assim, a solução seria dada por

$$\mathbf{v} = \nabla N * f,$$

sendo a menos de constante,  $\nabla N(z) = \frac{z}{|z|^n}$ . Mas devemos modificar para obter  $\mathbf{v}$  se anulando em  $\partial\Omega$ , e sem perder as demais propriedades desejadas.

Vamos considerar uma função  $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que

- i)  $\text{spt}(\zeta) \subset B$
- ii)  $\int_B \zeta = 1$ .

Mostraremos que o seguinte campo de vetores  $\mathbf{v}(x)$  dado por

$$\int_{\Omega} F(y) \left[ \frac{x-y}{|x-y|^n} \int_{|x-y|}^{\infty} \zeta \left( y + \xi \frac{x-y}{|x-y|} \right) \xi^{n-1} d\xi \right] dy \equiv \int_{\Omega} F(y) N(x, y) dy \quad (1.28)$$

resolve o problema (1.27). (Aqui estamos omitindo as aspas sobre  $\mathbf{v}$  e  $F$ , para maior comodidade ).

Se fazemos a mudança de variáveis  $r = \xi/|x - y|$  em (1.28), obtemos que

$$\mathbf{v}(x) = \int_{\Omega} F(y)(x - y) \left[ \int_1^{\infty} \zeta(y + r(x - y)) r^{n-1} dr \right] dy. \quad (1.29)$$

Observemos que  $\mathbf{v} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$  e além disso o suporte de  $\mathbf{v}$  está contido em  $M$ , sendo  $M$  o subconjunto compacto de  $\Omega$ , (pois  $\Omega$  é estrelado) dado por

$$M = \{z \in \Omega : z = \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2, z_1 \in \text{spt}(f), z_2 \in \bar{B}, \lambda \in [0, 1]\}. \quad (1.30)$$

Para ver isto, fixemos  $x \in \Omega \setminus M$ . Afirmamos que para todo  $y \in \text{spt}(f)$  e para todo  $r \geq 1$ ,  $y + r(x - y)$  não está em  $B$ . De fato, se  $y + r(x - y) \in B$  teríamos que  $y + r(x - y) = z$ , com  $|z| < 1$ ; logo

$$rx = z - (1 - r)y \Rightarrow x = \frac{1}{r}z + \frac{1 - r}{r}y \in M$$

o que é absurdo; portanto, como  $y + r(x - y)$  não está em  $B$  temos que  $\zeta(y + r(x - y)) = 0$ , (por que  $\text{spt}(\zeta) \subset B$ ) implicando que  $\text{spt}(\mathbf{v}) \subset M$ . Com isto concluímos que o campo  $\mathbf{v} \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ .

Nosso objetivo agora é mostrar que  $\nabla \cdot \mathbf{v} = F$ .

Vamos tomar um ponto  $x \in \Omega$  e vamos considerar a bola de raio  $\epsilon$  centrada em  $x$ , i.e  $B_{\epsilon}(x)$  para um  $\epsilon$  suficientemente pequeno. Então, tomando (1.28) derivando e integrando por partes obtemos

$$D_j v_i(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{B_{\epsilon}(x)} F(y) D_j N_i(x, y) dy + \int_{\partial B_{\epsilon}(x)} F(y) \frac{x_j - y_j}{|x - y|} N_i(x, y) d\sigma_y \right). \quad (1.31)$$

Analisaremos então, estes limites.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_{\epsilon}(x)} F(y) \frac{x_j - y_j}{|x - y|} N_i(x, y) d\sigma_y = F(x) \int_{\Omega} \frac{(x_j - y_j)(x_j - y_j)}{|x - y|^2} \zeta(y) dy. \quad (1.32)$$

De fato, fazendo  $y = x - \epsilon z$ , substituindo o valor de  $N_i(x, y)$  e tomando o módulo da seguinte diferença, temos que

$$I_{\epsilon} \equiv \left| \int_{\partial B_{\epsilon}(x)} F(y) \frac{x_j - y_j}{|x - y|} N_i(x, y) d\sigma_y - F(x) \int_{\Omega} \frac{(x_j - y_j)(x_j - y_j)}{|x - y|^2} \zeta(y) dy \right|$$

$$= \left| \int_{|z|=1} \left( z_i z_j F(x - \epsilon z) \int_0^\infty \zeta(x + rz)(r + \epsilon)^{n-1} dr \right) d\sigma_z - \right. \\ \left. F(x) \int_{|z|=1} \left( z_i z_j \int_0^\infty \zeta(x + rz)r^{n-1} dr \right) d\sigma_z \right|.$$

e assim, tomando o limite quando  $\epsilon$  tende a zero, verificamos a validade de (1.32).

Agora vamos ver a existência do

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{B_\epsilon^c(x)} F(y) D_j N_i(x, y) dy. \quad (1.33)$$

Antes disso, reescrevamos (1.28) da seguinte forma. Fazemos  $\xi - |x - y| = r$  em (1.28) para obter

$$v(x) = \int_\Omega F(y) \frac{x - y}{|x - y|^n} \left[ \int_0^\infty \zeta\left(x + r \frac{x - y}{|x - y|}\right) (|x - y| + r)^{n-1} dr \right] dy. \quad (1.34)$$

Notemos que da equação (1.29), fixado  $y$  encontramos

$$D_j N_i(x, y) = D_j \left( (x_i - y_j) \int_1^\infty \zeta(y + r(x - y)) r^{n-1} dr \right) \\ = \delta_{ij} \int_1^\infty \zeta(y + r(x - y)) r^{n-1} dr + \\ + (x_i - y_j) \int_1^\infty D_j \zeta(y + r(x - y)) r^n dr, \quad (1.35)$$

o qual, usando a igualdade (1.34) junto com (1.35), permite ver que

$$D_j N_i(x, y) = \frac{\delta_{ij}}{|x - y|^n} \int_0^\infty \zeta\left(x + r \frac{x - y}{|x - y|}\right) (|x - y| + r)^{n-1} dr \\ + \frac{x_i - y_i}{|x - y|^{n+1}} \int_0^\infty D_j \zeta\left(x + r \frac{x - y}{|x - y|}\right) (|x - y| + r)^n dr. \quad (1.36)$$

Expandindo as potências de  $n$  da equação (1.36), depois de alguns cálculos podemos mostrar que

$$D_j N_i(x, y) = K_{ij}(x, x - y) + G_{ij}(x, y) \quad (1.37)$$

onde  $K_{ij}(x, x - y)$  é um núcleo singular (Deixamos como exercício ao leitor a verificação deste fato) dado por

$$\frac{\delta_{ij}}{|x - y|^n} \int_0^\infty \zeta\left(x + r \frac{x - y}{|x - y|}\right) r^{n-1} dr + \frac{x_i - y_i}{|x - y|^{n+1}} \int_0^\infty D_j \zeta\left(x + r \frac{x - y}{|x - y|}\right) r^n dr$$

e  $G_{ij}(x, y)$  é tal que admite a seguinte estimativa

$$|G_{ij}(x, y)| \leq c \frac{\delta(\Omega)^{n-1}}{|x - y|^{n-1}}, \quad x, y \in \Omega, \quad c = c(\zeta, n).$$

Conseqüentemente temos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{B_\epsilon(x)} F(y) D_j N_i(x, y) dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{B_\epsilon(x)} F(y) [K_{ij}(x, x - y) + G_{ij}(x, y)] dy, \quad (1.38)$$

e assim (1.31) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} D_j v_i(x) &= \int_{\Omega} \left[ [K_{ij}(x, x - y) + G_{ij}(x, y)] F(y) + F(x) \frac{(x_j - y_j)(x_j - y_j)}{|x - y|^2} \zeta(y) \right] dy \\ &\equiv F_1(x) + F_2(x) + F_3(x), \end{aligned}$$

mais explicitamente,

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int_{\Omega} K_{ij}(x, x - y) F(y) dy; \\ F_2(x) &= \int_{\Omega} G_{ij}(x, y) F(y) dy; \\ F_3(x) &= \int_{\Omega} F(x) \frac{(x_j - y_j)(x_j - y_j)}{|x - y|^2} \zeta(y) dy. \end{aligned}$$

Temos agora que  $\nabla \cdot v$  é igual a

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} F(y) \left[ n \int_1^\infty \zeta(y + r(x - y)) r^{n-1} dr + \sum_{i=1}^n \int_1^\infty (x_i - y_i) D_i \zeta(y + r(x - y)) r^n dr \right] dy \\ &+ \sum_{i=1}^n F(x) \int_{\Omega} \frac{(x_i - y_i)(x_i - y_i)}{|x - y|^2} \zeta(y) dy \\ &= \int_{\Omega} F(y) \left[ n \int_1^\infty \zeta(y + r(x - y)) r^{n-1} dr + \int_1^\infty \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) D_i \zeta(y + r(x - y)) r^n dr \right] dy \\ &+ F(x) \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - y_i)(x_i - y_i)}{|x - y|^2} \zeta(y) dy \\ &= \int_{\Omega} F(y) \left[ n \int_1^\infty \zeta(y + r(x - y)) r^{n-1} dr + \int_1^\infty r^n \left( \frac{d}{dr} \zeta(y + r(x - y)) \right) dr \right] dy + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + F(x) \int_{\Omega} \zeta(y) dy \\
& = \int_{\Omega} F(y) \left[ \int_1^{\infty} \frac{d}{dr} (\zeta(y + r(x-y)) r^n) dr \right] + F(x) \\
& = \int_{\Omega} F(y) (-\zeta(x)) + F(x) \\
& = -\zeta(x) \int_{\Omega} F(y) + F(x) \\
& = -\zeta(x) |\Omega| \cdot \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} F(y) + F(x) = F(x)
\end{aligned}$$

Logo,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = F$  em  $\Omega$ .

Para terminar esta primeira parte, falta ver que  $\|\mathbf{v}\|_{1,q} \leq c\|f\|_q$ .

Para  $1 < q < \infty$ , diretamente do Teorema 1.18, encontramos que

$$\|F_1\|_{q,\Omega} \leq c_1 \|F\|_{q,\Omega}. \quad (1.39)$$

Agora, como  $F_2(x) = \int_{\Omega} G_{ij}(x,y) F(y)$ , temos que  $|F_2(x)| \leq \int_{\Omega} \frac{\delta(\Omega)^{n-1}}{|x-y|^{n-1}} F(y)$ , donde devido a (1.24), encontramos

$$\|F_2\|_{q,\Omega} \leq \left\| \frac{\delta(\Omega)^{n-1}}{|x-y|^{n-1}} \right\|_{1,\Omega} \|F\|_{q,\Omega} \quad (1.40)$$

ou equivalentemente,

$$\|F_2\|_{q,\Omega} \leq c_2 \delta(\Omega)^n \|F\|_{q,\Omega}. \quad (1.41)$$

Finalmente, não é difícil ver que  $\|F_3\|_{q,\Omega} \leq c_3 \delta(\Omega)^n \|F\|_{q,\Omega}$ . As constantes  $c_2, c_3$  dependem de  $n, q, \zeta$  mas não dependem de  $\Omega$ . A constante  $c_1$  pode ser estimada<sup>¶</sup> por

$$c_1 \leq c_4 \delta(\Omega)^n (1 + \delta(\Omega)), \quad c_4 = c_4(n, q, \zeta)$$

e assim juntando estas estimativas completamos a primeira parte da prova do lema.

### Parte B (Caso $f \in L^q(\Omega)$ )

---

<sup>¶</sup>Na verdade,  $c_1$  depende da constante  $c$  do Teorema 1.18. Para mais detalhes sobre esta estimativa, ver [Ga, p.94]

Seja  $f \in L^q(\Omega)$  satisfazendo (1.21) e seja  $\{f_m\}$  uma seqüência em  $C_0^\infty(\Omega)$  tal que  $f_m$  convirja a  $f$  na norma  $\|\cdot\|_{q,\Omega}$ . Definimos

$$f_m^* = f_m - \varphi \int_{\Omega} f_m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \text{com } \int_{\Omega} \varphi = 1.$$

Sendo  $\int_{\Omega} f = 0$ , como  $f_m$  converge a  $f$  na norma  $\|\cdot\|_{q,\Omega}$ , temos que

$$\int_{\Omega} f_m \longrightarrow \int_{\Omega} f = 0,$$

logo, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $m(\epsilon) \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $m \geq m(\epsilon)$ ,

$$\|f_m^* - f\|_{q,\Omega} = \|f_m - \varphi \int_{\Omega} f_m - f\|_{q,\Omega} \leq \|f_m - f\|_{q,\Omega} + \|\varphi \int_{\Omega} f_m\|_{q,\Omega} < \epsilon, \quad (1.42)$$

logo,  $f_m^*$  aproxima  $f$  em  $L^q(\Omega)$  e além disso

$$\int_{\Omega} f_m^* = 0.$$

Portanto pela parte A, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , podemos encontrar uma solução  $\mathbf{v}_m \in C_0^\infty(\Omega)$  do problema (1.22). Além disso,

$$\|\nabla \mathbf{v}_m\|_{q,\Omega} \leq c_1 \|f_m\|_{q,\Omega} < c_1 C. \quad (1.43)$$

para algum  $C > 0$ . Pelo teorema de *Banach-Alaoglu* (todo conjunto limitado é fracamente compacto [Br, p.42], logo temos que existe uma subseqüência  $\{\mathbf{v}_{m_k}\}$  convergindo fracamente em  $W_0^{1,q}(\Omega)$  para uma  $\mathbf{v} \in W_0^{1,q}(\Omega)$ , e esta  $\mathbf{v}$  vai ser um campo que satisfaz as condições (1.22) do problema original, cuja verificação deixamos a cargo do leitor.  $\square$

Agora, queremos estender um pouco mais o resultado do Lema anterior a um caso mais geral de domínios. Iniciamos enunciando o seguinte resultado auxiliar.

**Lema 1.20** [Ga, p.126] *Seja  $\Omega$  subconjunto do  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , limitado, conexo tal que  $\Omega = \bigcup_{k=1}^N \Omega_k$ ,  $N \geq 1$ , onde cada  $\Omega_k$  é um domínio estrelado em relação a alguma bola aberta  $B_k$  com  $\overline{B_k} \subset \Omega_k$ , e seja  $f \in L^q(\Omega)$  satisfazendo (1.21). Então, existem  $N$  funções  $f_k$  tais que para todo  $k = 1, \dots, N$  temos*

1.  $f_k \in L^q(\Omega)$ ;
2.  $\text{spt}(f_k) \subset \bar{\Omega}_k$ ;
3.  $\int_{\Omega_k} f_k = 0$ ;
4.  $f = \sum_{k=1}^N f_k$ ;
5.  $\|f_k\|_q \leq C\|f\|_q$ , com  $C = \left(1 + \frac{|\Omega_k|}{|\Omega_k \cap D_k|}\right) \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 + |F_i|^{\frac{1}{q}-1} |D_i - \Omega_i|^{1-\frac{1}{q}}\right)$ , onde  $D_i = \bigcup_{s=i+1}^N \Omega_s$  e  $F_i = \Omega_i \cap D_i$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ .

Fazendo uma combinação adequada dos dois últimos lemas podemos mostrar o seguinte teorema.

**Teorema 1.21** *Seja  $\Omega$  um domínio limitado conexo do  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  tal que  $\Omega = \bigcup_{k=1}^N \Omega_k$ ,  $N \geq 1$ , onde cada  $\Omega_k$  é um domínio estrelado em relação a alguma bola aberta  $B_k$  com  $\bar{B}_k \subset \Omega_k$ . Então, dada uma  $f \in L^q(\Omega)$  verificando (1.21), existe pelo menos uma solução  $\mathbf{v}$  de (1.22), e a constante  $c$  de (1.22) admite a seguinte estimativa*

$$c \leq c_0 C \left( \frac{\delta(\Omega)}{R_0} \right)^n \left( 1 + \frac{\delta(\Omega)}{R_0} \right) \quad (1.44)$$

onde  $R_0$  é o menor raio das bolas  $B_k$ ,  $c_0 = c_0(n, q)$  e  $C$  é a constante do lema anterior. Além disso, se a função  $f$  é de suporte compacto, o campo  $\mathbf{v}$  também o é.

Observemos que  $f$  pode ser decomposta como no Lema 1.20; logo usando o Lema 1.19, em cada domínio  $\Omega_k$  para  $k = 1, \dots, N$ , podemos construir um campo  $\mathbf{v}_k$  correspondente a  $f_k$  satisfazendo (1.22). Estendendo  $\mathbf{v}_k$  por zero fora de  $\Omega_k$ , podemos deduzir que o campo

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^N \mathbf{v}_k$$

pertence ao espaço  $W_0^{1,q}$  e resolve a equação em (1.22) em todo  $\Omega$ . Além disso, do Lema 1.19 e do item 5. do Lema acima encontramos que

$$|\mathbf{v}|_{1,q,\Omega} \leq \sum_{k=1}^N |\mathbf{v}_k|_{1,q,\Omega} \leq c \sum_{k=1}^N \|f_k\|_{q,\Omega} \leq cC\|f\|_{q,\Omega},$$



completando assim, a primeira parte da prova do Teorema. Para ver a demonstração completa deste Teorema, sugerimos ao leitor ver [Ga, p.129].

Se a função  $f \in L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ , com  $1 < q, r < \infty$ , satisfazendo (1.21), podemos mostrar também que existe um campo solução de (1.22), o qual satisfaz

$$\begin{cases} \mathbf{v} \in W_0^{1,q}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega); \\ |\mathbf{v}|_{1,q,\Omega} \leq c\|f\|_{q,\Omega}; \\ |\mathbf{v}|_{1,r,\Omega} \leq c\|f\|_{r,\Omega}. \end{cases}$$

para alguma constante  $c = c(n, q, \Omega)$ .

Finalmente queremos mencionar um último resultado bastante útil e cuja demonstração segue a mesma linha do Lema 1.19.

**Teorema 1.22** [Ga, p.135] *Seja  $\Omega$  domínio limitado e localmente Lipschitziano do  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . Dada  $f \in W_0^{m,q}(\Omega)$   $m \geq 0$ ,  $1 < q < \infty$ , satisfazendo (1.21), existe um campo  $\mathbf{v} \in W_0^{m+1,q}(\Omega)$ , verificando (1.22) e  $\|\nabla \mathbf{v}\|_{m,q,\Omega} \leq c\|f\|_{m,q,\Omega}$ . Além disso, se  $f \in C_0^\infty(\Omega)$  então  $\mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega)$ .*

## 1.5 Outros espaços de funções

No estudo de propriedades da dinâmica de fluidos é imprescindível considerar alguns espaços de funções apropriados que traduzem em forma matemática as propriedades físicas destes fenômenos. Além dos espaços de funções até agora mencionados, queremos apresentar um resumo sobre alguns outros espaços de interesse particular para o estudo feito nos dois capítulos seguintes. Chamaremos de

$$\mathcal{D}(\Omega) := \{\mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega) : \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ em } \Omega\}.$$

Consideraremos também os espaços  $H_q^1(\Omega)$ ,  $\hat{H}_q^1(\Omega)$ , os quais são definidos (satisfazendo certas propriedades no sentido fraco), como

$$\begin{aligned} H_q^1(\Omega) &:= \overline{\mathcal{D}(\Omega)} \text{ na norma de } W^{1,q}(\Omega) \\ \hat{H}_q^1(\Omega) &:= \{\mathbf{v} \in W_0^{1,q}(\Omega) : \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ em } \Omega\} \end{aligned}$$

Não é difícil ver que para todo  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $q \geq 1$ ,  $H_q^1(\Omega) \subset \hat{H}_q^1(\Omega)$ . Duas questões interessantes que se podem formular são as seguintes:

1. Para que tipo de domínios  $\Omega$ , temos a igualdade  $H_q^1(\Omega) = \hat{H}_q^1(\Omega)$ . (Esta questão é importante para estudar a unicidade das equações de *Stokes* [Ga, p.148].
2. Se  $H_q^1(\Omega) \neq \hat{H}_q^1(\Omega)$ , qual é a dimensão do quociente entre  $\hat{H}_q^1(\Omega)$  e  $H_q^1(\Omega)$ , ou seja,

$$\dim(\hat{H}_q^1/H_q^1) = ?$$

E será possível construir uma base para este espaço quociente?

Para iniciarmos nestas questões, vejamos os seguintes exemplos:

**Exemplo 1.** Consideremos o cilindro infinito  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ . Pela densidade de  $\mathcal{D}(\Omega)$  em  $H_2^1(\Omega)$  é fácil ver que se  $\mathbf{v} \in H_2^1(\Omega)$ , então o fluxo  $\phi \equiv \int_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ , sendo  $\Sigma$  qualquer seção transversal em  $\Omega$ .

Agora, se  $\mathbf{v} \in \hat{H}_2^1(\Omega)$ , o fluxo  $\phi$  também é zero. De fato, primeiro notemos que aplicando a desigualdade de Hölder, temos que

$$\left| \int_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right| \leq |\Sigma|^{1/2} \left( \int_{\Sigma} \mathbf{v}^2 \right)^{1/2}. \quad (1.45)$$

Em segundo lugar, existe uma seqüência de números reais  $\{x_3^k\}$ , com  $|x_3^k| \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1 + |x_3^k|) \int_{\Sigma} \mathbf{v}^2 = 0.$$

De fato, caso contrário, existiria  $\epsilon > 0$ ,  $s > 0$  tal que  $(1 + |x_3|) \int_{\Sigma} \mathbf{v}^2 \geq \epsilon$  para todo  $|x_3| \geq s$ , logo se chamamos de  $A = \{x_3 : |x_3| \geq s\}$  temos

$$\int_A \int_{\Sigma} \mathbf{v}^2 = \int_A \frac{1 + |x_3|}{1 + |x_3|} \int_{\Sigma} \mathbf{v}^2 \geq \int_A \frac{\epsilon}{1 + |x_3|} dx_3 = \epsilon \ln(1 + |x_3|) \Big|_{|x_3|=s}^{\infty} = \infty.$$

Mas,

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}^2 \geq \int_A \frac{1 + |x_3|}{1 + |x_3|} \int_{\Sigma} \mathbf{v}^2,$$

então  $\|\mathbf{v}\|_{2,\Omega}^2 = \infty$  o que é absurdo.

Finalmente, como  $|\Sigma|/(1+|x_3|)$  é limitado, juntando as três observações acima, obtemos que o fluxo  $\phi$  é nulo, pois

$$|\phi|^2 \leq |\Sigma| \|\mathbf{v}\|_{2,\Sigma}^2 = \frac{|\Sigma|}{(1+|x_3^k|)} (1+|x_3^k|) \int_{\Sigma} \mathbf{v}^2 \rightarrow 0.$$

Este exemplo mostra que o fluxo  $\phi$  ser nulo é uma característica comum entre os espaços que estamos considerando. Agora vejamos o seguinte exemplo para ver diferenças entre eles.

**Exemplo 2.** Consideremos o domínio  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1 + x_3^2\}$ .

Se  $\mathbf{v} \in H_2^1(\Omega)$ , então  $\phi = 0$ . Se  $v \in \hat{H}_2^1(\Omega)$ , temos que  $|\Sigma|/(1+|x_3|)$  não é limitada, pois  $|\Sigma| = \pi(1+x_3^2)^2$  logo  $|\Sigma|/(1+|x_3|) \rightarrow \infty$  quando  $|x_3| \rightarrow \infty$ . O exemplo anterior leva a pensar na possibilidade de existência de campos com divergente nulo em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , verificando a segunda observação do exemplo anterior, com  $\phi \neq 0$  em  $\Sigma$ , obtendo assim que  $H_2^1(\Omega) \neq \hat{H}_2^1(\Omega)$ .

Um primeiro exemplo de não coincidência entre estes espaços foi dado por Heywood (1976)[Ga, p.151].

Em domínios limitados temos igualdade, precisando somente certo tipo de regularidade da fronteira de  $\Omega$  [Ga, p.148]. Em domínios com fronteira não compacta existem considerações particulares; por exemplo, se  $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ ,  $H_q^1(\Omega) = \hat{H}_q^1(\Omega)$  sempre que  $1 < q < \infty$ . Uma questão de particular interesse é saber o que acontece quando o domínio  $\Omega$  é um domínio com canais, i.e.

$$\Omega = \cup_{i=0}^m \Omega_i,$$

onde  $\Omega_0$  é limitado e os  $\Omega_i$  são domínios dois a dois disjuntos da forma  $\Omega_i = \{(\bar{x}, x_n) : \bar{x} \in \Sigma(x_n)\}$  sendo  $\Sigma(x_n)$  a seção transversal de  $\Omega_i$  por  $x_n$ . No caso particular em que  $\Sigma(x_n)$  não depende de  $x_n$ , i.e, cada  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  é um cilindro reto (semi-infinito), mostra-se que  $H_q^1(\Omega) = \hat{H}_q^1(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$ .

O seguinte resultado (de Maslenikova-Bogovskii) sintetiza a resposta às questões feitas anteriormente.

**Teorema 1.23** [Ga, p.156-p.163] Seja  $\Omega = \cup_{i=0}^m \Omega_i$ , onde  $\Omega_0$  é um compacto,  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  são disjuntos, os quais em sistemas de coordenadas cartesianas possivelmente diferentes, são expressos da forma

$$\Omega_i = \{x = (\bar{x}, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0, |\bar{x}| < f_i(x_n)\}$$

com  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  satisfazendo as seguintes condições

- $f_i(t) \geq f_0 > 0$
- $|f_i(t_2) - f_i(t_1)| \leq M|t_2 - t_1|$  para algumas constantes  $f_0$ ,  $M$  e para todo  $t, t_1, t_2 > 0$ .

Então

1. Se  $\Omega_R \equiv \Omega \cap B_R$  satisfaz a condição do cone<sup>||</sup> para todo  $R > \delta(\Omega_0)$ , sendo  $B_R$  a bola aberta de centro 0 e raio  $R$ , temos que  $H_q^1(\Omega) = \hat{H}_q^1(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$  se, e somente se, para todo  $\mathbf{v} \in \hat{H}_q^1(\Omega)$ ,  $\phi_i = \int_{\Sigma_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ .
2.  $H_q^1(\Omega) = \hat{H}_q^1(\Omega)$ ,  $\forall q \in [1, n/(n-1)]$ .
3. Suponhamos que  $H_q^1(\Omega) \subsetneq \hat{H}_q^1(\Omega)$  e que as integrais  $\int_0^\infty f_i^{(1-n)(q-1)}(t) dt$  convierjam para  $i = 1, \dots, l$  com  $l \leq m$  e diverjam para  $i = l+1, \dots, m$ . Então, a dimensão do espaço  $\hat{H}_q^1(\Omega)/H_q^1(\Omega)$  é igual a  $l-1$ .

Considerando  $\mathbf{v} \in \hat{H}_q^1$ ,  $m \geq 2$ , observemos que nas condições do Teorema acima, em toda seção transversal  $\Sigma_i = \Sigma_i(n)$  temos

$$|\phi_i|^q \equiv \left| \int_{\Sigma_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right|^q \leq C f_i^{(n-1)(q-1)}(x_n) \int_{\Sigma_i} |\mathbf{v}|^q,$$

com  $\phi_i$  independente de  $x_n$  e assim,

$$|\phi_i|^q \beta_i \equiv |\phi_i|^q \int_0^\infty f_i^{(1-n)(q-1)}(x_n) dx_n \leq C \|\mathbf{v}\|_q^q.$$

Portanto, se  $\beta_i = \infty \Rightarrow \phi_i = 0$ . Como a soma dos fluxos deve ser zero, se existirem  $m-1$  integrais  $\beta_i$  que divergem, concluímos que  $\phi_i = 0$  para todo  $i = 1, \dots, m$  e assim,

---

<sup>||</sup>Um conjunto  $\Omega$  satisfaz a condição do cone se existe um cone  $C$  que é a intersecção de uma bola aberta centrada na origem, com um conjunto do tipo  $\{\lambda z : \lambda > 0, z \in \mathbb{R}^n, |z - y| < r\}$ , tal que todo ponto  $x \in \partial\Omega$  é o vértice de um cone  $C_x$  congruente a  $C$  e contido em  $\Omega$ .

pelo item 1. do Teorema acima,  $\hat{H}_q^1(\Omega) = H_q^1(\Omega)$ , logo em caso de  $H_q^1(\Omega) \subsetneq \hat{H}_q^1(\Omega)$  pelo menos duas das integrais  $\beta_i$  devem convergir.

Para finalizar este Capítulo, vamos definir um outro par de espaços de funções junto com algumas propriedades que consideramos importantes, as quais serão usadas no Capítulo seguinte.

Denotamos por  $\mathcal{D}_0^{1,q}(\Omega)$  o subespaço de  $D_0^{1,q}$  (vide p.19) definido como sendo o fecho de  $\mathcal{D}(\Omega)$  na norma de  $D_0^{1,q}(\Omega)$ . Observemos que para qualquer domínio  $\Omega$  do  $\mathbb{R}^n$ ,  $H_q^1(\Omega) \subset \mathcal{D}_0^{1,q}(\Omega)$ . De fato, seja  $\mathbf{u} \in H_q^1(\Omega)$ , então existe uma seqüência  $\{\mathbf{u}_k\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$  tal que  $\mathbf{u}_k$  converge a  $\mathbf{u}$  na norma  $\|\cdot\|_{1,q,\Omega}$ , implicando em particular a convergência de  $\mathbf{u}_k$  para  $\mathbf{u}$  na seminorma  $|\cdot|_{1,q,\Omega}$ , ou seja,  $\mathbf{u} \in \mathcal{D}_0^{1,q}(\Omega)$ . Para alguns domínios, temos a outra inclusão; por exemplo, tomemos  $\Omega$  limitado. Então, dada  $\mathbf{u} \in \mathcal{D}_0^{1,q}(\Omega) \subset D_0^{1,q}$ , existe uma seqüência  $\{\mathbf{u}_k\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$  tal que  $\mathbf{u}_k$  converge a  $\mathbf{u}$  na seminorma  $|\cdot|_{1,q,\Omega}$ . Como  $\mathbf{u}_k \in C_0^\infty(\Omega)$ , temos que  $\mathbf{u}_k - \mathbf{u} \in D_0^{1,q}(\Omega)$ . Como o domínio é limitado, pela Secção 1.3 sabemos que  $\mathbf{u}_k - \mathbf{u} \in W_0^{1,q}(\Omega)$ ; conseqüentemente,

$$\|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}\|_{q,\Omega} \leq c \|\nabla(\mathbf{u}_k - \mathbf{u})\|_{q,\Omega},$$

com  $c = c(n, q, \Omega)$ , logo sabendo que  $\mathbf{u}_k$  converge para  $\mathbf{u}$  na seminorma  $|\cdot|_{1,q,\Omega}$ , temos que

$$\|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}\|_{q,\Omega} \longrightarrow 0$$

e assim,  $\mathbf{u} \in H_q^1(\Omega)$ .

Tal como foi feito no caso dos espaços  $H_q^1(\Omega)$ , podemos comparar os espaços  $\mathcal{D}_0^{1,q}(\Omega)$  com os espaços  $\hat{\mathcal{D}}_0^{1,q}(\Omega) := \{\mathbf{v} \in D_0^{1,q}(\Omega) : \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ em } \Omega \text{ (no sentido fraco)}\}$ , estudando em particular os domínios para os quais eles são iguais e em quais eles são diferentes. Em geral,  $\mathcal{D}_0^{1,q}(\Omega) \subset \hat{\mathcal{D}}_0^{1,q}(\Omega)$ .

O seguinte Lema caracteriza a igualdade entre estes espaços; caracterização que usaremos no próximo Capítulo.

**Lema 1.24** [Ga, p.167] *Seja  $\Omega$  um domínio como no Teorema 1.23. Então  $\mathcal{D}_0^{1,q}(\Omega) = \hat{\mathcal{D}}_0^{1,q}(\Omega)$ , para  $q \in (1, \infty)$ , se, e somente se, todo  $\mathbf{v} \in \hat{\mathcal{D}}_0^{1,q}(\Omega)$ , verifica que*

$$\int_{\Sigma_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

i.e., se todo campo  $v \in \hat{D}_0^{1,q}(\Omega)$  tem fluxo zero através de qualquer seção transversal  $\Sigma_i$ .

Para domínios limitados, como  $D_0^{1,q}(\Omega) = H_q^1(\Omega)$ , segue-se que  $\hat{D}_0^{1,q}(\Omega) = \hat{H}_q^1(\Omega)$ .

Um último resultado que também será usado, é dado pelo Teorema abaixo.

**Teorema 1.25** [Ga, p.171] *Seja  $\Omega$  domínio do  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . Suponhamos que  $\mathcal{F}$  é um funcional linear contínuo, em  $D_0^{1,q}(\Omega')$ ,  $1 < q < \infty$ , identicamente nulo em  $\hat{D}_0^{1,q}(\Omega')$ , sendo  $\Omega'$  qualquer subconjunto limitado de  $\Omega$ , com  $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ . Então, existe  $p \in L_{loc}^q(\Omega)$  tal que  $\mathcal{F}$  admite a seguinte representação*

$$\mathcal{F}(\psi) = \int_{\Omega} p \nabla \cdot \psi, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Para domínios limitados temos também a unicidade de  $p$ , a menos de uma constante, e, além disso ela é globalmente integrável. Mais precisamente, temos o seguinte Teorema.

**Teorema 1.26** [Ga, p.170] *Seja  $\Omega$  um domínio limitado do  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , que satisfaz a condição do cone. Então, qualquer funcional linear contínuo  $\mathcal{F}$  em  $D_0^{1,q}(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$ , identicamente nulo em  $\hat{D}_0^{1,q}(\Omega)$ , é da forma*

$$\mathcal{F}(\psi) = \int_{\Omega} p \nabla \cdot \psi, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega),$$

para uma única  $p \in L^q(\Omega)$  (a menos de uma constante).

## Capítulo 2

# O Fluxo de Poiseuille e o Problema de Leray

As equações homogêneas de *Navier-Stokes* para um fluido viscoso incompressível num certo domínio  $\Omega$ , no estado estacionário, são dadas por

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \nabla P &= 0 \text{ em } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \text{ em } \Omega, \end{aligned}$$

sendo

1.  $\nu$  a viscosidade dinâmica dada no sistema CGS em  $gr/(cm.seg)$ ;
2.  $P$  a pressão cuja unidade de medida é o Pascal (no CGS, Pascal =  $gr/(cm .Seg^2)$ ).
3.  $\mathbf{v}$  a velocidade do fluido dada no CGS em  $cm/seg$ .

Acontece que o sistema

$$-\nu\Delta\mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \nabla P = 0 \text{ em } \Omega$$

do ponto de vista físico estaria comparando grandezas em unidades de medida diferentes; portanto é necessário fazer uma normalização de tal sistema. Para isso vamos chamar de

1.  $\rho$  a densidade do fluido (constante) dada no sistema CGS em  $gr/cm^3$ ;

2.  $\mu = \nu/\rho$  a viscosidade cinemática do fluido dada no sistema CGS em  $cm^2/seg$ ;
3.  $p = P/\rho$  a pressão normalizada.

Assim podemos normalizar as equações de Navier-Stokes acima, e obter um novo sistema coerente fisicamente, a saber:

$$\begin{aligned} -\mu\Delta\mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \nabla p &= 0 \text{ em } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \text{ em } \Omega. \end{aligned} \tag{2.1}$$

A primeira equação expressa a conservação do momento linear (no estado estacionário) e a segunda, o fato do fluido ser incompressível, ou seja, fluidos cuja densidade pode ser considerada invariável, i.e, não existe uma notável compressão ou expansão do fluido, baixo efeitos de pressão.

Do ponto de vista das aplicações, e também matemático, é importante considerar fluidos em domínios  $\Omega$  tendo fronteira ilimitada tais como canais infinitos com seções transversais constantes ou variáveis \*. Consideremos  $\Omega$  como sendo um domínio ilimitado do  $\mathbb{R}^n$ , com fronteira Lipschitziana, formado pela união de  $m > 1$  saídas no infinito, os canais, ou seja

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^m \Omega_i$$

onde  $\Omega_0$  é um subconjunto compacto de  $\Omega$  e  $\Omega_i, i = 1, \dots, m$  domínios disjuntos, os quais, possivelmente em sistemas de coordenadas cartesianas diferentes, podem ser expressos da seguinte forma:

$$\Omega_i = \{x = (\bar{x}, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0, \bar{x} \equiv (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \Sigma_i(x_n)\}.$$

Aqui,  $\Sigma_i = \Sigma_i(x_n)$  são domínios de  $\mathbb{R}^{n-1}$ , que dependem suavemente de  $x_n$ , simplesmente conexos e com  $|\Sigma_i(x_n)| = c_i = \text{constante} > 0$ ;  $|\Sigma_i(x_n)|$  denota a medida de Lebesgue de  $\Sigma_i(x_n)$  em  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

---

\*No Capítulo 3, apresentaremos uma aplicação concreta, quando consideramos o escoamento de um fluido através de domínios com canais, cujas saídas têm seções trasversais constantes.



Se temos o escoamento de um fluido incompressível e supondo condições de aderência na fronteira (i.e, velocidade do fluido nula na fronteira de  $\Omega$ ) é fácil deduzir que o fluxo

$$\phi_i := \int_{\Sigma_i} \mathbf{v}(\bar{x}, x_n) \cdot \mathbf{n}_i \, d\sigma(\bar{x})$$

através de uma seção transversal  $\Sigma_i$  qualquer de  $\Omega_i$  é constante em  $\Omega_i$  com relação a  $x_n$ ; acima,  $\mathbf{n}_i$  denota a normal unitária a  $\Sigma_i$  apontando na direção de crescimento de  $x_n$ . Isto é consequência do Teorema da Divergência aplicado à região  $\Omega^* \subset \Omega_i$  limitada lateralmente por duas seções transversais  $\Sigma_i$  e  $\Sigma'_i$ , junto ao fato do fluido ser incompressível ( $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ):

$$0 = \int_{\Omega^*} \nabla \cdot \mathbf{v} = \int_{\partial\Omega^*} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i = \int_{\Sigma'_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i - \int_{\Sigma_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i.$$

Por esta razão, uma questão natural é estabelecer a existência de um campo de velocidade com fluxos  $\phi_i$  dados, assim como também descrever (se for possível) o campo velocidade do fluido nos canais quando  $x_n \rightarrow \infty$ . Nesta Dissertação não vamos tratar desta questão de uma forma geral (uma boa referência é [La], mas vamos tratar do *Problema de Leray*, em domínios com canais cilíndricos. O Problema de Leray em um domínio  $\Omega$  com saídas cilíndricas consiste em determinar o movimento de um fluido em  $\Omega$  com um fluxo dado  $\phi_i$  em cada canal e tendendo em cada um deles à solução de Poiseuille correspondente a  $\phi_i$ .

Neste Capítulo vamos provar a existência e unicidade de soluções para o Problema de Leray em  $\Omega = \bigcup_{i=0}^n \Omega_i$ . Além disso, vamos descrever o comportamento assintótico da solução junto com todas suas derivadas nas saídas dos canais  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , i.e. quando  $x_n \rightarrow \infty$ . †

## 2.1 O Fluxo de Poiseuille

O Fluxo de Poiseuille é a solução de (2.1) em um domínio cilíndrico  $\Omega$  sendo  $\mathbf{v}$  um campo de velocidade paralelo. Mais precisamente, se denotarmos por  $\mathbf{e}_n$  a direção do

---

†Se  $\Omega$  tem  $m$  canais, devemos dar os fluxos  $\phi_1, \dots, \phi_m$  em  $\Sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  de modo que  $\phi_1 + \dots + \phi_m = 0$ .

cilindro  $\Omega$ , temos  $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_n$  com  $v$  sendo a velocidade escalar função somente de  $\bar{x}$  ( $\mathbf{x} = (\bar{x}, x_n)$ ) e é fácil de ver que neste caso o sistema (2.1) se reduz ao gradiente de pressão ser uma constante  $c$  vezes  $\mathbf{e}_n$  (na verdade,  $p = p(x_n)$  com  $p'(x_n) = c$ ) e ao problema de Dirichlet para  $v$ ,

$$\begin{cases} -\mu\Delta v = c \text{ em } \Omega \\ v = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.2)$$

Vejamos dois exemplos interessantes.

### Exemplo 1.

Consideremos o escoamento de um fluido planar (viscoso e incompressível em estado estacionário) entre duas placas localizadas em  $y = 0$  e  $y = 1$ , como mostra a figura.

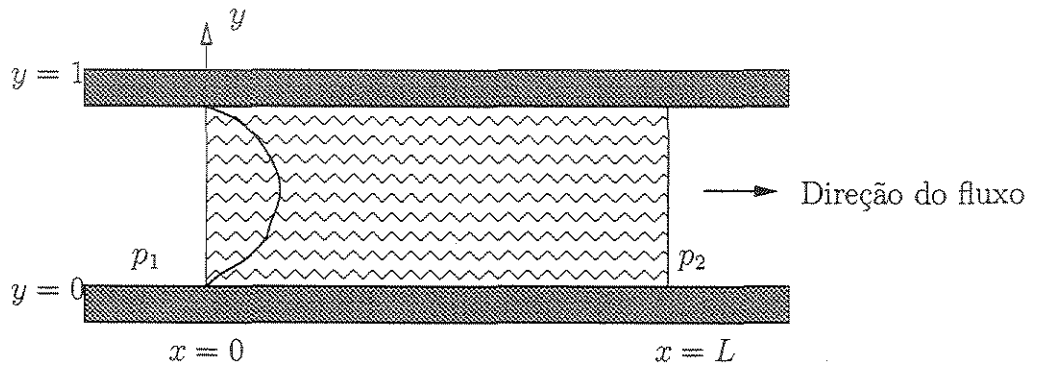


Figura 2.1: Fluxo Poiseuille

Queremos encontrar uma solução  $\mathbf{u}(x, y) = (u_1(x, y), 0)$  e  $p = p(x)$ , com  $p_1 = p(0), p_2 = p(L)$  supondo além disso que o fluido se movimenta de forma constante na direção positiva do eixo  $x$  (ou equivalentemente,  $p_1 > p_2$ ).

A condição de incompressibilidade junto com o requisito de que a velocidade seja paralela, implica que  $\partial_x u_1 = 0$  e assim a primeira equação em (2.1) fica reduzida a

$$-\mu[\partial_x^2 u_1 + \partial_y^2 u_1] + u_1 \partial_x u_1 + \partial_x p = 0$$

com condições de fronteira  $u_1(x, 0) = u_1(x, 1) = 0$ .

Devido a que  $\partial_x u_1 = 0$ , temos que  $u_1(x, y) = u_1(y)$  e conseqüentemente obtemos

$$p' = \mu u_1''.$$

Como cada lado desta última igualdade depende de variáveis diferentes, temos que  $p' = cte = \mu u_1''$ , de onde, integrando obtemos

$$p(x) = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{L}x, \quad \text{e} \quad u_1(y) = -\frac{p_1 - p_2}{2\mu L}y^2 + \frac{p_1 - p_2}{2\mu L}y.^\dagger$$

### Exemplo 2.

Consideremos um domínio  $\Omega_\epsilon$  como sendo

$$\Omega_\epsilon = \bigcup_{i=0}^m \Omega_i^\epsilon \quad (2.3)$$

onde  $\Omega_0^\epsilon$ , é um conjunto limitado (que pode ser vazio) formado no cruzamento dos domínios  $\Omega_i^\epsilon$ ,  $i = 1, \dots, m$ , e contendo o ponto de cruzamento o, origem do sistema central de coordenadas, e os domínios  $\Omega_i^\epsilon$ ,  $i = 1, \dots, m$  são cilindros retos. Mais explicitamente, eles têm a seguinte formulação. Sejam  $S^i$  subconjuntos do  $\mathbb{R}^2$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  domínios limitados de classe  $C^2$ . Em cada canal, em sistemas de coordenadas possivelmente diferentes,  $(e_k^i)$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,

$$\Omega_i^\epsilon = \{x = (\bar{x}^i, x_3^i) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_3^i < L_i, \bar{x}^i = (x_1^i, x_2^i) \in \epsilon S^i\}. \quad (2.4)$$

O fluxo de Poiseuille no  $i$ -ésimo cano é dado por:

$$P_i^\epsilon = \frac{1}{L_i}(p_i - q)x_3^i + q \quad (2.5)$$

$$U_i^\epsilon = \epsilon^2 \mathcal{U}_i^\epsilon(x) = \epsilon^2 \frac{w^i(\bar{x}^i/\epsilon)}{L_i}(q - p_i)e_3^i \quad (2.6)$$

onde  $w^i$  é a solução do  $i$ -ésimo problema auxiliar

$$\begin{cases} -\mu \Delta w^i = 1 & \text{em } S^i \\ w^i = 0 & \text{em } \partial S^i \end{cases} \quad (2.7)$$

---

<sup>†</sup>Observemos que o campo velocidade descreve uma parábola.

Observemos também que os coeficientes da velocidade embora tenham a mesma magnitude, eles estão dados em unidades de medida diferentes.

$q$  é valor (constante) da pressão no ponto de cruzamento dada por (2.8) abaixo e  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  são os valores da pressão nas saídas de cada canal. Agora, sendo o fluxo incompressível, usando o Teorema da divergência temos que

$$0 = \int_{\Omega_\epsilon} \nabla \cdot U_i^\epsilon = \int_{\partial\Omega_\epsilon \setminus \cup \Sigma_i^i} U_i^\epsilon \cdot e_3^i + \sum_{i=1}^m \int_{\Sigma_i^i} U_i^\epsilon \cdot e_3^i = \sum_{i=1}^m \int_{\Sigma_i^i} U_i^\epsilon \cdot e_3^i,$$

e como  $U_i^\epsilon \cdot e_3^i = \epsilon^2 \frac{w^i(\bar{x}^i/\epsilon)}{L_i} (q - p_i)$ , temos que

$$\sum_{i=1}^m \int_{\Sigma_i^i} \epsilon^2 \frac{w^i(\bar{x}^i/\epsilon)}{L_i} (q - p_i) = 0$$

para encontrar

$$q = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{p_i}{L_i} \int_{S^i} w^i}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{L_i} \int_{S^i} w^i}. \quad (2.8)$$

Notemos que  $\int_{S^i} w^i = \mu \int_{S^i} |\nabla w^i|^2 > 0$ . Observemos também que se todos os canais tem a mesma secção transversal e o mesmo comprimento,  $q$  é simplesmente a média aritmética das presões  $p_i$ .

Em  $\mathbb{R}^3$  se a seção transversal do  $i$ -ésimo canal é um círculo de raio  $r_i$ , i.e.

$$S^i = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y| < r_i\},$$

podemos resolver explicitamente o problema (2.7). Para isso, escrevemos o Laplaciano em coordenadas polares, i.e.

$$\Delta w^i = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w^i}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w^i}{\partial \theta^2}, \quad r = |y|,$$

e procuraremos solução radial  $w^i = \omega^i(r)$ , i.e.

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw^i}{dr} \right) = -\frac{1}{\mu},$$

donde

$$w^i = -\frac{r^2}{4\mu} + A \log r + B.$$

Sabemos que a solução de (2.7) é limitada, logo  $A = 0$ . Por outro lado, a condição  $\omega^i|_{\partial S} = 0$  nos dá

$$B = \frac{r_i^2}{4\mu}.$$

Portanto,

$$w^i(y) = \frac{1}{4\mu}(r_i^2 - |y|^2).$$

Integrando a última expressão no círculo, obtemos

$$\int_{s^i} w_i = \frac{\Pi r_i^4}{8\mu}$$

, donde obtemos que

$$q = \frac{\sum_{i=1}^m L_i^{-1} r_i^4 p_i}{\sum_{i=1}^m L_i^{-1} r_i^4},$$

o que por sua vez, sendo substituído em (2.5) fornece a forma explícita da pressão.

## 2.2 O problema de Leray

Nesta Seção vamos mostrar a existência e a unicidade do problema de Leray para o sistema de Stokes- problema (2.9)-(2.12) abaixo. Quanto a regularidade, ver o Teorema 2.3 no final desta seção.

Consideremos um fluido dentro de um domínio suave  $\Omega$  do  $\mathbb{R}^n$ , suave com somente (por simplicidade) duas saídas infinitas, ou seja,

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^2 \Omega_i$$

onde  $\Omega_0$  é um subconjunto compacto de  $\Omega$  e  $\Omega_1, \Omega_2$  são domínios disjuntos, os quais, em sistemas de coordenadas cartesianas, são dados por

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{x \in \mathbb{R}^n : x_n < 0, \bar{x} \in \Sigma_1\} \\ \Omega_2 &= \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0, \bar{x} \in \Sigma_2\}. \end{aligned}$$

$\Sigma_1, \Sigma_2$  são domínios suaves de  $\mathbb{R}^{n-1}$ , simplesmente conexos e limitados. Denotemos por  $\Sigma$ , qualquer intersecção perpendicular de  $\Omega$  com o plano  $(n - 1)$ -dimensional, a

qual em  $\Omega_i$  se reduz a  $\Sigma_i$ ,  $i = 1, 2$ . Além disso,  $\mathbf{n}$  indica o vetor unitário, normal a  $\Sigma$  e orientado de  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$ , i.e.,  $\mathbf{n} = -e_n$  em  $\Omega_1$  e  $\mathbf{n} = e_n$  em  $\Omega_2$ . Ver a figura 2.2.

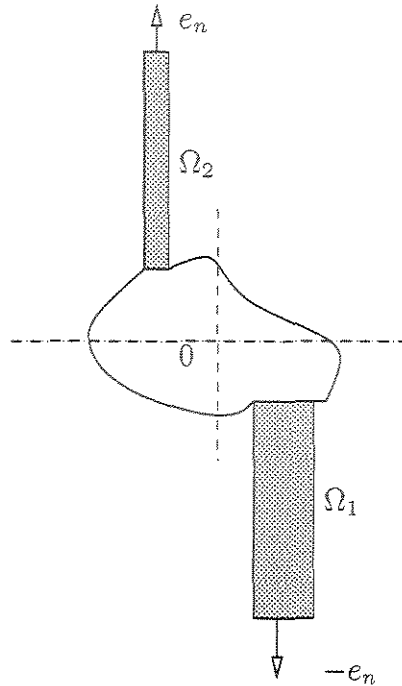


Figura 2.2: domínio com canais

Nosso objetivo é resolver o seguinte problema conhecido na literatura como problema de Leray: Dados  $\phi_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\phi_1 + \phi_2 = 0$ , determinar uma solução  $(\mathbf{v}, p)$  para o sistema de Stokes

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{v} = \nabla p \text{ em } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ em } \Omega \end{cases} \quad (2.9)$$

tal que

$$\mathbf{v} = 0 \text{ em } \partial\Omega \quad (2.10)$$

$$\int_{\Sigma_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \phi_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.11)$$

e

$$\lim_{|x_n| \rightarrow \infty} \mathbf{v} = \mathcal{U}^i \quad (2.12)$$

onde  $\mathcal{U}^i$  é o campo de velocidade do fluido de Poiseuille em  $\Omega_i$  (dado pela equação (2.6)), correspondente ao fluxo  $\phi_i$ .<sup>§</sup>

**Definição 2.1** *Um campo  $\mathbf{v} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é dito solução fraca do problema (2.9)-(2.12) se*

1.  $\mathbf{v} \in W_{loc}^{1,2}(\bar{\Omega})$ ;
2.  $\mathbf{v}$  satisfaz a relação  $(\nabla \mathbf{v}, \nabla \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ;
3.  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  em  $\Omega$ , no sentido fraco;
4.  $\mathbf{v} = 0$  em  $\partial\Omega$ , no sentido do traço;
5.  $\int_{\Sigma_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \phi_i$ ;
6.  $(\mathbf{v} - \mathcal{U}^i) \in W^{1,2}(\Omega_i), \quad i = 1, 2$ .

Observemos que se multiplicamos a primeira igualdade de (2.9) por uma  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  e integramos formalmente por partes (em  $\Omega$ ) temos que

$$0 = \int_{\Omega} \Delta \mathbf{v} \varphi - \int_{\Omega} \nabla p \varphi = - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} \nabla \varphi - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \varphi = - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} \nabla \varphi$$

ou seja, temos a condição 2 acima.

Observemos também que na Definição acima, o item 1. dá um certo grau de regularidade e os itens 2. – 5. traduzem no sentido fraco as equações (2.9)-(2.11). O item 6. é uma forma fraca da condição (2.12). De fato, denotando por  $\Sigma_i(x_n)$  a seção transversal em  $\Omega_i$ , perpendicular ao vetor normal  $\mathbf{n}$ , e que está a uma distância  $x_n$  da origem, como  $\mathbf{v} - \mathcal{U}^i \in W^{1,2}(\Omega_i), \quad i = 1, 2$ , então dado  $\epsilon > 0$ , existe  $t > 0$  tal que

$$\int_{\Sigma_i(x_n)} |\mathbf{v} - \mathcal{U}^i|^2 \leq c \int_{t > x_n} \int_{\Sigma_i} |(\mathbf{v} - \mathcal{U}^i)|^2 + |\nabla(\mathbf{v} - \mathcal{U}^i)|^2 < \epsilon, \quad (2.13)$$

---

<sup>§</sup>Na verdade, podemos mostrar que para soluções de Poiseuille, existe uma correspondência um a um entre a variação da pressão e o fluxo  $\phi_i = \int_{\Sigma_i} \mathcal{U}^i \cdot \mathbf{e}_3^i d\bar{x}$ .

pois pelo Teorema do traço (Teorema 1.13)

$$\int_{\Sigma_i(x_n)} |\mathbf{v} - \mathcal{U}^i|^2 \leq c \|\mathbf{v} - \mathcal{U}^i\|_{1,2,\Omega^*},$$

sendo  $\Omega^* = \{x \in \Omega : x_n < t < l\}$ , para algum  $l$  fixo. Conseqüentemente, estimamos a desigualdade acima pelo membro da direita da desigualdade (2.13).

Portanto,(2.13) implica que

$$\lim_{|x_n| \rightarrow \infty} \int_{\Sigma(x_n)} |\mathbf{v} - \mathcal{U}^i|^2 = 0 \text{ em } \Omega_i.$$

Uma outra observação importante é que a Definição 2.1 é aparentemente omissa em relação à pressão  $p$ , mas isto é só aparência; na verdade podemos recuperar a pressão tendo  $\mathbf{v}$ , i.e, se podemos mostrar que a toda solução fraca, podemos associar um correspondente campo de pressões  $p$ . Isso segue apartir do Lema abaixo.

**Lema 2.2** *Seja  $\mathbf{v}$  solução fraca do problema de Leray. Então existe  $p \in L^2_{loc}(\Omega)$  tal que*

$$(\nabla \mathbf{v}, \nabla \Psi) = (p, \nabla \cdot \Psi), \quad \forall \Psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

**Demonstração.** Dado  $\Omega'$  qualquer domínio limitado tal que  $\overline{\Omega'} \subset \Omega$  consideremos o funcional linear contínuo  $F : D_0^{1,2}(\Omega') \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F(\psi) = (\nabla \mathbf{v}, \nabla \psi)$ . Da segunda condição da Definição 2.1,  $F$  é identicamente nulo em  $\mathcal{D}(\Omega)$  e por continuidade o é também em  $\mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega')$ . Como  $\Omega'$  é limitado, então pelo feito na Seção 1.5,  $\mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega') = \hat{\mathcal{D}}_0^{1,2}(\Omega')$ , e conseqüentemente pelo Teorema 1.25, existe  $p \in L^2_{loc}(\Omega)$  tal que

$$F(\psi) = \int_{\Omega} p \nabla \cdot \psi, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega). \quad \square$$

Agora, vamos mostrar a existência e unicidade da solução fraca para o problema de Leray. Denotamos por  $\mathbf{a}$  um campo vetorial, satisfazendo as seguintes propriedades:

1.  $\mathbf{a} \in W_{loc}^{2,2}(\bar{\Omega})$
2.  $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$  em  $\Omega$
3.  $\mathbf{a} = 0$  em  $\partial\Omega$



4.  $\mathbf{a} = \mathcal{U}^1$  em  $\Omega_1^R$ ,  $\mathbf{a} = \mathcal{U}^2$  em  $\Omega_2^R$ , para algum  $R > 0$ , onde para  $\tau > 0$

$$\Omega_1^\tau = \{x \in \Omega_1 : x_n < -\tau\}, \quad \Omega_2^\tau = \{x \in \Omega_2 : x_n > \tau\}.$$

Vamos construir explicitamente o campo  $\mathbf{a}$ : Sejam  $\beta_i(x), i = 1, 2$ , funções em  $C^\infty(\Omega)$  tais que

$$\beta_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \overline{\Omega_i^R} \\ 0, & \text{se } x \in \Omega - \overline{\Omega_i^{R/2}}, \end{cases}$$

e  $V(x) = \sum_{i=1}^2 \beta_i(x) \mathcal{U}^i$ , onde  $\mathcal{U}^i$  é estendido a todo  $\Omega$  por zero fora de  $\Omega_i$ . É claro que  $V \in C^\infty(\overline{\Omega})$ , pois em  $\Omega_i^R$ ,  $V$  coincide com  $\mathcal{U}^i$ , e fora de  $\Omega_i^R, i = 1, 2$ ,  $V$  decresce suavemente de  $\mathcal{U}^i$  a zero, devido à construção de  $\beta^i$ . Logo,  $V$  satisfaz a condição 1. acima. Também é claro que  $V$  satisfaz as condições 3. e 4. No entanto, não temos a condição 2. acima automaticamente satisfeita por  $V$  em

$$A_R := \Omega - (\overline{\Omega_1^R} \cup \overline{\Omega_2^R}),$$

então consideramos o problema

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{w} = -\nabla \cdot V \text{ em } A_R \\ \mathbf{w} \in W_0^{2,2}(A_R) \\ \|\mathbf{w}\|_{2,2,A_R} \leq c \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_{1,2,A_R}. \end{cases}$$

Como  $\nabla \cdot \mathcal{U}^i = 0$  em  $A_R$  e  $\nabla \cdot \mathcal{U}^i \in W_0^1(A_R)$ , então,  $\nabla \cdot V \in W_0^{1,2}(A_R)$ . Além disso,

$$\int_{A_R} \nabla \cdot \mathbf{V} = \sum_{i=1}^2 \int_{A_R} \nabla \cdot (\beta_i(x) \mathcal{U}^i) = \sum_{i=1}^2 \int_{A_R} [\beta_i(x) \nabla \cdot \mathcal{U}^i + \mathcal{U}^i \cdot \nabla \beta_i(x)] = 0$$

então pelo Teorema 1.22, o campo  $\mathbf{w}$  existe. Estendendo  $\mathbf{w}$  como sendo zero fora de  $A_R$ , definamos o campo

$$\mathbf{a}(x) = V(x) + \mathbf{w}(x).$$

$\mathbf{w} \in W^{2,2}(\Omega)$  e também não é difícil verificar que  $\mathbf{a}(x)$  satisfaz as condições 1.-4.

Para mostrar a existência do problema de Leray, vamos pensar em uma solução fraca da forma

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{a}, \quad \text{onde } \mathbf{u} \in \mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega). \quad (2.14)$$

Tendo em vista o item 2. da Definição 2.1 ou a equação (2.9)  $\mathbf{u}$  deve ser uma solução fraca da equação

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla p - \Delta \mathbf{a},$$

i.e.

$$(\nabla \mathbf{u}, \nabla \varphi) = (\Delta \mathbf{a}, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (2.15)$$

(pois

$$(\Delta \mathbf{a}, \varphi) = (\Delta \mathbf{v}, \varphi) - (\Delta \mathbf{u}, \varphi) = -(\Delta \mathbf{u}, \varphi) = (\nabla \mathbf{u}, \nabla \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)).$$

A existência de  $\mathbf{u} \in \mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega)$  satisfazendo (2.15) é garantida pelo Teorema de Representação de Riesz [Ev, p.639]. De fato o lado direito de (2.15), define um funcional linear contínuo em  $\mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega)$ . A linearidade é clara e por outra parte em  $\Omega_i^R$ ,  $\mathbf{a}(x) = V(x) + \mathbf{w}(x) = \mathcal{U}^i(x)$ , implicando que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1^R} \Delta \mathbf{a} \cdot \varphi &= \int_{\Omega_1^R} \Delta \mathcal{U}^1(x) \cdot \varphi = -\frac{(q-p_1)}{\mu L_1} \int_{-\infty}^R \left[ \int_{\Sigma_1} \varphi \cdot \mathbf{n} d\Sigma_1 \right] dx_n = 0 \\ \int_{\Omega_2^R} \Delta \mathbf{a} \cdot \varphi &= \int_{\Omega_2^R} \Delta \mathcal{U}^2(x) \cdot \varphi = -\frac{(q-p_2)}{\mu L_2} \int_R^{\infty} \left[ \int_{\Sigma_2} \varphi \cdot \mathbf{n} d\Sigma_2 \right] dx_n = 0 \quad e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{(\Omega_1^R \cup \Omega_2^R)^c} \Delta \mathbf{a} \cdot \varphi \right| &= \left| \int_{\partial(\Omega_1^R \cup \Omega_2^R)^c} (\nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \varphi - \int_{(\Omega_1^R \cup \Omega_2^R)^c} \nabla \mathbf{a} : \nabla \varphi \right| \\ &= \left| \int_{(\Omega_1^R \cup \Omega_2^R)^c} \nabla \mathbf{a} : \nabla \varphi \right| \\ &\leq \|\nabla \mathbf{a}\|_{2,(\Omega_1^R \cup \Omega_2^R)^c} \|\nabla \varphi\|_{2,(\Omega_1^R \cup \Omega_2^R)^c} \\ &\leq c_1 \|\Delta \mathbf{a}\|_{2,(\Omega_1^R \cup \Omega_2^R)^c} \|\nabla \varphi\|_{2,(\Omega_1^R \cup \Omega_2^R)^c} \end{aligned}$$

Logo, em qualquer caso  $|(\Delta \mathbf{a}, \varphi)| \leq c|\varphi|_{1,2,\Omega}$ , e assim temos continuidade. Conseqüentemente usando o Teorema de representação de *Riesz* garantimos a existência duma única  $\mathbf{u}$  verificando a igualdade (2.14).

Tendo  $\mathbf{u}$  satisfazendo (2.15), temos que  $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{a}$  satisfaz a condição 2. da Definição 2.1. Além disso, os demais itens da Definição 2.1 são verificados sem maiores

dificuldades (Deixamos a verificação dos mesmos ao leitor. Para isto tenhamos em conta que pelo feito na Seção 1.5,  $\mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ ).

Antes de ver a unicidade, vejamos o seguinte par de afirmações.

*Afirmação 1:*

Dado  $\Omega$  um domínio com canais como o que está sendo estudado, temos que se  $\omega \in D^{1,2}(\Omega)$  com traço zero em  $\partial\Omega$ , então  $\omega \in D_0^{1,2}(\Omega)$ . De fato, seja  $\psi_R$  de classe  $C^\infty(\Omega)$  tal que  $\psi_R|_{(\Omega_1^R \cup \Omega_2^R)^c} = 1$  e  $\psi_R|_{\Omega_i^{2R}} = 0$ ,  $i = 1, 2$ . Então,  $\psi_R\omega$  converge a  $\omega$  em  $D_0^{1,2}(\Omega)$  quando  $R \rightarrow \infty$ . Além disso, como  $\omega = 0$  em  $\partial\Omega$ , então  $\psi_R\omega \in W_0^{1,2}((\Omega_1^{2R} \cup \Omega_2^{2R})^c)$ ; portanto, existe uma seqüência  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $C_0^\infty((\Omega_1^{2R} \cup \Omega_2^{2R})^c)$  tal que  $\psi_n$  converge a  $\psi_R\omega$  na norma  $\|\cdot\|_{1,2,(\Omega_1^{2R} \cup \Omega_2^{2R})^c}$ , mas como  $C_0^\infty(\Omega_1^{2R} \cup \Omega_2^{2R}) \subset C_0^\infty(\Omega)$ , temos que  $\psi_R\omega \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . Finalmente, extendendo  $\psi_n$  como sendo zero fora de  $(\Omega_1^{2R} \cup \Omega_2^{2R})^c$  e como  $\|\nabla(\psi_n - \omega)\|_{2,\Omega} \leq \|\nabla(\psi_n - \psi_R\omega)\|_{2,\Omega} + \|\nabla(\psi_R\omega - \omega)\|_{2,\Omega}$ , podemos concluir que  $\omega \in D_0^{1,2}(\Omega)$ .  $\square$

*Afirmação 2:*

Dado  $\Omega$  um domínio com canais como o que está sendo estudado tal que  $\widehat{\mathcal{D}}_0^{1,q}(\Omega_R) = \mathcal{D}_0^{1,q}(\Omega_R)$  para todo  $R > 0$ , sendo  $\Omega_R = \Omega \cap B_R$ , então,  $\widehat{\mathcal{D}}_0^{1,q}(\Omega) = \mathcal{D}_0^{1,q}(\Omega)$ . De fato, sabemos que para qualquer domínio  $\Omega$  temos a inclusão  $\mathcal{D}_0^{1,q}(\Omega) \subset \widehat{\mathcal{D}}_0^{1,q}(\Omega)$ . Para ver a outra inclusão seja  $\mathbf{v} \in \widehat{\mathcal{D}}_0^{1,q}(\Omega)$ , logo  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ . Pelo Lema 1.24, neste domínio,  $\widehat{\mathcal{D}}_0^{1,q}(\Omega) = \mathcal{D}_0^{1,q}(\Omega)$  se, e somente se, qualquer vetor  $\mathbf{v} \in \widehat{\mathcal{D}}_0^{1,q}(\Omega)$  satisfaz

$$\int_{\Sigma_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad i = 1, 2.$$

sendo  $\Sigma_i$  seção transversal de  $\Omega_i$ . Isto ocorre, pois dado  $\mathbf{v} \in \widehat{\mathcal{D}}_0^{1,q}(\Omega)$ , temos por definição que  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , logo, pelo Teorema da divergência aplicado ao domínio  $\Omega_{iR} = \Omega_i \cap B_R$  temos que

$$0 = \int_{\Omega_i} \nabla \cdot \mathbf{v} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Omega_{iR}} \nabla \cdot \mathbf{v} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_{iR}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_{iR}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \int_{\Sigma_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}. \quad \square$$

Agora sim podemos provar a unicidade. Suponhamos, como de costume, que existe uma outra solução fraca  $\mathbf{v}_1$  do problema (2.9)-(2.12) de acordo com a Definição 2.1. Seja  $\mathbf{s} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1$ , então  $\mathbf{s} \in \mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega)$ . De fato, em  $\Omega_1^R$

$$\mathbf{s} = \mathbf{u} - (\mathbf{v}_1 - \mathcal{U}^1) + (\mathbf{a} - \mathcal{U}^1) = \mathbf{u} - (\mathbf{v}_1 - \mathcal{U}^1)$$

Analogamente,  $\mathbf{s} = \mathbf{u} - (\mathbf{v}_1 - \mathcal{U}^2$  em  $\Omega_2^R$ . Então pela condição 6. da Definição 2.1 sabemos que em  $(\Omega_1 \cup \Omega_2)^c$ ,  $\mathbf{v}_1 - \mathcal{U}^i = \mathbf{v}_1 \in W^{1,2}((\Omega_1 \cup \Omega_2)^c)$  e como  $\mathbf{v}_1 - \mathcal{U}^i \in D^{1,2}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ , temos que  $\mathbf{s} \in D^{1,2}(\Omega)$ . (Poderíamos ter feito a mesma análise com  $\mathbf{v}$  em lugar de  $\mathbf{v}_1$ ). Como  $\mathbf{s}$  é zero na fronteira de  $\Omega$ , então da Afirmação 1, temos que  $\mathbf{s} \in D_0^{1,2}(\Omega)$ . Agora, como  $\nabla \cdot \mathbf{s} = 0$ , concluímos que  $\mathbf{s} \in \hat{\mathcal{D}}_0^{1,2}(\Omega)$ . Pela Afirmação 2,  $\hat{\mathcal{D}}_0^{1,2}(\Omega) = \mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega)$ . Logo  $\mathbf{s} \in \mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega)$ . Como  $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1$  satisfazem o item 2. da Definição 2.1, temos que  $\mathbf{s}$  também o satisfaz. Por densidade,

$$(\nabla \mathbf{s}, \nabla \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega),$$

logo substituindo  $\varphi$  por  $\mathbf{s}$  na igualdade acima temos que  $\nabla \mathbf{s} = 0$  em  $\Omega$ , mas como  $\mathbf{s} = 0$  em  $\partial\Omega$ , temos que  $\mathbf{s} = 0$  em  $\Omega$  e assim encontramos  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ .

Encerraremos esta seção enunciando o seguinte Teorema sobre regularidade da solução fraca do problema de Leray. Uma sugestão da demonstração deste Teorema se encontra em ([Ga], p.311).

**Teorema 2.3** *Seja  $\mathbf{v}$  solução fraca do problema de Leray e seja  $p$  a pressão associada a  $\mathbf{v}$  pelo lema anterior. Então  $\mathbf{v}, p \in C^\infty(\bar{\Omega})$ .*

## 2.3 Comportamento Assintótico

Já sabemos pela Seção anterior, que  $\mathbf{v}$  tende ao correspondente fluxo de Poiseuille em  $\Omega_i$ , quando  $|x| \rightarrow \infty$ . Nesta Seção mostraremos que não somente  $\mathbf{v}$ , mas também todas suas derivadas, tendem às correspondentes derivadas do fluxo de Poiseuille, e que temos as mesmas propriedades para  $\nabla p$ . Para tais fins, vamos precisar do seguinte Lema

**Lema 2.4** *Seja  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0, (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \Sigma\}$  com  $\Sigma$ , uma região suave, limitada e simplesmente conexa em  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Fixados  $m \geq 0, s \geq 1, \delta \in (0, s]$ , suponhamos  $\mathbf{f} \in W^{m,q}(\omega_{s,\delta})$ . Denotemos por  $\mathbf{u} \in W^{1,q}(\omega_{s,\delta}), \tau \in L^q(\omega_{s,\delta})$  uma solução do problema*

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u} = \nabla \tau + \mathbf{f} \text{ em } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ em } \Omega \\ \mathbf{u} = 0 \text{ em } \partial\Omega - \Sigma_0 \end{cases}$$

com  $\Sigma_0 = \{x \in \bar{\Omega} : x_n = 0\}$ . Então, temos a seguinte estimativa:

$$\|\mathbf{u}\|_{m+2,q,\omega_s} + \|\nabla\tau\|_{m,q,\omega_s} \leq c(\|\mathbf{f}\|_{m,q,\omega_{s,\delta}} + \|\mathbf{u}\|_{1,q,\omega_{s,\delta}}) \quad (2.16)$$

onde  $c = c(m, q, n, \delta, \Sigma)$  e

$$\begin{aligned} \omega_s &= \{x \in \Omega : s < x_n < s + 1\} \\ \omega_{s,\delta} &= \{x \in \Omega : s - \delta < x_n < s + \delta + 1\}. \end{aligned}$$

Para uma demonstração deste Lema referimos ao leitor interessado ver o Capítulo 4 de [Ga].

Voltando ao problema original (Problema de Leray), pelo feito na Seção anterior, a solução generalizada que foi construída era dada como sendo

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{u}.$$

De (2.9)-(2.12) temos que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{u} = \nabla \tau \text{ em } \Omega_2^R \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ em } \Omega_2^R \\ \mathbf{u} = 0 \text{ em } \partial\Omega_2^R - \Sigma_2^R \\ \int_{\Sigma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{array} \right.$$

onde  $\tau = p - Cx_n$ ,  $\Sigma_2^R = \{x \in \Omega_2 : x_n = R\}$ . De fato, como  $\mathbf{w} = 0$  fora de  $A_R \equiv \Omega - (\bar{\Omega}_1^R \cup \bar{\Omega}_2^R)$ ,  $V = \mathcal{U}^2$  em  $\Omega_2^R$  e  $\Delta \mathcal{U}^2 = c$ , temos em  $\Omega_2^R$  que

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{v} - \Delta \mathbf{a} = \nabla p - \Delta V - \Delta \mathbf{w} = \nabla p - \Delta V = \nabla p - \Delta \mathcal{U}^2 = \nabla p - C = \nabla \tau.$$

em  $\Omega_2^R$ . As outras igualdades não são difíceis de verificar. Também podemos estabelecer um sistema análogo em  $\Omega_1^R$ . Usando a desigualdade (2.16) do Lema anterior com  $\delta = 1$ ,  $s = R + j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ,  $q = 2$ ,  $\mathbf{f} \equiv 0$ , temos

$$\|\mathbf{u}\|_{m+2,2,\omega_{R+j}} + \|\nabla\tau\|_{m,2,\omega_{R+j}} \leq c\|\mathbf{u}\|_{1,2,\omega_{R+j,1}} \quad \forall j = 1, 2, \dots, \forall m \geq 0,$$

Logo

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\mathbf{u}\|_{m+2,2,\omega_{R+j}} + \sum_{j=1}^{\infty} \|\nabla\tau\|_{m,2,\omega_{R+j}} \leq c \sum_{j=1}^{\infty} \|\mathbf{u}\|_{1,2,\omega_{R+j,1}} \quad \forall m \geq 0$$

que equivale a

$$\|\mathbf{u}\|_{m+2,2,\Omega_2^{R+1}} + \|\nabla\tau\|_{m,2,\Omega_2^{R+1}} \leq 3c\|\mathbf{u}\|_{1,2,\Omega_2^R} \quad \forall m \geq 0. \quad (2.17)$$

Uma estimativa análoga é encontrada com  $\Omega_1$  em lugar de  $\Omega_2$ .

Com isto podemos concluir que em  $\Omega_i$  para todo  $|\alpha| \geq 0$ ,

$$|D^\alpha \mathbf{u}(x)| \longrightarrow 0 \text{ quando } |x| \rightarrow \infty,$$

pois dado  $\epsilon > 0$ , sendo  $\|\mathbf{u}\|_{m+2,2,\Omega_i^{R+1}} < \infty$ , existe  $R_{0,i} > 0$  tal que

$$\|\mathbf{u}\|_{m+2,2,\Omega_i^{R_{0,i}}} < \epsilon$$

logo, escolhendo em cada  $\Omega_i$ ,  $x$  tal que  $|x_n| \geq R_{0,i}$ , existe  $\omega_{s_0(i)}$  com  $x \in \omega_{s_0(i)}$ . Agora, usando a terceira consequência do Teorema 1.9, temos que existe  $c$  que independe de  $x$  tal que

$$|D^\alpha \mathbf{u}(x)| \leq c\|\mathbf{u}\|_{m+2,2,\omega_{s_0(i)}} \leq c\|\mathbf{u}\|_{m+2,2,\Omega_i^{R_{0,i}}} < c\epsilon.$$

Um argumento análogo permite mostrar o decaimento para zero das derivadas do gradiente da pressão, ou seja,

$$|D^\alpha \nabla\tau(x)| \longrightarrow 0 \text{ quando } |x| \rightarrow \infty \text{ em } \Omega_i.$$

De acordo como foi feita a construção da solução de problema de Leray, o fato de ter mostrado que  $\mathbf{u}$ ,  $\nabla\tau$  e suas respectivas derivadas decaem para zero, no infinito de cada canal, permite concluir que a solução  $\mathbf{v}$  do mesmo, junto com suas respectivas derivadas, decaem para o correspondente fluxo de Poiseuille nas saídas, quando  $|x| \rightarrow \infty$  e que temos as mesmas propriedades para  $\nabla p$ . Nosso objetivo agora é determinar qual é a ordem do decaimento. Como estamos interessados no que ocorre nas saídas, vamos considerar nosso domínio  $\Omega$  como sendo o cilindro reto

$$\Omega = \{x_n > 0\} \times \Sigma,$$

onde a seção transversal  $\Sigma$  é um subconjunto  $(n - 1)$  dimensional, suave, limitado e simplesmente conexo. Denotamos por  $\Sigma(a)$  a seção transversal que está a uma distância

a da origem.

Denotemos por  $\mathbf{u}, \tau$  uma solução do problema

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla \tau \text{ em } \Omega \quad (2.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ em } \Omega \quad (2.19)$$

$$\mathbf{u} = 0 \text{ em } \partial\Omega - \Sigma(0) \quad (2.20)$$

$$\int_{\Sigma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (2.21)$$

Vamos mostrar que  $\mathbf{u}$  e suas derivadas decaem exponencialmente. Antes de apresentar o resultado principal desta Seção é preciso estabelecer um par de lemas importantes, a saber:

**Lema 2.5** *Seja  $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$  uma função não negativa satisfazendo a seguinte desigualdade*

$$af(t) \leq b + f'(t), \text{ para todo } t \geq 0,$$

onde  $a > 0, b \geq 0$ . Então, se  $\liminf_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-at} = 0$ , segue-se que  $f$  é uniformemente limitada e

$$\sup_{t \geq 0} f(t) \leq b/a.$$

**Demonstração.** Como  $af(t)e^{-at} \leq be^{-at} + f'(t)e^{-at}$ , para todo  $t \geq 0$ , temos que

$$-\frac{d}{dt}[f(t)e^{-at}] \leq be^{-at}$$

Portanto, se integramos de  $t_1$  até  $t$ , com  $t_1 > 0$ , encontramos

$$f(t_1)e^{-at_1} - f(t)e^{-at} \leq \frac{b}{a}[e^{-at_1} - e^{-at}].$$

Se tomarmos o limite inferior quando  $t \rightarrow \infty$  em ambos lados da desigualdade anterior obtemos

$$f(t_1)e^{-at_1} \leq (b/a)e^{-at_1} \Rightarrow f(t_1) \leq b/a \Rightarrow \sup_{t \geq 0} f(t) \leq b/a. \quad \square$$

**Lema 2.6** *Seja  $0 < \beta \leq \infty$  e seja  $f$  uma função real contínua não negativa em  $[0, \beta)$  tal que  $f \in C^1(0, \beta)$ . Então, se  $f$  satisfaz a desigualdade*

$$f'(t) + a \int_t^\beta f(s)ds \leq bf(t), \forall t \in (0, \beta) \quad (2.22)$$

com  $a > 0$  e  $b \in \mathbb{R}$ , temos que

$$f(t) \leq kf(0)e^{-\tau t}, \forall t \in (0, \beta),$$

onde

$$k = \frac{\sqrt{b^2 + 4a}}{\tau}, \quad \tau = \frac{1}{2}(\sqrt{b^2 + 4a} - b).$$

**Demonstração.** Seja  $\psi(t) = f(t)e^{-bt}$ . Então derivando e usando (2.22), encontramos

$$\psi'(t) + a \int_t^\beta e^{-b(t-s)}\psi(s)ds \leq 0.$$

Desta relação, fazendo

$$F(t) = \psi(t) + \delta \int_t^\beta e^{-b(t-s)}\psi(s)ds, \quad \delta > 0,$$

obtemos que

$$\begin{aligned} F'(t) + \delta F(t) &= \psi'(t) + a \int_t^\beta e^{-b(t-s)}\psi(s)ds \\ &+ (\delta^2 - \delta b - a) \int_t^\beta e^{-b(t-s)}\psi(s)ds \leq 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

com  $\delta = (b + \sqrt{b^2 + 4a})/2$ , a raiz positiva da equação  $\delta^2 - \delta b - a = 0$ . Integrando a desigualdade diferencial (2.23) encontramos

$$F(t) \leq F(0)e^{-\delta t},$$

o que é equivalente a escrever

$$f(t) + \delta \int_t^\beta f(s)ds \leq F(0)e^{-(\delta-b)t}. \quad (2.24)$$

Agora queremos estimar  $F(0)$  em termos de  $f(0)$ . Fazendo  $\sigma_1 = 2\delta - b$  em (2.24) segue que

$$-\frac{d}{dt}[e^{-\delta t} \int_t^\beta f(s)ds] \leq F(0)e^{-\sigma_1 t}$$

o qual, integrando de zero até  $\beta$ , fornece

$$\int_0^\beta f(s)ds \leq F(0) \frac{1 - e^{-\sigma_1 \beta}}{\sigma_1}.$$



Se substituimos o valor de  $F(0) = \psi(0) + \int_0^\beta e^{bs}\psi(s)ds = f(0) + \int_0^\beta f(s)ds$  na desigualdade acima deduzimos

$$\int_0^\beta f(s)ds \leq f(0) \frac{1 - e^{-\sigma_1\beta}}{\sigma_1 - \delta(1 - e^{-\sigma_1\beta})}$$

e assim obtemos

$$F(0) = f(0) + \delta \int_0^\beta f(s)ds \leq \frac{f(0)\sigma_1}{\sigma}.$$

Substituindo a estimativa de  $F(0)$  em (2.24) encontramos

$$f(t) + \delta \int_t^\beta f(s)ds \leq F(0)e^{-(\delta-b)t} \leq \frac{f(0)\sigma_1}{\sigma} e^{-(\delta-b)t}$$

o qual devido à positividade de  $f(t)$  e  $\delta$  implica

$$f(t) \leq \frac{f(0)\sigma_1}{\sigma} e^{-(\delta-b)t} = kf(0)e^{-\sigma t}. \quad \square$$

Mostramos que para  $\mathbf{u} \in \mathcal{D}_0^{1,2}$  tal que  $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{a}$  é a solução do problema de Leray,  $\mathbf{u}$  ganha regularidade. Agora, apresentaremos um teorema que garante a integrabilidade do gradiente de  $\mathbf{u}$  bastando que  $\mathbf{u}$  seja solução do problema (2.18)-(2.21) satisfazendo uma certa propriedade, i.e.

**Teorema 2.7** *Sejam  $\mathbf{u}, \tau$  a solução de (2.18)-(2.21) com*

$$\liminf_{x_n \rightarrow \infty} \int_0^{x_n} \left( \int_{\Sigma(\xi)} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} \, d\Sigma \right) d\xi e^{-ax_n} = 0, \quad (2.25)$$

onde

$$a^{-1} \equiv \left( \frac{1}{2} + c_o \right) (\mu)^{1/2},$$

$c_o$  é a constante dada em (2.28), e  $\mu$  é a constante de Poincaré para  $\Sigma$ . Então

$$|\mathbf{u}|_{1,2,\Omega} < \infty.$$

**Demonstração.** Multiplicando a equação (2.18) por  $\mathbf{u}$  e integrando por partes em  $(0, x_n) \times \Sigma$  e notando que  $u \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n} = 1/2 \frac{\partial}{\partial x_n} (|\mathbf{u}|^2)$  obtemos

$$\begin{aligned} E(x_n) &\equiv \int_0^{x_n} \int_{\Sigma(\xi)} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} \, d\Sigma dx_n \\ &= \int_{\Sigma(x_n)} \left( \tau u_n - \frac{1}{2} \frac{\partial |\mathbf{u}|^2}{\partial x_n} \right) - \int_{\Sigma(0)} \left( \tau u_n - \frac{1}{2} \frac{\partial |\mathbf{u}|^2}{\partial x_n} \right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Se integrarmos esta última relação entre  $t$  e  $t+1$ ,  $t \geq 0$ , temos que

$$\int_t^{t+1} E(x_n) dx_n = \int_{\Omega_{t,t+1}} \left( \tau u_n - \frac{1}{2} \frac{\partial |\mathbf{u}|^2}{\partial x_n} \right) + B, \quad (2.27)$$

onde  $\Omega_{t,t+1} = \{x \in \Omega : t < x_n < t+1\}$  e

$$B = - \int_t^{t+1} \int_{\Sigma(0)} \left( \tau u_n - \frac{1}{2} \frac{\partial |\mathbf{u}|^2}{\partial x_n} \right) = - \int_{\Sigma(0)} \left( \tau u_n - \frac{1}{2} \frac{\partial |\mathbf{u}|^2}{\partial x_n} \right).$$

Consideremos o problema

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{w} &= u_n \text{ em } \Omega_{t,t+1} \\ \mathbf{w} &\in W_0^{1,2}(\Omega_{t,t+1}) \\ |\mathbf{w}|_{1,2,\Omega_{t,t+1}} &\leq c_0 \|u_n\|_{2,\Omega_{t,t+1}}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Usando (2.21), temos que

$$\int_{\Omega_{t,t+1}} u_n = \int_t^{t+1} \int_{\Sigma(x_n)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

o que junto com o fato de  $u_n \in L^2(\Omega_{t,t+1})$ , e pelo feito na Seção 1.4, garante a existência da solução  $\mathbf{w}$  com a constante  $c_0$  independente de  $t$ . Portanto, usando (2.27), (2.28), (2.18), integração por partes e a desigualdade de Hölder, encontramos

$$\begin{aligned} \int_t^{t+1} E(x_n) dx_n &= \int_{\Omega_{t,t+1}} \left( -\nabla \tau \cdot \mathbf{w} - \frac{1}{2} \frac{\partial |\mathbf{u}|^2}{\partial x_n} \right) + B \\ &= \int_{\Omega_{t,t+1}} \left( \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{w} - \frac{1}{2} \frac{\partial |\mathbf{u}|^2}{\partial x_n} \right) + B \\ &\leq \left( c_0 + \frac{1}{2} \right) \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega_{t,t+1}} \|\nabla \mathbf{u}\|_{2,\Omega_{t,t+1}} + B. \end{aligned}$$

Como  $\mathbf{u}$  é nula em  $\partial\Omega$ , a desigualdade de Poincaré diz que existe  $\mu > 0$  tal que

$$\|\mathbf{u}\|_{2,\Sigma}^2 \leq \mu \|\nabla \mathbf{u}\|_{2,\Sigma}^2, \quad (2.29)$$

e assim obtemos,

$$y(t) \equiv \int_t^{t+1} E(x_n) \leq \sqrt{\mu} \left( c_0 + \frac{1}{2} \right) \|\nabla \mathbf{u}\|_{2,\Omega_{t,t+1}}^2 + B.$$

Agora, usando o Teorema Fundamental do Cálculo e olhando para a definição de  $E(x_n)$  segue que

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{2,\Omega_{t,t+1}}^2 = \frac{dy}{dt},$$

e assim, fazendo a substituição na última desigualdade, encontramos

$$ay(t) \leq b + \frac{dy(t)}{dt}$$

onde  $b=a|B|$ . Como  $y(t)$  está dentro das hipóteses do Lema 2.5, encontramos que

$$y(t) = \int_t^{t+1} E(x_n) dx_n \leq |B|, \quad \forall t > 1. \quad (2.30)$$

Daí, como  $E(x_n)$  é não-decrescente, temos também

$$E(t) \leq \int_t^{t+1} E(x_n) dx_n \leq \frac{|B|}{a}, \quad \forall t \geq 1,$$

logo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = \|\nabla \mathbf{u}\|_{2,\Omega}^2 \leq \frac{|B|}{a} < \infty. \quad \square$$

**Teorema 2.8** *Sejam  $\mathbf{u}, \tau$  uma solução regular de (2.18)-(2.21) satisfazendo (2.25). Então, para todo  $R > 0$ , temos a seguinte desigualdade*

$$\|\mathbf{u}\|_{1,2,\Omega^R}^2 \leq c \|\mathbf{u}\|_{1,2,\Omega}^2 \exp(-\sigma R), \quad (2.31)$$

onde

$$\Omega^R = \{x \in \Omega : x_n > R\},$$

$$c = \frac{2\sqrt{c_0^2 + 2}}{\sqrt{c_0^2 + 2} - c_0},$$

e

$$\sigma = \frac{\sqrt{c_0^2 + 2} - c_0}{\sqrt{\mu}},$$

onde as constantes  $c_0$  e  $\mu$  são as mesmas do Teorema anterior.

**Demonstração.** Observemos que as hipóteses do Teorema satisfazem as condições do Teorema anterior, logo temos que

$$|\mathbf{u}|_{1,2,\Omega} < \infty.$$

Por simplicidade vamos mostrar a desigualdade só no caso em que o  $n = 3$ . Seguindo o mesmo caminho do teorema anterior podemos escrever a seguinte identidade

$$\int_z^{z_1} \int_{\Sigma(\zeta)} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} \, d\Sigma d\zeta = \int_{\Sigma(z_1)} \left( \tau u_3 - \frac{1}{2} \frac{\partial |\mathbf{u}|^2}{\partial z} \right) - \int_{\Sigma(z)} \left( \tau u_3 - \frac{1}{2} \frac{\partial |\mathbf{u}|^2}{\partial z} \right). \quad (2.32)$$

Como sabemos que  $\mathbf{u}, \nabla \tau \in W^{m,2}(\Omega)$  para todo  $m \geq 0$  podemos mostrar que quando  $z_1 \rightarrow \infty$ ,

$$i(z_1) \equiv \int_{\Sigma(z_1)} \tau u_3(z_1, \bar{x}) d\bar{x} = o(1).$$

De fato, sendo  $\bar{\tau} = \bar{\tau}(x_3)$  a média de  $\tau$  em  $\Sigma = \Sigma(x_3)$ , i.e.  $\bar{\tau} = \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} \tau(x_1, \bar{x}) d\sigma(\bar{x})$ , usando (2.21) temos que

$$\int_{\Sigma(z_1)} \bar{\tau} u_3(z_1, \bar{x}) d\sigma(\bar{x}) = \bar{\tau} \int_{\Sigma(z_1)} u_3(z_1, \bar{x}) d\sigma(\bar{x}) = 0,$$

logo usando a desigualdade de Poincaré (Teorema 1.8), encontramos

$$|i(z_1)| = \left| \int_{\Sigma(z_1)} (\tau - \bar{\tau}) u_3(z_1, \bar{x}) d\sigma(\bar{x}) \right| \leq c |\tau|_{1,2,\Sigma} \|\mathbf{u}\|_{2,\Sigma}.$$

Como já sabemos que  $\mathbf{u}$  e suas derivadas vão para zero no infinito, concluímos que o lado direito da desigualdade acima vai para zero quando  $z_1 \rightarrow \infty$ . Conseqüentemente, concluímos de (2.32) que

$$H(z) := \int_z^\infty \int_{\Sigma(\zeta)} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} d\Sigma d\zeta = \int_{\Sigma(z)} \left( \tau u_3 - \frac{1}{2} \frac{\partial |\mathbf{u}|^2}{\partial z} \right). \quad (2.33)$$

Integrando entre  $t+l$  e  $t+l+1$  (com  $l$  um inteiro não negativo), temos

$$\begin{aligned} \int_{t+l}^{t+l+1} H(z) &= \int_{t+l}^{t+l+1} \int_{\Sigma(z)} \tau u_3 - \frac{1}{2} \int_{t+l}^{t+l+1} \int_{\Sigma(z)} \frac{\partial (|\mathbf{u}|^2)}{\partial z} \\ &= \int_{t+l}^{t+l+1} \int_{\Sigma(z)} \tau u_3 - \frac{1}{2} \int_{\Sigma(t+l+1)} |\mathbf{u}|^2 + \int_{\Sigma(t+l)} |\mathbf{u}|^2. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Escrevendo  $u_3 = \nabla \cdot \mathbf{w}$ , onde  $\mathbf{w}$  é solução de (2.28) com  $n = 3$ , temos que a primeira parcela da direita de (2.34) fica

$$\begin{aligned} \int_{t+l}^{t+l+1} \int_{\Sigma(z)} \tau u_3 &= \int_{t+l}^{t+l+1} \int_{\Sigma(z)} \tau \nabla \cdot \mathbf{w} = \int_{t+l}^{t+l+1} \int_{\Sigma(z)} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{w} \\ &\leq \|\nabla \mathbf{u}\|_{2, \Omega_{t+l, t+l+1}} \|\nabla \mathbf{w}\|_{2, \Omega_{t+l, t+l+1}} \\ &\leq c_0 \|\mathbf{u}\|_{2, \Omega_{t+l, t+l+1}} \|\nabla \mathbf{u}\|_{2, \Omega_{t+l, t+l+1}} \leq c_0 \sqrt{\mu} \|\nabla \mathbf{u}\|_{2, \Omega_{t+l, t+l+1}}^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{t+l}^{t+l+1} H(z) \leq c_0 \sqrt{\mu} \|\mathbf{u}\|_{1,2, \Omega_{t+l, t+l+1}}^2 - \frac{1}{2} \int_{\Sigma(t+l+1)} |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Sigma(t+l)} |\mathbf{u}|^2. \quad (2.35)$$

Somando, ambos lados desta relação de  $l = 0$  até  $l = \infty$  e observando que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \int_{\Sigma(z)} |\mathbf{u}|^2(z, \bar{x}) = 0$$

obtemos

$$\int_t^\infty H(z) \leq c_0 \sqrt{\mu} H(t) + \frac{1}{2} \int_{\Sigma(t)} |\mathbf{u}|^2. \quad (2.36)$$

(Notemos que somando, obtemos no lado direito de (2.35) uma soma telescópica com os seus dois últimos termos) Usando (2.29), o Teorema Fundamental do Cálculo e a definição de  $H(t)$ , temos

$$\int_{\Sigma(t)} \mathbf{u}^2 \leq \mu \int_{\Sigma(t)} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} = -\mu H'(t),$$

e conseqüentemente, da desigualdade (2.36) encontramos a desigualdade

$$H'(t) + \frac{2}{\mu} \int_t^\infty H \leq \frac{2c_0}{\sqrt{\mu}} H(t),$$

a qual pelo Lema 2.6 implica o resultado.  $\square$

Finalmente, para provar que  $\mathbf{u}$ , e suas derivadas decaem para zero exponencialmente vamos fazer uso do Teorema anterior. Se combinamos as desigualdades (2.31) e (2.17) com  $\Omega_2^R = \Omega^R$ , temos

$$\|\mathbf{u}\|_{m+2,2, \Omega^{R+1}} + \|\nabla \tau\|_{m,2, \Omega^{R+1}} \leq c_1 \|\mathbf{u}\|_{1,2, \Omega} \exp(-\sigma R/2).$$

Conseqüentemente obtemos que

$$|D^\alpha \mathbf{u}(x)| + |D^\alpha \nabla \tau(x)| \leq c_2 \|\mathbf{u}\|_{1,2,\Omega} \exp(-\sigma(x_n/2))$$

para todo  $x \in \Omega^R$  com  $x_n \geq 1$  e para todo  $|\alpha| \geq 0$ . De fato, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $x_n$  tal que

$$\epsilon = c_2 \|\mathbf{u}\|_{1,2,\Omega} \exp(-\sigma(x_n/2)),$$

logo sendo,  $\|\mathbf{u}\|_{m+2,2,\Omega^{R+1}} < \infty$ , existe  $R_0 > 1$  tal que

$$\|\mathbf{u}\|_{m+2,2,\Omega^{R_0}} \leq c_2 \|\mathbf{u}\|_{1,2,\Omega} \exp(-\sigma(x_n/2))$$

e assim escolhendo em  $\Omega^R$ ,  $x$  tal que  $|x_n| \geq R_0$ , existe  $\omega_{s_0}$  com  $x \in \omega_{s_0}$ . Agora, usando a terceira conseqüência do Teorema 1.9, temos que existe  $c$  que independe de  $x$  tal que

$$|D^\alpha \mathbf{u}(x)| \leq c \|\mathbf{u}\|_{m+2,2,\omega_{s_0}} \leq c \|\mathbf{u}\|_{m+2,2,\Omega^{R_0}}.$$

Analogamente fazemos a análise para  $|D^\alpha \nabla \tau(x)|$ .

Esta última estimativa implica em particular, que quando  $|x| \rightarrow \infty$ , a pressão  $\tau$  tende a alguma constante, exponencialmente rápido.

# Capítulo 3

## Resultados técnicos

Neste Capítulo apresentaremos alguns resultados que serão usados constantemente no Capítulo 4 para o cálculo de certas estimativas, a saber:

**Lema 3.1** *Dada  $\phi \in W^{1,2}(\Omega_\epsilon)$ , tal que  $\phi = 0$  em  $\Gamma_\epsilon$ , existem constantes  $c(r, 2) > 0$ ,  $r = 2, 4$ , que independem de  $\epsilon$  tais que*

$$\|\phi\|_{2,\Omega_\epsilon} \leq c(2, 2)\epsilon \|\nabla\phi\|_{2,\Omega_\epsilon} \quad (3.1)$$

$$\|\phi\|_{4,\Omega_\epsilon} \leq c(4, 2)\epsilon^{1/4} \|\nabla\phi\|_{2,\Omega_\epsilon} \quad (3.2)$$

**Demonstração.** Para mostrar (3.1), usamos a seguinte desigualdade de Poincaré em  $\mathbb{R}^3$  e com  $r = 2$

$$\|\phi(x)\|_{r,\Omega} \leq c \|\nabla_{\bar{x}}\phi(x)\|_{r,\Omega}, \quad \phi \in H^r(\Omega), \quad \phi = 0 \text{ em } \Gamma, \quad (3.3)$$

sendo  $\Omega$  um cilindro reto (finito) e  $\Gamma = \partial\Omega(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ , onde  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  são as tampas laterais do cilindro.

Então, fazendo uma mudança de variáveis e usando (3.3) nos domínios  $\Omega_\epsilon^i$  temos que

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{2,\Omega_\epsilon^i}^2 &= \int_{\Omega_\epsilon^i} |\phi(\bar{y}^i, y_3^i)|^2 d\bar{y}^i dy_3^i = \epsilon^2 \int_{\Omega^i} |\phi(\epsilon\bar{x}^i, x_3^i)|^2 d\bar{x}^i dx_3^i \\ &= c\epsilon^2 \int_{\Omega^i} |\nabla_{\bar{x}}(\phi(\epsilon\bar{x}^i, x_3^i))|^2 d\bar{x}^i dx_3^i = c\epsilon^4 \int_{\Omega^i} |\nabla_{\bar{x}}\phi(\epsilon\bar{x}^i, x_3^i)|^2 d\bar{x}^i dx_3^i \\ &= c\epsilon^2 \int_{\Omega_\epsilon^i} |\nabla_{\bar{y}}\phi(\bar{y}^i, y_3^i)|^2 d\bar{y}^i dy_3^i \leq c\epsilon^2 \|\nabla\phi\|_{2,\Omega_\epsilon^i}^2. \end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de variáveis, mostramos sem dificuldade que

$$\|\phi\|_{2,\Omega_\epsilon^i}^2 \leq c\epsilon^2 \|\nabla\phi\|_{2,\Omega_\epsilon^i}^2,$$

e assim fica verificada a desigualdade (3.1).

Para mostrar (3.2) consideremos  $\phi \in C_0^\infty(\Omega_\epsilon)^3$  e definamos  $\psi = |\phi|^2\phi$ . Então,

$$\|\nabla\psi\|_{1,\Omega_\epsilon} \leq \|\psi\|_{4,\Omega_\epsilon}^2 \|\nabla\psi\|_{2,\Omega_\epsilon}. \quad (3.4)$$

Estendendo  $\psi$  por zero fora de  $\Omega_\epsilon$  usando o Lema 1.3, temos que

$$\|\psi\|_{3/2,\Omega_\epsilon} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} \|\nabla\psi\|_{1,\Omega_\epsilon},$$

logo

$$\|\phi\|_{9/2,\Omega_\epsilon}^3 \leq c(4,2) \|\psi\|_{4,\Omega_\epsilon}^2 \|\nabla\psi\|_{2,\Omega_\epsilon}.$$

Usando a desigualdade de interpolação (1.5) e usando (3.1) encontramos que

$$\|\phi\|_{\Omega_\epsilon}^4 \leq \|\phi\|_{9/2,\Omega_\epsilon}^{9/10} \|\phi\|_{2,\Omega_\epsilon}^{1/10} \leq c(4,2)\epsilon^{1/10} \|\phi\|_{9/2,\Omega_\epsilon}^{9/10} \|\nabla\phi\|_{2,\Omega_\epsilon}^{1/10}$$

de onde obtemos, usando (3.4), que

$$\|\phi\|_{4,\Omega_\epsilon} \leq c(4,2)\epsilon^{1/4} \|\nabla\phi\|_{2,\Omega_\epsilon}.$$

Como o espaço  $C_0^\infty(\Omega_\epsilon)$  é denso em  $W^{1,2}(\Omega_\epsilon)$ , deduzimos que a desigualdade acima vale para cada  $\phi \in W^{2,2}(\Omega_\epsilon)$  completando assim a demonstração.  $\square$

**Lema 3.2** *Seja  $\gamma_\epsilon^i = \{x = (x_1^i, x_2^i, x_3^i) \in \Omega_\epsilon^i : x_3^i = -\epsilon \ln \epsilon\}$ . Então existem constantes  $c_1, c_2 > 0$  tais que para toda  $\phi \in W^{1,2}(\Omega_\epsilon)$*

$$\|\phi\|_{2,\gamma_\epsilon^i} \leq c_1 \sqrt{-\epsilon \ln \epsilon} \|\nabla\phi\|_{2,\Omega_\epsilon} \quad (3.5)$$

$$\|\phi\|_{2,\Sigma_\epsilon^i} \leq c_2 \|\nabla\phi\|_{2,\Omega_\epsilon^i}. \quad (3.6)$$

**Demonstração.** Para mostrar (3.5) consideremos  $\Sigma_{(i)} = \{x \in \Omega_\epsilon^i : x_3 = 1, \bar{x} \in S^i\}$  e seja  $\varphi(y) = \phi(\epsilon y_1, \epsilon y_2, \epsilon(-\ln \epsilon)y_1)$ . Então

$$\|\varphi\|_{2,\Sigma_{(i)}}^2 = \epsilon^{-2} \|\phi\|_{2,\gamma_\epsilon^i}^2 \quad (3.7)$$



pois

$$\begin{aligned}\epsilon^{-2}\|\phi\|_{2,\gamma_\epsilon^i}^2 &= \epsilon^{-2} \int_{\gamma_\epsilon^i} |\phi(x_1^i, x_2^i, -\epsilon \ln \epsilon)|^2 d\bar{x}^i = \int_{S^i} |\phi(\epsilon y_1^i, \epsilon y_2^i, -\epsilon \ln \epsilon)|^2 d\bar{y}^i \\ &= \int_{\Sigma^{(i)}} |\varphi(y_1^i, y_2^i, 1)|^2 d\bar{y}^i = \int_{\Sigma^{(i)}} |\varphi(y)|^2 dy = \|\varphi\|_{2,\Sigma^{(i)}}^2\end{aligned}$$

Agora sendo

$$\mathcal{D} = S^i \times (0, 1) = \{y = (\epsilon^{-1}x_1^i, \epsilon^{-1}x_2^i, (-\epsilon \ln \epsilon)^{-1}x_3^i) : x^i = (x_1^i, x_2^i, x_3^i) \in G_\epsilon^i\}$$

temos também que,

$$\|\nabla\varphi\|_{2,\mathcal{D}}^2 \leq -\epsilon^{-1} \ln \epsilon \|\nabla\phi\|_{2,G_\epsilon^i}^2, \quad (3.8)$$

pois

$$\int_{\mathcal{D}} |\nabla\varphi(y)|^2 dy = \int_{\mathcal{D}} \left( |\nabla_{\bar{y}}\varphi|^2 + \left| \frac{\partial\varphi}{\partial y_3} \right|^2 \right) dy = I_1 + I_2. \quad (3.9)$$

sendo

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^1 \int_{S^i} |\nabla_{\bar{y}}\varphi(y)|^2 dy = \int_0^1 \int_{S^i} |\nabla_{\bar{y}^i}(\phi(\epsilon y_1^i, \epsilon y_2^i, -\epsilon \ln \epsilon y_3^i))|^2 d\bar{y}^i dy_3 \\ &= \epsilon^4 \int_0^1 \int_{S^i} |\nabla_{\bar{y}^i}\phi(\epsilon y_1^i, \epsilon y_2^i, -\epsilon \ln \epsilon y_3^i)|^2 d\bar{y}^i dy_3 \\ &= \epsilon^2 \int_0^{-\epsilon \ln \epsilon} \int_{\epsilon S^i} |\nabla_{\bar{x}^i}\phi(x_1^i, x_2^i, x_3^i)|^2 d\bar{x}^i dx_3 \\ &= \epsilon^2 \int_{G_\epsilon^i} |\nabla\phi|^2 dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_0^1 \int_{S^i} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial y_3} \right|^2 dy = \int_0^1 \int_{S^i} \left| \frac{\partial}{\partial y_3^i}(\phi(\epsilon y_1^i, \epsilon y_2^i, -\epsilon \ln \epsilon y_3^i)) \right|^2 dy \\ &= (-\epsilon \ln \epsilon)^2 \int_0^1 \int_{S^i} \left| \frac{\partial\phi}{\partial y_3^i}(\epsilon y_1^i, \epsilon y_2^i, -\epsilon \ln \epsilon y_3^i) \right|^2 dy \\ &= (-\epsilon \ln \epsilon) \int_0^{-\epsilon \ln \epsilon} \int_{\epsilon S^i} \left| \frac{\partial\phi}{\partial x_3^i}(x_1^i, x_2^i, x_3^i) \right|^2 dx \\ &= (-\epsilon \ln \epsilon) \int_{G_\epsilon^i} \left| \frac{\partial\phi}{\partial x_3^i} \right|^2.\end{aligned}$$

Portanto, (3.9) fica majorada por  $-\epsilon \ln \epsilon \|\nabla \phi\|_{2, \mathcal{G}_\epsilon^i}^2 \leq -\epsilon^{-1} \ln \epsilon \|\nabla \phi\|_{2, \mathcal{G}_\epsilon^i}^2$ , e como  $\|\varphi\|_{2, \Sigma_{(\epsilon)}} \leq c \|\nabla \varphi\|_{2, \mathcal{D}}$  encontramos que  $\|\phi\|_{2, \mathcal{G}_\epsilon^i} \leq c_1 \sqrt{-\epsilon \ln \epsilon} \|\nabla \phi\|_{2, \Omega_\epsilon}$ .

Para mostrar (3.6) vamos fazer algo análogo ao feito na demonstração da desigualdade anterior.

Consideremos  $\Sigma_{(\epsilon)} = \epsilon^{-1} \Sigma_\epsilon^i$  e seja  $\varphi(y) = \phi(\epsilon y_1, \epsilon y_2, L_i y_3)$ . Então, como na primeira parte,

$$\|\varphi\|_{2, \Sigma_{(\epsilon)}}^2 = \epsilon^{-2} \|\phi\|_{2, \Sigma_\epsilon^i}^2. \quad (3.10)$$

Agora sendo

$$\mathcal{D} = S^i \times (0, 1) = \{y = (\epsilon^{-1} x_1^i, \epsilon^{-1} x_2^i, L_i^{-1} x_3^i) : x^i = (x_1^i, x_2^i, x_3^i) \in \Omega_\epsilon^i\}$$

temos também que,

$$\|\nabla \varphi\|_{2, \mathcal{D}}^2 \leq \epsilon \|\nabla \phi\|_{2, \Omega_\epsilon^i}^2,$$

pois

$$\int_{\mathcal{D}} |\nabla \varphi(y)|^2 dy = \int_{\mathcal{D}} \left( |\nabla_{\bar{y}} \varphi|^2 + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \right|^2 \right) dy = I_1 + I_2. \quad (3.11)$$

sendo

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \int_{S^i} |\nabla \varphi(y)|^2 dy = \int_0^1 \int_{S^i} |\nabla_{\bar{y}^i} (\phi(\epsilon y_1^i, \epsilon y_2^i, L_i y_3^i))|^2 d\bar{y}^i \\ &= \epsilon^4 \int_0^1 \int_{S^i} |\nabla_{\bar{y}^i} \phi(\epsilon y_1^i, \epsilon y_2^i, L_i y_3^i)|^2 d\bar{y}^i \\ &= \epsilon^2 \int_0^{L_i} \int_{\epsilon S^i} |\nabla_{\bar{x}^i} \phi(x_1^i, x_2^i, x_3^i)|^2 d\bar{x}^i = \epsilon^2 \int_{\Omega_\epsilon^i} |\nabla \phi|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \int_{S^i} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \right|^2 dy = \int_0^1 \int_{S^i} \left| \frac{\partial}{\partial y_3^i} (\phi(\epsilon y_1^i, \epsilon y_2^i, L_i y_3^i)) \right|^2 dy \\ &= L_i \int_0^1 \int_{S^i} \left| \frac{\partial \phi}{\partial y_3^i} (\epsilon y_1^i, \epsilon y_2^i, L_i y_3^i) \right|^2 dy \\ &= \int_0^{L_i} \int_{\epsilon S^i} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_3^i} (x_1^i, x_2^i, x_3^i) \right|^2 dx = \int_{\Omega_\epsilon^i} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_3^i} \right|^2. \end{aligned}$$

Portanto, (3.11) fica estimada por  $\|\nabla\phi\|_{2,\Omega_\epsilon}^2$  e como  $\|\varphi\|_{2,\Sigma(\epsilon)} \leq c\|\nabla\varphi\|_{2,\mathcal{D}}$  segue-se que  $\|\phi\|_{2,\Sigma_\epsilon} \leq c_2\epsilon\|\nabla\phi\|_{2,\Omega_\epsilon}$ .  $\square$

**Lema 3.3** Dada  $f \in L_0^2(\Omega_\epsilon)$ , existe  $\mathbf{v} \in W^{1,2}(\Omega_\epsilon)^3$  e uma constante  $c > 0$  tal que

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{v} &= f \text{ em } \Omega_\epsilon \\ \mathbf{v} &= 0 \text{ em } \partial\Omega_\epsilon \\ \|\nabla\mathbf{v}\|_{2,\Omega_\epsilon} &\leq \frac{c}{\epsilon}\|f\|_{2,\Omega_\epsilon}.\end{aligned}$$

**Demonstração.** Usando o Lema 1.19, sabemos que este problema tem solução. Nosso objetivo então, é mostrar que a solução satisfaz essa estimativa. Mais precisamente, segundo o Lema 1.19, para um domínio adequado  $\Omega$ , que independe de  $\epsilon$ , temos a seguinte estimativa

$$c \leq c_0 \left( \frac{\delta(\Omega)}{R} \right)^n \left( 1 + \frac{\delta(\Omega)}{R} \right) \text{ com } c_0 = c_0(n, q).$$

Agora queremos saber qual é a dependência de  $\epsilon$  da constante  $c$ . Para isto dividamos  $\Omega_\epsilon$  em  $m+1$  partes, da seguinte forma. Seja  $M > 0$  tal que os conjuntos  $\Omega_\epsilon^i(M) = \{x \in \Omega_\epsilon^i : \epsilon M < x_3 < L_i\}$ ,  $i = 1, \dots, m$  são disjuntos e chamemos de  $\Omega_\epsilon^0(M) = \Omega_\epsilon \setminus \cup_{i=1}^m \Omega_\epsilon^i(M)$ . Com esta notação vamos analisar as estimativas em cada um desses domínios.

Primeiramente vejamos o que acontece em  $\Omega_\epsilon^0(M)$ . Seja  $\mathbf{u} \in W^{1,2}(\Omega_0) = W^{1,2}(\epsilon^{-1}(\Omega_0^0))$  tal que para  $i = 1, 2, 3$ ,  $v_i(x) = u_i(x/\epsilon)$ , e seja  $f_\epsilon(y) = f(\epsilon y)$  a função associada a  $\mathbf{u}$ ; então  $\nabla v_i(x) = (1/\epsilon)\nabla u_i(x/\epsilon)$  e conseqüentemente, temos para  $i = 1, 2, 3$

$$\int_{\Omega_\epsilon^0} |\nabla v_i(x)|^2 dx = \epsilon \int_{\Omega_0} |\nabla u_i(y)|^2 dy \leq c\epsilon \int_{\Omega_0} |f_\epsilon(y)|^2 dy = \frac{c}{\epsilon^2} \int_{\Omega_0^0} |f(x)|^2 dx$$

logo,

$$\|\nabla\mathbf{v}\|_{2,\Omega_\epsilon^0} \leq \frac{c}{\epsilon}\|f\|_{2,\Omega_\epsilon^0}. \quad (3.12)$$

Agora vejamos o que acontece nos canais  $\Omega_\epsilon^i$ . Definamos de novo  $\mathbf{u} \in W^{1,2}(\Omega_0) = W^{1,2}(\epsilon^{-1}(\Omega_0^i))$  tal que  $v_1(x) = (1/\epsilon)u_1(\bar{x}/\epsilon, x_3)$ ,  $v_i(x) = u_i(\bar{x}/\epsilon, x_3)$   $i = 2, 3$ , e seja

$f_\epsilon(y) = \epsilon f(\epsilon \bar{y}, y_3)$  a função associada a  $\mathbf{v}$ ; então  $\nabla v_1(x) = (1/\epsilon)\nabla u_1(\bar{x}/\epsilon, x_3)$ ,  $\nabla v_i(x) = u_i(\bar{x}/\epsilon, x_3)$ ,  $i = 2, 3$ . Para  $i = 2, 3$  obtemos que

$$\|\nabla v_i\|_{2,\Omega_\epsilon^i} \leq c\epsilon \|f\|_{2,\Omega_\epsilon^i} \leq \frac{c}{\epsilon} \|f\|_{2,\Omega_\epsilon}. \quad (3.13)$$

Por último, como  $|\nabla v_1(x)|^2 \leq 1/\epsilon^4 |\nabla u_1|^2$  encontramos que

$$\|\nabla v_1\|_{2,\Omega_\epsilon^i} \leq c \|f\|_{2,\Omega_\epsilon^i} \leq \frac{c}{\epsilon} \|f\|_{2,\Omega_\epsilon}. \quad (3.14)$$

De (3.12), (3.13) e (3.14) concluímos o resultado.  $\square$

**Observação 3.4** *Notemos que na estimativa sobre os canais  $\Omega_\epsilon^i$ , passamos de um domínio  $A$  para um domínio  $B$ , como mostra a figura 4.1, e estando no domínio  $B$  usamos a estimativa padrão dada na Seção 1.5. Só que o domínio  $B$ , tem comprimento que depende de  $\epsilon$ . E então? Isto não é problema, pois usando a estimativa da constante no domínio  $B$ , a qual é dada no Lema 1.19, vemos que a mesma resulta independente de  $\epsilon$ .*

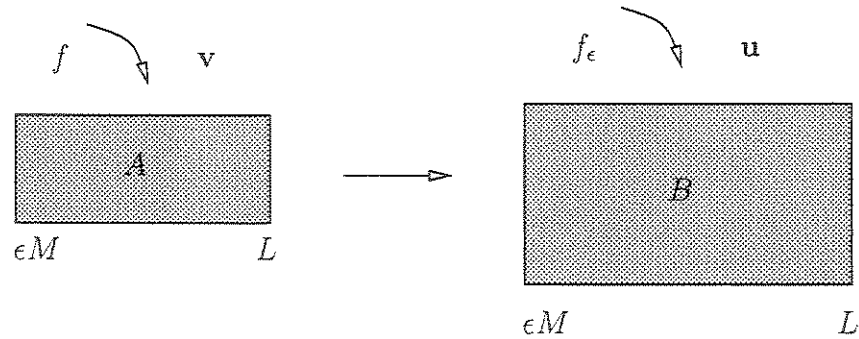


Figura 3.1: Mudança de Variáveis

## Capítulo 4

# Escoamento de fluido viscoso incompressível em canais estreitos

Este Capítulo, tema central da nossa Dissertação, é uma exposição detalhada do preprint intitulado “Junction of thin pipes filled with viscous fluids”, por Eduard Marušić-Paloka [MP].

Vamos considerar o cruzamento de  $m$  canais finitos em  $\mathbb{R}^3$ , onde cada um deles tem seção transversal constante, de diâmetro dependendo de  $\epsilon$ , os quais são enchidos com fluido viscoso incompressível. Nos extremos de cada canal, são dados certos valores da pressão e queremos estudar o comportamento do fluido ao longo de cada canal em estado estacionário. Tal comportamento é aproximado por um estudo assintótico do fluxo quando  $\epsilon$  é pequeno. Nos canais (fora duma vizinhança da área de cruzamento) o fluxo é descrito como um fluxo de Poiseuille, e numa vizinhança do cruzamento, o fluxo se comporta como uma solução reescalada do problema de Leray linear. Estes dois fluxos são colados num certo ponto estratégico, dependente de  $\epsilon$ , e o erro é estimado em termos de  $\epsilon$ .

## 4.1 Formulação Matemática do problema

### 4.1.1 Aspectos Geométricos

Nosso domínio que será denotado por  $\Omega_\epsilon \subset \mathbb{R}^3$ , será um domínio localmente Lipschitziano consistindo da união de  $m$  canais  $\Omega_i^\epsilon$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , cada um com comprimento  $L_i$ , i.e.

$$\Omega_\epsilon = \bigcup_{i=1}^m \Omega_i^\epsilon \quad (4.1)$$

onde  $\Omega_0^\epsilon$ , é um conjunto limitado, (que pode ser vazio) formado pela junção de todos os domínios  $\Omega_i^\epsilon$   $i = 1, \dots, m$  V.figura 3.1. Os canais  $\Omega_i^\epsilon$ ,  $i = 1, \dots, m$  são cilindros retos. Mais explicitamente, eles têm a seguinte formulação: Sejam  $S^i \subset \mathbb{R}^2$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , domínios limitados de classe  $C^2$ . Para cada canal, em sistemas de coordenadas cartesianas possivelmente diferentes,  $(e_k^i)$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , temos

$$\Omega_i^\epsilon = \{x = (\bar{x}^i, x_3^i) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_3^i < L_i, \bar{x}^i = (x_1^i, x_2^i) \in \epsilon S^i\}. \quad (4.2)$$

Denotamos a fronteira lateral dos canos por

$$\Gamma_\epsilon^i = \{x = (\bar{x}^i, x_3^i) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_3^i < L_i, \bar{x}^i = (x_1^i, x_2^i) \in \epsilon \partial S^i\} \quad (4.3)$$

e as respectivas fronteiras exteriores por

$$\Sigma_\epsilon^i = \{x^i = (\bar{x}^i, L_i) \in \mathbb{R}^3 : \bar{x}^i = (x_1^i, x_2^i) \in \epsilon S^i\}. \quad (4.4)$$

Denotamos por

$$\Gamma_\epsilon = \partial\Omega_\epsilon \setminus \bigcup_{i=1}^m \Sigma_\epsilon^i \quad (4.5)$$

e por  $\mathbf{n}$ , a normal unitária exterior a  $\partial\Omega_\epsilon$ . Para ter uma idéia geométrica de nosso domínio, vejamos a figura (3.1).

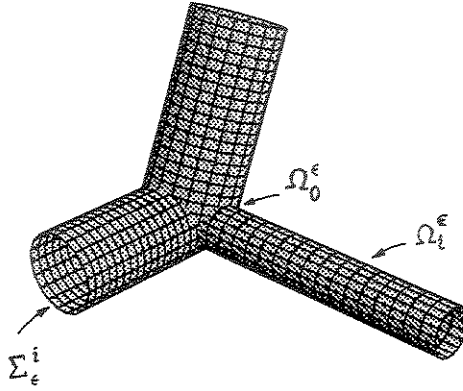


Figura 4.1: conexão de canos

### 4.1.2 Formulação matemática

O problema que queremos resolver corresponde a um problema de Navier-Stokes estacionário (não linear), que é formulado matematicamente como segue: Dados  $p_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , encontrar  $(\mathbf{v}^\epsilon, p^\epsilon) \in W^{1,2}(\Omega_\epsilon)^3 \times L^2(\Omega_\epsilon)$  tal que

$$-\mu \Delta \mathbf{v}^\epsilon + (\mathbf{v}^\epsilon \nabla) \mathbf{v}^\epsilon + \nabla p^\epsilon = 0 \text{ em } \Omega_\epsilon \quad (4.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^\epsilon = 0 \text{ em } \Omega_\epsilon \quad (4.7)$$

$$\mathbf{v}^\epsilon = 0 \text{ em } \Gamma_\epsilon \quad (4.8)$$

$$\mathbf{v}^\epsilon \times \mathbf{n}_i = 0 \text{ em } \Sigma_\epsilon^i \quad (4.9)$$

$$p^\epsilon = p_i \text{ em } \Sigma_\epsilon^i, \quad (4.10)$$

onde  $\mathbf{n}_i$  é o vetor normal exterior unitário a  $\Sigma_\epsilon^i$ , i.e.  $\mathbf{n}_i = e_3^i$ .

Nosso objetivo em primeiro lugar é provar a existência da solução deste problema, pois em geral, os sistemas de Navier-Stokes têm solução com condição de fronteira na pressão, somente para pequenos dados [BCMP]. A unicidade da solução será provada dentro de uma certa bola  $B_\epsilon$  e com uma condição adicional; ver abaixo. Finalmente, e talvez o mais importante, estudaremos o comportamento assintótico do fluxo quando a espessura  $\epsilon$  tende a zero. Antes de continuar é importante fazer a seguinte observação.

Na equação (4.9), o fato de impor que a componente tangencial da velocidade seja igual a zero nas saídas  $\Sigma_\epsilon^i$ , não é uma restrição forte, pois podemos mostrar que mesmo não colocarmos esta condição, ao final tal condição é satisfeita. Para maiores detalhes ver [MaP].

## 4.2 Existência da Solução

### 4.2.1 Existência da velocidade $\mathbf{v}^\epsilon$

Iniciemos considerando o seguinte espaço

$$V_\epsilon = \{\phi \in H^1(\Omega_\epsilon)^3 : \phi = 0 \text{ em } \Gamma_\epsilon, \nabla \cdot \phi = 0 \text{ em } \Omega_\epsilon, (\phi|_{\Sigma_\epsilon^i}) \times \mathbf{n}_i = 0, \quad i = 1, \dots, m\},$$

munido da norma  $|\phi|_{1,2,\Omega_\epsilon} = \|\nabla\phi\|_{2,\Omega_\epsilon}$ .

Vamos encontrar  $\mathbf{v}^\epsilon \in V_\epsilon$  tal que

$$\mu \int_{\Omega_\epsilon} \nabla \mathbf{v}^\epsilon \nabla \phi + \int_{\Omega_\epsilon} (\mathbf{v}^\epsilon \nabla) \mathbf{v}^\epsilon \phi + \sum_{i=1}^m p_i \int_{\Sigma_\epsilon^i} \phi \cdot \mathbf{e}_3^i = 0, \quad \forall \phi \in V_\epsilon. \quad (4.11)$$

**Observação 4.1** Em [MP], Marusik-Paloka chama esta equação de formulação variacional. No entanto, multiplicando a equação (4.6) por uma função teste  $\phi$  em  $V_\epsilon$  e integrando por partes, para chegarmos a (4.11) devemos impor a condição de fronteira adicional

$$\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}^\epsilon}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Sigma_\epsilon^i} = 0; \quad i = 1, \dots, m,$$

c.f. comentário do final desta seção. Assim, na verdade estamos resolvendo o problema (4.6)-(4.10) junto com esta condição adicional. Pensamos consultá-lo sobre a questão, o que já deixa margem para iniciarmos pesquisa futura na área.

Notemos que se para todo  $i = 1, \dots, m$ , substituirmos todas as  $p_i$ , por  $p_i + c$ , onde  $c$  é uma constante qualquer, a equação (4.11) não muda. De fato, como

$$0 = \int_{\Omega_\epsilon} \nabla \cdot \phi = \int_{\partial\Omega_\epsilon} \phi \cdot \mathbf{n} = \int_{\Gamma_\epsilon} \phi \cdot \mathbf{n} + \sum_{i=1}^m \int_{\Sigma_\epsilon^i} \phi \cdot \mathbf{e}_3^i = \sum_{i=1}^m \int_{\Sigma_\epsilon^i} \phi \cdot \mathbf{e}_3^i$$



temos que

$$\sum_{i=1}^m (p_i + c) \int_{\Sigma_i^i} \phi \cdot e_3^i = \sum_{i=1}^m p_i \int_{\Sigma_i^i} \phi \cdot e_3^i + \sum_{i=1}^m c \int_{\Sigma_i^i} \phi \cdot e_3^i = \sum_{i=1}^m p_i \int_{\Sigma_i^i} \phi \cdot e_3^i.$$

Em particular podemos considerar  $c = \bar{q}$  onde  $\bar{q}$  é dado por (2.8).

**Teorema 4.2** *Sejam  $d_i = p_i - \bar{q}$ ,  $d = (\sum_{i=1}^m d_i^2)^{\frac{1}{2}}$  e  $c = c(4, 2)$  a constante do Lema 3.1. Se  $d$  e o diâmetro  $\epsilon$  do cano, são tais que*

$$d < \frac{\mu^2}{4c^2 c_2 \epsilon^{3/2}} \quad (4.12)$$

com  $c_2$  sendo a constante do Lema 3.2, então a equação (4.11) tem uma única solução  $\mathbf{v}^{\epsilon*}$ .

**Demonstração.** Para provar este Teorema, vamos usar o Teorema do Ponto Fixo de Banach em  $B_\epsilon = \{\phi \in V_\epsilon : \|\nabla \phi\|_{2, \Omega_\epsilon} < \frac{\mu}{2c^2 \sqrt{\epsilon}}\}$ , e para o operador  $T(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$ , onde  $\mathbf{v} \in V_\epsilon$  é solução da equação

$$\mu \int_{\Omega_\epsilon} \nabla \mathbf{v} \nabla \phi + \int_{\Omega_\epsilon} (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{v} \phi + \sum_{i=1}^m p_i \int_{\Sigma_i^i} \phi \cdot e_3^i = 0, \quad \forall \phi \in V_\epsilon. \quad (4.13)$$

Observemos que a equação integral (4.13) é linear, a qual passaremos a mostrar que tem uma única solução  $\mathbf{v} \in V_\epsilon$ . Para isso vamos usar o Teorema de Lax-Milgram. Fixada  $\mathbf{v} \in B_\epsilon$ , tomemos a seguinte forma bilinear  $a(\mathbf{v}, \phi)$  definida por

$$a(\mathbf{v}, \phi) = \mu \int_{\Omega_\epsilon} \nabla \mathbf{v} \nabla \phi + \int_{\Omega_\epsilon} (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{v} \phi, \quad \text{onde } \mathbf{v}, \phi \in V_\epsilon.$$

O funcional  $f$  tal que

$$\langle f, \phi \rangle = - \sum_{i=1}^m p_i \int_{\Sigma_i^i} \phi \cdot e_3^i$$

é linear e limitado em  $W^{1,2}(\Omega_\epsilon)$ . Além disso, veremos que

---

\*O valor mínimo de  $d$  é atingido quando  $\bar{q} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m p_i$ , isto diz que tomando tal valor de  $\bar{q}$ ,  $d$  é minimal e conseqüentemente a estimativa (4.12) é ótima.

$$(i) |a(\mathbf{v}, \phi)| \leq \mu \|\nabla \mathbf{v}\|_{2, \Omega_\epsilon} \|\nabla \phi\|_{2, \Omega_\epsilon}, \quad \forall (\mathbf{v}, \phi) \in V_\epsilon \times V_\epsilon;$$

$$(ii) \mu/2 \|\mathbf{v}\|_{2, \Omega_\epsilon}^2 \leq a(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V_\epsilon$$

e assim concluiremos, usando o Teorema de Lax-Milgram, que existe uma única  $\mathbf{v} \in V_\epsilon$  tal que  $a(\mathbf{v}, \phi) = \langle f, \phi \rangle$ , para toda  $\phi \in V_\epsilon$ , ou seja, temos (4.13).

Usando o Teorema de imersões em espaços de Sobolev, a desigualdade de Hölder, a segunda desigualdades dada no Lema 3.1 e o fato de que  $\phi, \mathbf{u}$  estão no conjunto  $V_\epsilon$ , temos

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{v}, \phi)| &\leq \mu \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla \mathbf{v} \nabla \phi| + \int_{\Omega_\epsilon} |(\mathbf{u} \nabla) \mathbf{v} \phi| \\ &\leq \mu \|\nabla \mathbf{v}\|_{2, \Omega_\epsilon} \|\nabla \phi\|_{2, \Omega_\epsilon} + \|\mathbf{u}\|_{4, \Omega_\epsilon} \|\nabla \mathbf{v}\|_{2, \Omega_\epsilon} \|\phi\|_{4, \Omega_\epsilon} \\ &\leq \mu \|\nabla \mathbf{v}\|_{2, \Omega_\epsilon} \|\nabla \phi\|_{2, \Omega_\epsilon} + c^2 \epsilon^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{2, \Omega_\epsilon} \|\nabla \mathbf{v}\|_{2, \Omega_\epsilon} \|\nabla \phi\|_{2, \Omega_\epsilon} \\ &\leq \mu \|\nabla \mathbf{v}\|_{2, \Omega_\epsilon} \|\nabla \phi\|_{2, \Omega_\epsilon} + c^2 \epsilon^{1/2} \frac{\mu}{2c^2 \epsilon^{1/2}} \|\nabla \mathbf{v}\|_{2, \Omega_\epsilon} \|\nabla \phi\|_{2, \Omega_\epsilon} \\ &= \mu \|\nabla \mathbf{v}\|_{2, \Omega_\epsilon} \|\nabla \phi\|_{2, \Omega_\epsilon} + \frac{\mu}{2} \|\nabla \mathbf{v}\|_{2, \Omega_\epsilon} \|\nabla \phi\|_{2, \Omega_\epsilon} \\ &\leq \mu \|\nabla \mathbf{v}\|_{2, \Omega_\epsilon} \|\nabla \phi\|_{2, \Omega_\epsilon}. \end{aligned}$$

Isso mostra (i). Para ver (ii) notemos que

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \mu \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla \mathbf{v}|^2 + \int_{\Omega_\epsilon} (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{v} \mathbf{v} = \mu \|\nabla \mathbf{v}\|_{2, \Omega_\epsilon}^2 + \int_{\Omega_\epsilon} (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{v} \mathbf{v} \\ &\geq \mu \|\nabla \mathbf{v}\|_{2, \Omega_\epsilon}^2 - \|\mathbf{u}\|_{4, \Omega_\epsilon} \|\nabla \mathbf{v}\|_{2, \Omega_\epsilon} \|\mathbf{v}\|_{4, \Omega_\epsilon} \\ &\geq \mu \|\nabla \mathbf{v}\|_{2, \Omega_\epsilon}^2 - c^2 \epsilon^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{2, \Omega_\epsilon} \|\nabla \mathbf{v}\|_{2, \Omega_\epsilon}^2 \\ &= (\mu - c^2 \epsilon^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{2, \Omega_\epsilon}) \|\nabla \mathbf{v}\|_{2, \Omega_\epsilon}^2 \\ &> \frac{\mu}{2} \|\nabla \mathbf{v}\|_{2, \Omega_\epsilon}^2. \end{aligned}$$

Portanto,  $T$  está bem definida.

Agora vejamos que  $T(B_\epsilon) \subset B_\epsilon$ . Para isto notemos que

$$\sum_{i=1}^m p_i \int_{\Sigma_\epsilon^i} \phi \cdot e_3^i = \sum_{i=1}^m d_i \int_{\Sigma_\epsilon^i} \phi \cdot e_3^i \leq \sum_{i=1}^m d_i \|\phi\|_{2, \Sigma_\epsilon^i} |\Sigma_\epsilon^i|^{1/2} \leq dc_2 \epsilon \|\nabla \phi\|_{2, \Omega_\epsilon},$$

onde para a última desigualdade usamos (3.6) e o fato de  $|\Sigma_\epsilon^i|^{1/2} = O(\epsilon)$ . Daí e de (ii) acima, obtemos

$$\frac{\mu}{2} \|\nabla \mathbf{v}\|_{2, \Omega_\epsilon}^2 < a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = - \sum_{i=1}^m p_i \int_{\Sigma_\epsilon^i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_3^i \leq dc_2 \epsilon \|\nabla \mathbf{v}\|_{2, \Omega_\epsilon},$$

então,

$$\|\nabla \mathbf{v}\|_{2, \Omega_\epsilon} < \frac{2dc_2 \epsilon}{\mu}.$$

Logo, usando (4.12) e  $\mathbf{v} = T(\mathbf{u})$ , obtemos

$$\|\nabla T(\mathbf{u})\|_{2, \Omega_\epsilon} < \frac{2dc_2 \epsilon}{\mu} < \frac{\mu}{2c^2 \sqrt{\epsilon}}$$

e conseqüentemente,  $T(B_\epsilon) \subset B_\epsilon$ .

Finalmente provaremos que  $T$  é uma contração. Dadas  $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in B_\epsilon$ , as substituímos na equação (4.13), depois subtraímos as duas equações e tomando  $\phi = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{w})$ , encontramos

$$\begin{aligned} & \mu \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla(T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{w}))|^2 = \\ & \int_{\Omega_\epsilon} [(\mathbf{u} \nabla) T(\mathbf{u}) - (\mathbf{w} \nabla) T(\mathbf{w})](T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{w})) = \\ & [(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \nabla] T(\mathbf{u})(T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{w})) + (\mathbf{w} \nabla)(T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{w}))(T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{w})) = \\ & \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|_{4, \Omega_\epsilon} \|\nabla T(\mathbf{u})\|_{2, \Omega_\epsilon} \|T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{w})\|_{4, \Omega_\epsilon} + \\ & + \|\mathbf{w}\|_{4, \Omega_\epsilon} \|\nabla(T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{w}))\|_{2, \Omega_\epsilon} \|T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{w})\|_{4, \Omega_\epsilon} \leq \\ & c^2 \sqrt{\epsilon} \|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{w})\|_{2, \Omega_\epsilon} \|\nabla T(\mathbf{u})\|_{2, \Omega_\epsilon} \|\nabla(T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{w}))\|_{2, \Omega_\epsilon} + \\ & + c^2 \sqrt{\epsilon} \|\nabla \mathbf{w}\|_{2, \Omega_\epsilon} \|\nabla(T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{w}))\|_{2, \Omega_\epsilon}^2 < \\ & c^2 \sqrt{\epsilon} \frac{2dc_2 \epsilon}{\mu} \|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{w})\|_{2, \Omega_\epsilon} \|\nabla(T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{w}))\|_{2, \Omega_\epsilon} + \\ & + c^2 \sqrt{\epsilon} \|\nabla \mathbf{w}\|_{2, \Omega_\epsilon} \|\nabla(T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{w}))\|_{2, \Omega_\epsilon}^2 < \\ & \frac{2dc_2 \epsilon c^2 \sqrt{\epsilon}}{\mu} \|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{w})\|_{2, \Omega_\epsilon} \|\nabla(T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{w}))\|_{2, \Omega_\epsilon} + \frac{\mu}{2} \|\nabla(T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{w}))\|_{2, \Omega_\epsilon}^2. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Logo

$$\|\nabla(T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{w}))\|_{2, \Omega_\epsilon} < \frac{4dc^2 \epsilon^{3/2}}{\mu^2} \|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{w})\|_{2, \Omega_\epsilon}$$

e como por hipótese do teorema

$$\frac{4dc^2\epsilon^{3/2}}{\mu^2} < 1$$

temos que  $T$  é uma contração; portanto o Teorema do Ponto Fixo de Banach implica a existência de uma única  $\mathbf{v}$  que denotamos por  $\mathbf{v}^\epsilon$  tal que  $T(\mathbf{v}^\epsilon) = \mathbf{v}^\epsilon$ . Com isto, mostramos a existência e unicidade de solução  $\mathbf{v}^\epsilon$  da equação (4.11) em  $B_\epsilon$ .  $\square$

**Observação 4.3** *Uma questão interessante em aberto é saber se fora da bola  $B_\epsilon$  existem outras soluções para valores de  $d$  pequenos e caso elas existam, saber se são únicas.*

Para finalizar esta Seção queremos fazer o seguinte comentário: Anteriormente mostramos que existe uma única  $\mathbf{v}^\epsilon$  em  $V_\epsilon$  tal que

$$\mu \int_{\Omega_\epsilon} \nabla \mathbf{v}^\epsilon \nabla \phi + \int_{\Omega_\epsilon} (\mathbf{v}^\epsilon \nabla) \mathbf{v}^\epsilon \cdot \phi + \sum_{i=1}^m p_i \int_{\Sigma_\epsilon^i} \phi \cdot \mathbf{e}_3^i = 0, \quad \forall \phi \in V_\epsilon. \quad (4.15)$$

Então, supondo que  $\mathbf{v}^\epsilon, p^\epsilon$  têm um certo grau de regularidade (por exemplo,  $\mathbf{v}^\epsilon \in C^2(\bar{\Omega}_\epsilon), p^\epsilon \in C^2(\bar{\Omega}_\epsilon)$ ) e como

$$\int_{\Omega_\epsilon} \phi \cdot \nabla p^\epsilon = - \int_{\Omega_\epsilon} p^\epsilon \nabla \cdot \phi + \int_{\partial\Omega_\epsilon} p^\epsilon \phi \cdot \mathbf{e}_3^i = \sum_{i=1}^m p_i \int_{\Sigma_\epsilon^i} \phi \cdot \mathbf{e}_3^i$$

integrando por partes (4.15), obtemos que para toda  $\phi \in V_\epsilon$

$$\begin{aligned} & -\mu \int_{\Omega_\epsilon} \Delta \mathbf{v}^\epsilon \cdot \phi + \int_{\Omega_\epsilon} (\mathbf{v}^\epsilon \nabla) \mathbf{v}^\epsilon \cdot \phi + \mu \int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{\partial \mathbf{v}^\epsilon}{\partial \mathbf{n}} \cdot \phi + \int_{\Omega_\epsilon} \phi \cdot \nabla p^\epsilon = 0 \\ \Rightarrow & \int_{\Omega_\epsilon} \left( -\mu \Delta \mathbf{v}^\epsilon + (\mathbf{v}^\epsilon \nabla) \mathbf{v}^\epsilon + \nabla p^\epsilon \right) \cdot \phi + \mu \int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{\partial \mathbf{v}^\epsilon}{\partial \mathbf{n}} \cdot \phi = 0 \\ \Rightarrow & \int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{\partial \mathbf{v}^\epsilon}{\partial \mathbf{n}} \cdot \phi = \sum_{i=1}^m \int_{\Sigma_\epsilon^i} \frac{\partial \mathbf{v}^\epsilon}{\partial \mathbf{e}_3^i} \cdot \phi = 0 \\ \Rightarrow & \int_{\Sigma_\epsilon^i} \phi_3 \frac{\partial \mathbf{v}^\epsilon}{\partial \mathbf{e}_3^i} \cdot \mathbf{e}_3^i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad \forall \phi_3 \in C_0^\infty(\Sigma_\epsilon^i) \\ \Rightarrow & \frac{\partial \mathbf{v}^\epsilon}{\partial \mathbf{e}_3^i} \cdot \mathbf{e}_3^i|_{\Sigma_\epsilon^i} = 0; \end{aligned} \quad (4.16)$$

conectado com a observação (4.1).

## 4.2.2 Existência e unicidade da pressão $p^\epsilon$ .

Nesta Seção vamos explicar o enunciado e a demonstração do seguinte Teorema:

**Teorema 4.4** *Existe uma única  $p^\epsilon \in L^2_0(\Omega_\epsilon)^\dagger$  tal que (3.6) é válido no sentido das distribuições. Além disso,  $p^\epsilon = p_i$  em  $\Sigma_\epsilon^i$  no sentido de  $H_n^{-1/2} := (H_n^{1/2})'$ , onde  $H_n^{1/2} = \{\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega_\epsilon)^3 : \varphi \times \mathbf{n} = 0\}$ , sendo  $\mathbf{n}$  o vetor normal unitário exterior a  $\partial\Omega_\epsilon$ .*

Observemos que o espaço  $H_n^{1/2}$  consiste exatamente das funções vetoriais  $\varphi$  em  $H^{1/2}(\partial\Omega_\epsilon)$  que são paralelas a  $\mathbf{n}$  na  $\partial\Omega_\epsilon$ , i.e.  $\varphi = g\mathbf{n}$  sendo  $g$  uma função escalar em  $H^{1/2}(\partial\Omega_\epsilon)$ .

Para explicar o enunciado e, também, motivar o resultado, iniciamos considerando  $\mathbf{v}, p$  suaves em  $\Omega_\epsilon$  (na verdade, bastaria  $\mathbf{v} \in W^{2,2}(\Omega_\epsilon)^3$ ,  $p \in W^{1,2}(\Omega_\epsilon)$ ). Sejam  $\varphi \in W^{1,2}(\Omega_\epsilon)^3$  e  $\sigma := -\nabla\mathbf{v} + pI$  onde  $I$  é a matriz identidade de ordem 3. (Estamos considerando, sem perda de generalidade, que no problema original temos  $\mu = 1$ ; senão poderíamos tomar  $\sigma = -\mu\nabla\mathbf{v} + pI$ ).

Observemos que  $\nabla \cdot \sigma = -\Delta\mathbf{v} + \nabla p$ ; portanto se multiplicamos por  $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega_\epsilon})^3$  e integramos por partes, obtemos

$$\int_{\Omega_\epsilon} \varphi \cdot (\nabla \cdot \sigma) = \int_{\Omega_\epsilon} (\nabla\mathbf{v} : \nabla\varphi - p\nabla \cdot \varphi) + \int_{\partial\Omega_\epsilon} (p\varphi \cdot \mathbf{n} - \varphi \cdot (\nabla\mathbf{v})\mathbf{n}).$$

Tomemos  $\varphi = g\mathbf{n}$  onde  $g \in H^{1/2}(\partial\Omega_\epsilon)$ . Logo

$$p\varphi \cdot \mathbf{n} - \varphi \cdot (\nabla\mathbf{v})\mathbf{n} = pg - g\mathbf{n} \cdot (\nabla\mathbf{v})\mathbf{n} = g(p - \mathbf{n} \cdot (\nabla\mathbf{v})\mathbf{n}) = g\mathbf{n} \cdot \sigma\mathbf{n},$$

e podemos escrever

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} g\mathbf{n} \cdot \sigma\mathbf{n} = \int_{\Omega_\epsilon} (\varphi \cdot (\nabla \cdot \sigma) + \sigma : \nabla\varphi), \quad (4.17)$$

onde pomos

$$\sigma : \nabla\varphi := -\nabla\mathbf{v} : \nabla\varphi + p\nabla \cdot \varphi.$$

Não é difícil ver que esta fórmula vale para todo par  $(\mathbf{v}, p) \in W^{2,2}(\Omega_\epsilon)^3 \times W^{1,2}(\Omega_\epsilon)$  e

---

<sup>†</sup>Dizer que  $p^\epsilon \in L^2_0(\Omega_\epsilon)$  significa que  $p^\epsilon \in L^2(\Omega_\epsilon)$  e que  $\int_{\Omega_\epsilon} p^\epsilon = 0$ .

toda  $\varphi \in W^{1,2}(\Omega_\epsilon)$  tal que  $\gamma(\varphi) \times \mathbf{n} = 0$ , onde  $\gamma$  é o operador traço usual; v. Capítulo 1. Agora, observemos que para o lado direito de (4.17) fazer sentido é suficiente que  $\nabla \cdot \sigma \in L^{6/5}(\Omega_\epsilon)$  e  $\sigma \in L^2(\Omega_\epsilon)$ ; de fato, basta usar a desigualdade de Hölder e a imersão de Sobolev  $W^{1,2}(\Omega_\epsilon) \subset L^6(\Omega_\epsilon)$ . Daí, tirando proveito de (4.17), vamos definir um operador traço  $tr(\mathbf{v}, p) \in H_n^{-1/2}$  para campos  $(\mathbf{v}, p) \in W^{1,2}(\Omega_\epsilon)^3 \times L^2(\Omega_\epsilon)$  tais que  $\nabla \cdot \sigma = -\Delta \mathbf{v} + \nabla p$ , calculado no sentido das distribuições, seja uma função em  $L^{6/5}(\Omega_\epsilon)$ , da seguinte forma:

$$\begin{aligned} tr(\mathbf{v}, p) : H_n^{1/2}(\partial\Omega)^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g\mathbf{n} &\longmapsto \langle tr(\mathbf{v}, p), g\mathbf{n} \rangle := \int_{\Omega_\epsilon} (\varphi \cdot (\nabla \cdot \sigma) + \sigma : \nabla \varphi), \end{aligned}$$

onde  $\varphi$  é uma função em  $W^{1,2}(\Omega_\epsilon)$  tal que  $\gamma(\varphi) = g\mathbf{n}$ ; cf. Teorema 1.12. A primeira questão que surge aqui é se esta é uma boa definição, no sentido de que não depende da extensão  $\varphi$  de  $g\mathbf{n}$ . De fato não depende, pois se tomamos duas extensões  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , chamando  $\tilde{\varphi} = \varphi_1 - \varphi_2$  temos  $\tilde{\varphi} \in W_0^{1,2}(\Omega_\epsilon)$ , logo existe uma seqüência  $\{\varphi_k\}$  em  $C_0^\infty(\Omega)$  convergindo para  $\tilde{\varphi}$  na norma de  $W^{1,2}(\Omega_\epsilon)$ . Como  $\nabla \cdot \sigma$  é calculado no sentido das distribuições, i.e.

$$\int_{\Omega_\epsilon} \psi \cdot (\nabla \cdot \sigma) = - \int_{\Omega_\epsilon} \sigma : \nabla \psi,$$

para toda  $\psi \in C_0^\infty(\Omega_\epsilon)$ , temos que

$$\int_{\Omega_\epsilon} (\varphi_k \cdot (\nabla \cdot \sigma) + \sigma : \nabla \varphi_k) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

logo, passando ao limite, concluímos que

$$\int_{\Omega_\epsilon} (\tilde{\varphi} \cdot (\nabla \cdot \sigma) + \sigma : \nabla \tilde{\varphi}) = 0,$$

i.e.

$$\int_{\Omega_\epsilon} (\varphi_1 \cdot (\nabla \cdot \sigma) + \sigma : \nabla \varphi_1) = \int_{\Omega_\epsilon} (\varphi_2 \cdot (\nabla \cdot \sigma) + \sigma : \nabla \varphi_2)$$

logo, a definição dada acima, não depende da extensão  $\varphi$ .

A segunda questão é comprovar nossa afirmação de que  $tr(\mathbf{v}, p) \in H_n^{-1/2}$ . De fato,  $tr(\mathbf{v}, p)$  é linear, pois segue da definição. Agora, dado  $\varphi \in H_n^{1/2}$ , pelo Teorema 1.13, existe  $\tilde{\varphi} \in W^{1,2}(\Omega_\epsilon)$  tal que  $\gamma(\tilde{\varphi}) = \varphi$ , sendo  $\gamma$  o traço usual de  $\tilde{\varphi}$ , e

$$\|\varphi\|_{1,2,\Omega_\epsilon} \leq c \|g\mathbf{n}\|_{\frac{1}{2},2,\partial\Omega_\epsilon}$$

com  $c$  independente de  $\varphi$ , e assim temos que

$$\langle \text{tr}(\mathbf{v}, p), g\mathbf{n} \rangle = \int_{\Omega_\epsilon} (\varphi \cdot \nabla \cdot \sigma + \sigma : \nabla \varphi);$$

logo,

$$\begin{aligned} |\langle \text{tr}(\mathbf{v}, p), \varphi \rangle| &\leq \|\varphi\|_{6, \Omega_\epsilon} \|\nabla \cdot \sigma\|_{\frac{6}{5}, \Omega_\epsilon} + \|\sigma\|_{2, \Omega_\epsilon} \|\nabla \varphi\|_{2, \Omega_\epsilon} \\ &\leq c_1 (\|\nabla \cdot \sigma\|_{\frac{6}{5}, \Omega_\epsilon} + \|\sigma\|_{2, \Omega_\epsilon}) \|g\mathbf{n}\|_{H_n^{1/2}, \partial\Omega_\epsilon}. \end{aligned}$$

**Observação 4.5** A aplicação  $(\mathbf{v}, h) \mapsto \text{tr}(\mathbf{v}, h) \in H_n^{-1/2}(\partial\Omega_\epsilon)^3$  é linear. Isto segue devido ao fato de  $\sigma$  ser linear.

Definamos em  $W^{2,2}(\Omega_\epsilon) \times W^{1,2}(\Omega_\epsilon)$  a aplicação  $||| \cdot |||$  dada por

$$|||(\mathbf{v}, h)||| = \|\sigma\|_{6/5, \Omega_\epsilon} + \|\nabla \cdot \sigma\|_{2, \Omega_\epsilon}.$$

Esta aplicação define uma norma se exigimos que  $\mathbf{v}|_\Gamma = 0$  e  $\mathbf{v}|_{\Sigma_i^e}$  seja paralela a  $e_3^i$  para algum  $i$ , pois

$$\|\sigma\|_2 = 0 \implies \begin{cases} \partial_{x_j} v^i = 0, & \text{se } i \neq j \\ \partial_{x_i} v^i = h \end{cases}$$

ou seja  $v_i = v_i(x_i)$  e  $\partial_{x_i} v_i = h = \partial_{x_j} v_j$ , para todo  $i, j$ , o que implica que  $\mathbf{v} = c_0 \mathbf{x} + \vec{c}_1$ . Mas  $\mathbf{v}|_{\Sigma_i^e} = \alpha e_3^i$ , para algum  $i$ , implica que  $c_0 = 0$  e conseqüentemente  $\mathbf{v} = \vec{c}_1$  mas  $\mathbf{v}|_\Gamma = 0$ , logo  $\mathbf{v} = 0$ . Sendo  $\mathbf{v} = 0$  e  $\partial_{x_i} v_i = h$  temos que  $h = 0$ ; por tanto, sendo  $||| \cdot |||$  uma norma, a aplicação

$$|||(\mathbf{v}, h)||| = \|\sigma\|_{2, \Omega_\epsilon} + \|\nabla \cdot \sigma\|_{6/5, \Omega_\epsilon}$$

é contínua.

Para ver que existe uma única  $p^\epsilon \in L_0^2(\Omega_\epsilon)$  tal que (4.6) vale no sentido das distribuições, consideremos o funcional linear contínuo  $\mathcal{F} : D_0^{1,2}(\Omega_\epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$\mathcal{F}(\psi) = \int_{\Omega_\epsilon} \mu \nabla \mathbf{v}^\epsilon \nabla \psi + (\mathbf{v}^\epsilon \nabla) \mathbf{v}^\epsilon \psi.$$

De (4.11) temos que  $\mathcal{F}$  é identicamente nulo em  $\mathcal{D}(\Omega_\epsilon)$  e pela continuidade, também em  $\mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega_\epsilon)$ . Como  $\Omega_\epsilon$  é limitado, então pelo feito na Seção 1.5,  $\mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega_\epsilon) = \hat{\mathcal{D}}_0^{1,2}(\Omega_\epsilon)$ , e conseqüentemente pelo Teorema 1.26, existe uma única  $p \in L_0^2(\Omega_\epsilon)$  tal que

$$\mathcal{F}(\psi) = \int_{\Omega_\epsilon} p \nabla \cdot \psi, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega_\epsilon). \quad \square$$

Uma vez mostrada a existência e a unicidade da pressão vejamos que a mesma assume os valores dados  $p_i$  em  $\Sigma_\epsilon^i$  no sentido do traço acima:

Para  $(\mathbf{v}^\epsilon, p^\epsilon) \in W^{1,2}(\Omega_\epsilon)^3 \times L^2(\Omega_\epsilon)$ , solução de (4.6) no sentido das distribuições, temos

$$\sigma = -\nabla \mathbf{v}^\epsilon + p^\epsilon I \in L^2(\Omega_\epsilon)^{3 \times 3},$$

e

$$(\nabla \mathbf{v}^\epsilon, \nabla \varphi) + (\mathbf{v}^\epsilon \nabla \mathbf{v}^\epsilon, \varphi) - (p^\epsilon, \nabla \cdot \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\epsilon)$$

i.e.,

$$\langle \nabla \cdot \sigma, \varphi \rangle := - \int_{\Omega_\epsilon} \sigma : \nabla \varphi = -((\mathbf{v}^\epsilon \cdot \nabla) \mathbf{v}^\epsilon, \varphi),$$

ou seja  $\nabla \cdot \sigma = -(\mathbf{v}^\epsilon \nabla) \mathbf{v}^\epsilon$ ; mas  $(\mathbf{v}^\epsilon \nabla) \mathbf{v}^\epsilon \in L^{3/2}(\Omega_\epsilon) \subset L^{6/5}(\Omega_\epsilon)$ , então pela teoria anterior, existe  $tr(\mathbf{v}^\epsilon, p^\epsilon) \in H_n^{-1/2}$  tal que

$$\langle tr(\mathbf{v}^\epsilon, p^\epsilon), \varphi \rangle = \int_{\Omega_\epsilon} -\varphi \cdot (\mathbf{v}^\epsilon \nabla) \mathbf{v}^\epsilon - \nabla \mathbf{v}^\epsilon : \nabla \varphi + p^\epsilon \nabla \cdot \varphi, \quad \forall \varphi \in H_n^{1/2}(\partial \Omega_\epsilon).$$

Tomando  $\varphi \in V_\epsilon$  com  $\varphi = 0$  em  $\Gamma \setminus \Sigma_\epsilon^i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , obtemos

$$\langle tr(\mathbf{v}^\epsilon, p^\epsilon), \varphi \rangle = p_i \int_{\Sigma_\epsilon^i} \varphi \cdot \mathbf{n}.$$

Como  $\varphi$  é arbitrária, temos que  $tr(\mathbf{v}^\epsilon, p^\epsilon) = p_i$  em  $\Sigma_\epsilon^i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , e assim o Teorema fica provado.  $\square$

### 4.3 Colagem

Nesta Seção queremos construir uma solução aproximada para o problema original (4.6)-(4.10). A proposta é colocar a solução de Poiseuille nas saídas dos canais, a partir



de um ponto estratégico de truncamento e por outro lado considerar a solução truncada do problema de Leray para canais infinitos e fazer uma colagem especial destas duas soluções.

Começamos com um domínio  $G$  formado pela união de canais cilíndricos ilimitados, ou seja

$$G = \bigcup_{i=0}^m \Omega_i$$

onde

$$\Omega_i = \{y = (\bar{y}^i, y_3^i) \in \mathbb{R}^3, 0 < y_3^i, \bar{y}^i = (y_1^i, y_2^i) \in S^i\} \quad (4.18)$$

sendo  $S^i \subset \mathbb{R}^2, i = 1, \dots, m$  domínios suaves e limitados e  $\Omega_0$  um conjunto limitado (que pode ser vazio) formado no cruzamento dos  $\Omega_i, i = 1, \dots, m$ .

Tomemos numa vizinhança da junção, uma região interior  $G_\epsilon$ , dada por

$$G_\epsilon = \Omega_0^\epsilon \cup \left( \bigcup_{i=1}^m G_\epsilon^i \right)$$

onde  $G_\epsilon^i = \{x = (x_1^i, x_2^i, x_3^i) \in \Omega_i^\epsilon : 0 < x_3^i < -\epsilon \ln \epsilon\}$  e  $\Omega_0^\epsilon = \epsilon \Omega_0$ . O ponto

$$x_3 = -\epsilon \ln \epsilon$$

será o ponto estratégico de truncamento (colagem) dos fluxos de Leray e Poiseuille.

Consideremos o seguinte problema de Leray:

$$-\mu \Delta V + \nabla Q = 0 \text{ em } G \quad (4.19)$$

$$V = 0 \text{ em } \partial G \quad (4.20)$$

$$\nabla \cdot V = 0 \text{ em } G \quad (4.21)$$

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} V = U^i := \frac{w^i(\bar{y}^i)}{L_i} (q - p_i) e_3^i \text{ em } \Omega_i, i = 1, \dots, m. \quad (4.22)$$

Notemos que a condição (4.22) diz que quando  $|y| \rightarrow \infty$ , a solução do problema de Leray, cuja solução sabemos que existe (Capítulo 2), se aproxima a um fluxo de Poiseuille. ou seja, quando  $y_3^i$  vai para o infinito, temos que

$$\int_{\Sigma(y_3^i)} V \cdot \mathbf{n} \rightarrow \phi$$

onde  $\phi$  é o fluxo do fluido Poiseuille; portanto, o campo  $(V - U_i^\epsilon, Q - P_i^\epsilon)$ , sendo  $U_i^\epsilon$  e  $P_i^\epsilon$  dados em (2.5)-(2.6), satisfaz o problema (2.16) – (2.19) em  $\Omega = \Omega_i$  e conseqüentemente usando as estimativas do comportamento assintótico dadas no Capítulo 2, temos

$$|D^\alpha(V(y) - U^i(\bar{y}^i))| + |D^\alpha(\nabla(Q(y) - \frac{1}{L_i}(p_i - q)y_3^i))| \leq ce^{-\sigma|y_3^i|} \text{ em } G_i \quad (4.23)$$

para algum  $\sigma \geq 1$ , e para qualquer multiíndice  $\alpha$ ; em particular

$$|V(y) - U^i(\bar{y}^i)| + |\nabla V(y) - \nabla U^i(\bar{y}^i)| \leq ce^{-\sigma|y_3^i|} \text{ em } G_i \quad (4.24)$$

e  $Q$  pode ser escolhida a menos de uma constante de forma tal que

$$|Q(y) - \frac{1}{L_i}(p_i - q)y_3^i| \leq ce^{-\sigma|y_3^i|} \text{ em } G_i. \quad (4.25)$$

Sejam  $V^\epsilon(x) = \epsilon^2 \mathcal{V}^\epsilon(x) = \epsilon^2 V(x/\epsilon)$  e  $Q^\epsilon(x) = \epsilon Q^\epsilon(x) = \epsilon Q(x/\epsilon)$ . Olhando para (4.22) vemos que  $(V^\epsilon, Q^\epsilon)$  se aproxima continuamente de  $(U_i^\epsilon, P_i^\epsilon)$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$  i.e  $|y| \rightarrow \infty$ . Na seção transversal de truncamento,

$$\gamma_i^\epsilon := \{x = (x_1^i, x_2^i, x_3^i) \in \Omega_i^\epsilon : x_3^i = -\epsilon \ln \epsilon\}, \quad (4.26)$$

entre  $G_i^\epsilon$ , onde teremos a solução de Leray  $(V^\epsilon, Q^\epsilon)$  e

$$\omega_i^\epsilon = \{x \in \Omega_i^\epsilon : -\epsilon \ln \epsilon < x_3^i < L_i\}$$

, onde temos a solução de Poiseuille  $(U_i^\epsilon, P_i^\epsilon)$ , nossa aproximação não é contínua; escrevemos  $V^\epsilon = U_i^\epsilon + E_i^\epsilon$ , i.e.,  $\mathcal{V}^\epsilon = \mathcal{U}_i^\epsilon + \mathcal{E}_i^\epsilon$ , onde

$$E_i^\epsilon(\bar{x}^i) = \epsilon^2 [V(\bar{x}_i/\epsilon, -\ln \epsilon) - U^i(\bar{x}^i/\epsilon)]$$

i.e.

$$\mathcal{E}_i^\epsilon(\bar{x}^i) = V(\bar{x}_i/\epsilon, -\ln \epsilon) - U^i(\bar{x}^i/\epsilon)$$

Da desigualdade (4.23), temos que

$$|\mathcal{E}_i^\epsilon(x)| = |V(\bar{x}_i/\epsilon, -\ln \epsilon) - U^i(\bar{x}^i/\epsilon)| \leq ce^{-\sigma|\ln \epsilon|} = ce^\sigma \leq C\epsilon. \quad (4.27)$$

De modo análogo usando (4.24), encontramos que  $|\nabla \mathcal{E}_i^\epsilon(x)| \leq C\epsilon$ .

Definimos agora, nossa aproximação  $(\mathcal{W}^\epsilon, \Pi^\epsilon)$  como

$$\mathcal{W}^\epsilon = \begin{cases} \mathcal{U}_i^\epsilon + \eta_i^\epsilon & \text{em } \omega_i^\epsilon \\ \mathcal{V}^\epsilon & \text{em } G_\epsilon \end{cases}$$

$$\Pi^\epsilon = \begin{cases} P_i^\epsilon & \text{em } \omega_i^\epsilon \\ Q^\epsilon & \text{em } G_\epsilon \end{cases}$$

onde  $\eta_i^\epsilon$  é a “função de colagem” a qual é solução do problema

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \eta_i^\epsilon &= 0 \text{ em } \omega_i^\epsilon \\ \eta_i^\epsilon &= \mathcal{E}_i^\epsilon \text{ em } \gamma_i^\epsilon \\ \eta_i^\epsilon &= 0 \text{ em } \partial G_i^\epsilon \setminus \gamma_i^\epsilon. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Notemos que a função  $\eta_i^\epsilon$  corrige a descontinuidade que teríamos juntando simplesmente  $\mathcal{U}_i^\epsilon$  e  $\mathcal{V}_i^\epsilon$  em  $\gamma_i^\epsilon$ , e também preserva a incompressibilidade do fluido, i.e  $\nabla \cdot \eta_i^\epsilon = 0$ .

A solução de (4.28), de fato existe, pois  $\mathcal{E}_i^\epsilon \in H^{1/2}(\gamma_i^\epsilon)$  e

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_i^\epsilon} \mathcal{E}_i^\epsilon \cdot e_3^i &= \int_{S^i} [V(\bar{x}^i/\epsilon, -\ln \epsilon) - U^i(x^i/\epsilon)] d\bar{x}^i \\ &= \epsilon^2 \int_{S^i} [V(\bar{y}^i, -\ln \epsilon) - U^i(y^i)] d\bar{y}^i \\ &= \epsilon^2 \left[ \frac{(q-p_i)}{L_i} \int_{S^i} w^i - \frac{(q-p_i)}{L_i} \int_{S^i} w^i \right] = 0 \end{aligned}$$

Alem disso, tal solução satisfaz a seguinte estimativa

$$\|\nabla \eta_i^\epsilon\|_{2, \omega_i^\epsilon} \leq \frac{C}{\sqrt{\epsilon}} \|\mathcal{E}_i^\epsilon\|_{H^{1/2}(\gamma_i^\epsilon)}; \tag{4.29}$$

Ver [Ga, exercício III.3.5, p.144]<sup>‡</sup>; Mais ainda, pelo Teorema 1.13, sabemos que existe  $C_1 = C_1(3, 2, \omega_i^\epsilon)$  tal que

$$\|\mathcal{E}_i^{\epsilon*}\|_{1,2, \omega_i^\epsilon} \leq C_1 \|\mathcal{E}_i^\epsilon\|_{H^{1/2}(\gamma_i^\epsilon)},$$

---

<sup>‡</sup>Referimos ao leitor interessado em conhecer mais detalhes sobre o problema (4.28), ao Lema 9 em [MaP], onde aparece um resultado mais geral.

para alguma  $\mathcal{E}_i^{\epsilon^*} \in W^{1,2}(\omega_i^\epsilon)$ . Portanto, usando que  $|\mathcal{E}_i^\epsilon(x)| \leq C\epsilon$  e  $|\nabla \mathcal{E}_i^\epsilon(x)| \leq C\epsilon$  encontramos que

$$\|\mathcal{E}_i^\epsilon\|_{H^{1/2}(\gamma_i^\epsilon)} \leq C_1\epsilon^2$$

portanto,

$$\|\nabla \eta_i^\epsilon\|_{2,\omega_i^\epsilon} \leq \frac{C}{\sqrt{\epsilon}} \|\mathcal{E}_i^\epsilon\|_{H^{1/2}(\gamma_i^\epsilon)} \leq C_2\epsilon^{3/2}. \quad (4.30)$$

## 4.4 Estimativa do erro

Para expressar o erro de nossa aproximação, vamos usar a norma  $\|\cdot\|_\epsilon$  definida por  $\|f\|_\epsilon := |\Omega_\epsilon|^{-1/2} \|f\|_{2,\Omega_\epsilon}$ , onde  $|\Omega_\epsilon|$  é a medida de Lebesgue de  $\Omega_\epsilon$ . A razão pela qual usamos esta norma, é uma questão um pouco mais profunda. Na verdade, a convergência na  $\|\cdot\|_\epsilon$ , é chamada de convergência forte a duas escalas e ela é usada como ferramenta para medir, entre outras coisas, aproximações em domínios estreitos. Melhor ainda, dizemos que uma sequência  $\{v^\epsilon\}_{\epsilon>0}$ , tal que  $v^\epsilon \in L^r(\Omega_\epsilon)$  converge forte a duas escalas, a uma função  $v \in L^r(\Omega)$  se<sup>§</sup>

$$\frac{1}{|\Omega_\epsilon|^{1/r}} \|v^\epsilon - v\|_{r,\Omega_\epsilon} \rightarrow 0.$$

**Teorema 4.6** *Seja  $(\mathbf{v}^\epsilon, p^\epsilon)$  a solução do problema (3.6)-(3.10). Seja  $(\mathcal{W}^\epsilon, \Pi^\epsilon)$  a nossa aproximação. Então*

$$|\Omega_\epsilon|^{-1/2} \|\epsilon^{-2}\mathbf{v}^\epsilon - \mathcal{W}^\epsilon\|_{2,\Omega_\epsilon} \leq c\epsilon\sqrt{-\epsilon \ln \epsilon} \quad (4.31)$$

$$|\Omega_\epsilon|^{-1/2} \|\nabla(\epsilon^{-2}\mathbf{v}^\epsilon - \mathcal{W}^\epsilon)\|_{2,\Omega_\epsilon} \leq c\sqrt{-\epsilon \ln \epsilon} \quad (4.32)$$

$$|\Omega_\epsilon|^{-1/2} \|p^\epsilon - \Pi^\epsilon\|_{2,\Omega_\epsilon/\mathbb{R}} \leq c\epsilon\sqrt{-\epsilon \ln \epsilon}. \quad (4.33)$$

Antes de demonstrar este Teorema, é bom observar que  $|\Omega_\epsilon| = O(\epsilon^2)$ . Na verdade, fazendo uma mudança de variáveis vemos que  $|\Omega_0^\epsilon| = O(\epsilon^3)$  e  $|\Omega_i^\epsilon| = O(\epsilon^2)$  com  $i = 1, \dots, m$ . Para simplificar o trabalho na demonstração, todas as constantes que apareçam vão ser denotadas por  $c$ , mesmo que a maioria delas sejam diferentes.

---

<sup>§</sup>A convergência  $\|\cdot\|_{2,\Omega_\epsilon}$  não faz sentido para fazer estimativas neste tipo de domínios, pois por exemplo, nesta norma qualquer constante tende a zero.

Em (4.33) a notação  $\|f\|_{2,\Omega_\epsilon/\mathbb{R}}$  significa a norma de  $f$  a menos de uma constante.

**Demonstração.** A aproximação  $W^\epsilon = \epsilon^2 \mathcal{W}^\epsilon$ ,  $\Pi^\epsilon$ , satisfaz o seguinte sistema de equações no sentido das distribuições:

$$-\mu \Delta W^\epsilon + (W^\epsilon \nabla) W^\epsilon + \nabla \Pi^\epsilon = (W^\epsilon \nabla) W^\epsilon + B \text{ em } \Omega_\epsilon \quad (4.34)$$

$$\nabla \cdot W^\epsilon = 0 \text{ em } \Omega_\epsilon \quad (4.35)$$

$$W^\epsilon = 0 \text{ em } \Gamma_\epsilon \quad (4.36)$$

$$\Pi^\epsilon = p_i, \text{ em } \Sigma_\epsilon^i \quad (4.37)$$

$$W^\epsilon \times e_3^i = 0 \text{ em } \Sigma_\epsilon^i, i = 1, \dots, m, \quad (4.38)$$

onde

$$B = \sum_{i=1}^m \epsilon \left( Q e_3^i - \mu \frac{\partial V}{\partial y_i} + \ln \epsilon \frac{p_i - q}{L_i} e_3^i \right) \delta_{\gamma_i^\epsilon}$$

e  $\delta_{\gamma_i^\epsilon}$  denota uma medida delta de Dirac centrada em  $\gamma_i^\epsilon$ , i.e.

$$\int_{\Omega_\epsilon} \psi d\delta_{\gamma_i^\epsilon} = \int_{\gamma_i^\epsilon} \psi d\delta_{\gamma_i^\epsilon}, \quad \forall \psi \in C(\overline{\Omega_\epsilon}).$$

As últimas quatro igualdades são verificadas tranquilamente. Para ver a validade da primeira equação escolhemos  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\epsilon)^3$  tal que  $\gamma_\epsilon^i \cap \text{spt}(\varphi) \neq \emptyset$  para todo  $i = 1, \dots, m$ . Suponhamos ainda que  $\text{spt}(\varphi) \cap \Omega_0^\epsilon = \emptyset$ .

Tomando a expressão  $-\mu \Delta W^\epsilon + \nabla \Pi^\epsilon$ , no sentido das distribuições, temos:

$$\begin{aligned} \langle -\mu \Delta W^\epsilon + \nabla \Pi^\epsilon, \varphi \rangle &= \int_{\Omega_\epsilon} -\mu W^\epsilon \Delta \varphi + \Pi^\epsilon \nabla \cdot \varphi \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{G_\epsilon^i} -\mu W^\epsilon \Delta \varphi + \Pi^\epsilon \nabla \cdot \varphi W^\epsilon \nabla \varphi - \Pi^\epsilon \nabla \varphi + \sum_{i=1}^m \int_{\omega_\epsilon^i} -\mu W^\epsilon \Delta \varphi + \Pi^\epsilon \nabla \cdot \varphi \\ &= \epsilon^2 \sum_{i=1}^m \left[ \int_{G_\epsilon^i} \mu \nabla \mathcal{V}^\epsilon \nabla \varphi - \frac{1}{\epsilon} Q^\epsilon \nabla \varphi \right] + \left[ \int_{\omega_\epsilon^i} \mu \nabla (\mathcal{U}_\epsilon^i + \eta_\epsilon^i) \nabla \varphi - \frac{1}{\epsilon} P_\epsilon^i \nabla \varphi \right] \\ &= \int_{\text{spt}(\varphi)} -\mu \Delta W^\epsilon \varphi + \nabla \Pi^\epsilon \varphi + \sum_{i=1}^m \left[ \int_{\gamma_\epsilon^i} \mu \frac{\partial V^\epsilon}{\partial x_3^i} \varphi - \varphi Q^\epsilon \cdot e_3^i + \varphi P_\epsilon^i \cdot e_3^i \right] \\ &= \int_{\Omega_\epsilon} -\mu \Delta W^\epsilon \varphi + \nabla \Pi^\epsilon \varphi + \sum_{i=1}^m \epsilon \left( \mu \frac{\partial V}{\partial y_3^i} - Q e_3^i + \frac{p_i - q}{L_i} (-\ln \epsilon) e_3^i + q e_3^i \right) \int_{\gamma_\epsilon^i} \varphi \\ &= \int_{\Omega_\epsilon} -\mu \Delta W^\epsilon \varphi + \nabla \Pi^\epsilon \varphi + \sum_{i=1}^m \epsilon \left( \mu \frac{\partial V}{\partial y_3^i} - (Q - q) e_3^i + \frac{p_i - q}{L_i} (-\ln \epsilon) e_3^i \right) \int_{\gamma_\epsilon^i} \varphi \end{aligned}$$

Notemos que na última igualdade, o fato de ter  $(Q - q)$  em lugar de  $Q$ , não altera o resultado como foi observado no início da Seção. Não é difícil provar que  $W^\epsilon \in V_\epsilon$  e conseqüentemente,  $W^\epsilon - u^\epsilon \in V_\epsilon$ . Anteriormente mostramos que para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)^3$ , temos

$$\int_{\Omega_\epsilon} -\mu \Delta W^\epsilon \varphi + \int_{\Omega_\epsilon} \nabla \Pi^\epsilon \varphi = \sum_{i=1}^m \epsilon \left( \mu \frac{\partial V}{\partial y_1^i} - Q e_3^i - \frac{p_i - q}{L_i} \ln(\epsilon) e_3^i \right) \int_{\gamma_i^\epsilon} \varphi. \quad (4.39)$$

Por outro lado, se tomamos  $\varphi \in V_\epsilon$ , integrando por partes e levando em consideração que  $Q^\epsilon|_{\partial\Omega_\epsilon} = 0$ , mostramos que

$$\int_{\Omega_\epsilon} -\mu \Delta W^\epsilon \varphi + \int_{\Omega_\epsilon} \nabla \Pi^\epsilon \varphi = \mu \int_{\Omega_\epsilon} \nabla W^\epsilon \nabla \varphi + \sum_{i=1}^m p_i \int_{\Sigma_i^\epsilon} \varphi \cdot e_3^i. \quad (4.40)$$

Portanto reunindo (4.11) e (4.40) temos o seguinte sistema de equações, para toda  $\varphi \in V_\epsilon$

$$\mu \int_{\Omega_\epsilon} \nabla \mathbf{v}^\epsilon \nabla \varphi + \int_{\Omega_\epsilon} (\mathbf{v}^\epsilon \nabla) \mathbf{v}^\epsilon \varphi + \sum_{i=1}^m p_i \int_{\Sigma_i^\epsilon} \varphi \cdot e_3^i = 0, \quad (4.41)$$

$$\mu \int_{\Omega_\epsilon} \nabla W^\epsilon \nabla \varphi + \int_{\Omega_\epsilon} (W^\epsilon \nabla) W^\epsilon \varphi + \sum_{i=1}^m p_i \int_{\Sigma_i^\epsilon} \varphi \cdot e_3^i = \int_{\Omega_\epsilon} \left( (W^\epsilon \nabla) W^\epsilon - \mu \Delta W^\epsilon + \nabla \Pi^\epsilon \right) \varphi. \quad (4.42)$$

Subtraindo as duas igualdades anteriores, substituindo  $\varphi$  por  $\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon$ , e usando (4.39), encontramos que

$$\begin{aligned} & \mu \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla(\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon)|^2 + \int_{\Omega_\epsilon} [(\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon) \nabla] W^\epsilon (\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon) + \int_{\Omega_\epsilon} (\mathbf{v}^\epsilon \nabla) (\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon) (\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon) \\ &= - \int_{\Omega_\epsilon} (W^\epsilon \nabla) W^\epsilon (\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon) - \epsilon \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_i^\epsilon} \left( \mu \frac{\partial V}{\partial y_3^i} - Q e_3^i + \frac{p_i - q}{L_i} (-\ln \epsilon) e_3^i \right) (\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Usando o teorema de imersões de Sobolev, aplicando a desigualdade de Hölder e considerando o Lema 3.1 do último Capítulo, temos que a primeira parcela do lado direito da igualdade anterior fica majorada da seguinte forma

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\epsilon} (W^\epsilon \nabla) W^\epsilon (u^\epsilon - W^\epsilon) &\leq \|W^\epsilon\|_{4, \Omega_\epsilon} \|\nabla W^\epsilon\|_{2, \Omega_\epsilon} \|\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon\|_{4, \Omega_\epsilon} \\ &\leq c \epsilon^{1/2} \|\nabla W^\epsilon\|_{2, \Omega_\epsilon}^2 \|\nabla(\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon)\|_{2, \Omega_\epsilon}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Usando (4.24) e (4.25) temos que a segunda parcela da direita de (4.43) fica majorada por

$$c\epsilon^3 \|\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon\|_{2,\gamma_i^\epsilon}. \quad (4.45)$$

pois

$$\left| Q(\bar{y}^i, -\ln \epsilon) - (-\ln \epsilon) \frac{p_i - q}{L_i} \right| = O(\epsilon).$$

logo de (4.44) e (4.45) o lado direito de (4.43) fica majorado por

$$c\epsilon^{1/2} \|\nabla W^\epsilon\|_{2,\Omega_\epsilon}^2 \|\nabla(\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon)\|_{2,\Omega_\epsilon} + c\epsilon^3 \|\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon\|_{2,\gamma_i^\epsilon} \quad (4.46)$$

o qual também pode ser estimado por

$$c\epsilon^3 (-\epsilon \ln \epsilon)^{1/2} \|\nabla(\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon)\|_{2,\Omega_\epsilon} \quad (4.47)$$

pois pelo Lema 3.2

$$c\epsilon^3 \|\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon\|_{2,\gamma_i^\epsilon} \leq c\epsilon^3 (-\epsilon \ln \epsilon)^{1/2} \|\nabla(\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon)\|_{2,\Omega_\epsilon} \quad (4.48)$$

e por outro lado

$$\|\nabla W^\epsilon\|_{2,\Omega_\epsilon}^2 \leq c\epsilon^5 (-\ln \epsilon). \quad (4.49)$$

Esta última estimativa, aparece ao fazer mudança de variáveis. Deixamos a verificação ao leitor; para isto estime separadamente, vendo o que acontece em  $\Omega_0^\epsilon$  e nas saídas  $\Omega_\epsilon^i$ .

Notemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\epsilon} [(\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon) \nabla] W^\epsilon (\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon) &\leq c\epsilon^{1/2} \|\nabla W^\epsilon\|_{2,\Omega_\epsilon} \|\nabla(\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon)\|_{2,\Omega_\epsilon}^2 \\ &\leq c\epsilon^3 (-\ln \epsilon)^{1/2} \|\nabla(\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon)\|_{2,\Omega_\epsilon}^2. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Por outro lado, sendo  $\mathbf{v}^\epsilon$  um elemento de  $B_\epsilon$ , usando o Lema 3.1 encontramos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\epsilon} (\mathbf{v}^\epsilon \nabla)(\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon)(\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon) &\leq \|\nabla \mathbf{v}^\epsilon\|_{4,\Omega_\epsilon} \|\nabla(\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon)\|_{2,\Omega_\epsilon} \|\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon\|_{4,\Omega_\epsilon} \\ &\leq c\epsilon^{1/2} \|\nabla \mathbf{v}^\epsilon\|_{2,\Omega_\epsilon} \|\nabla(\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon)\|_{2,\Omega_\epsilon}^2 \\ &\leq c \|\nabla(\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon)\|_{2,\Omega_\epsilon}^2. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Observemos que a constante  $c$  de (4.51) é diferente de  $\mu$ .

Finalmente, combinando (4.43), (4.47), (4.50) e (4.51), temos que

$$\|\nabla(\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon)\|_{2,\Omega_\epsilon}^2 \leq c\epsilon^{7/2}(-\ln \epsilon)^{1/2}$$

e conseqüentemente,

$$|\Omega_\epsilon|^{-1/2}\|\nabla(\epsilon^{-2}\mathbf{v}^\epsilon - \mathcal{W}^\epsilon)\|_{2,\Omega_\epsilon} \leq c\sqrt{-\epsilon \ln \epsilon}.$$

o que verifica (4.32).

Como conseqüência do resultado anterior, temos uma estimativa melhor para o gradiente de  $\mathbf{v}^\epsilon$ , de fato

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathbf{v}^\epsilon\|_{2,\Omega_\epsilon} &\leq c\epsilon^2|\Omega_\epsilon|^{1/2}(-\epsilon \ln \epsilon)^{1/2} + \|\nabla W^\epsilon\|_{2,\Omega_\epsilon} \\ &\leq c_1\epsilon^3(-\epsilon \ln \epsilon)^{1/2} + c_2\epsilon^2(-\epsilon \ln \epsilon)^{1/2} \\ &\leq \max\{c_1, c_2\}\epsilon^2(-\epsilon \ln \epsilon)^{1/2} \\ &\leq c_3(-\epsilon \ln \epsilon)^{1/2}\epsilon^2 \\ &\leq c_3\epsilon^2. \end{aligned}$$

Para verificar (4.31) usamos o Lema 3.1 e (4.32); ou seja,

$$\begin{aligned} |\Omega_\epsilon|^{-1/2}\|\epsilon^{-2}\mathbf{v}^\epsilon - \mathcal{W}^\epsilon\|_{2,\Omega_\epsilon} &= \epsilon^{-2}|\Omega_\epsilon|^{-1/2}\|\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon\|_{2,\Omega_\epsilon} \\ &\leq \epsilon^{-2}|\Omega_\epsilon|^{-1/2}c\epsilon\|\nabla(\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon)\|_{2,\Omega_\epsilon} \\ &\leq c\epsilon(-\epsilon \ln \epsilon)^{1/2}. \end{aligned}$$

Para encontrar a estimativa sobre as pressões, i.e, (4.33), notemos primeiro que

$$p^\epsilon - \Pi^\epsilon + \frac{1}{|\Omega_\epsilon|} \int_{\Omega_\epsilon} \Pi^\epsilon \in L^2(\Omega_\epsilon)$$

e

$$\int_{\Omega_\epsilon} \left[ p^\epsilon - \Pi^\epsilon + \frac{1}{|\Omega_\epsilon|} \int_{\Omega_\epsilon} \Pi^\epsilon \right] = \int_{\Omega_\epsilon} p^\epsilon = 0 \quad \text{pois } p^\epsilon \in L_0^2(\Omega_\epsilon).$$



Logo pelo Teorema 1.19, o problema

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u}_\epsilon &= p^\epsilon - \Pi^\epsilon + \frac{1}{|\Omega_\epsilon|} \int_{\Omega_\epsilon} \Pi^\epsilon \text{ em } \Omega_\epsilon \\ \mathbf{u}_\epsilon &= 0 \text{ em } \partial\Omega_\epsilon\end{aligned}\quad (4.52)$$

tem solução e de acordo com o Lema 3.3,  $\mathbf{v}_\epsilon$  pode ser escolhida satisfazendo

$$\|\nabla \mathbf{u}_\epsilon\|_{2,\Omega_\epsilon} \leq \frac{c}{\epsilon} \left\| p^\epsilon - \Pi^\epsilon + \frac{1}{|\Omega_\epsilon|} \int_{\Omega_\epsilon} \Pi^\epsilon \right\|_{2,\Omega_\epsilon}. \quad (4.53)$$

Para  $\varphi = \mathbf{u}_\epsilon$ , solução do problema (4.52), temos também que

$$\mu \int_{\Omega_\epsilon} \nabla \mathbf{v}^\epsilon \nabla \varphi + \int_{\Omega_\epsilon} (\mathbf{v}^\epsilon \nabla) \mathbf{v}^\epsilon \varphi + \int_{\partial\Omega_\epsilon} \left[ p^\epsilon + \frac{1}{|\Omega_\epsilon|} \int_{\Omega_\epsilon} \Pi^\epsilon \right] \nabla \cdot \varphi = 0, \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned}\mu \int_{\Omega_\epsilon} \nabla W^\epsilon \nabla \varphi + \int_{\Omega_\epsilon} (W^\epsilon \nabla) W^\epsilon \varphi - \int_{\Omega_\epsilon} \Pi^\epsilon \nabla \cdot \varphi &= \int_{\Omega_\epsilon} (W^\epsilon \nabla) W^\epsilon \varphi + \\ &\epsilon \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_\epsilon^i} \left( Q e_3^i - \mu \frac{\partial V}{\partial y_3^i} - \frac{p_i - q}{L_i} (-\ln \epsilon) e_3^i \right) \int_{\gamma_\epsilon^i} \varphi.\end{aligned}\quad (4.55)$$

Portanto, usando o fato de que

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_\epsilon = p^\epsilon - \Pi^\epsilon + \frac{1}{|\Omega_\epsilon|} \int_{\Omega_\epsilon} \Pi^\epsilon \text{ em } \Omega_\epsilon,$$

subtraindo as equações (4.54) e (4.55), encontramos que

$$\begin{aligned}\mu \int_{\Omega_\epsilon} \nabla (\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon) \nabla \mathbf{u}_\epsilon + \int_{\Omega_\epsilon} \left[ (\mathbf{v}^\epsilon \nabla) \mathbf{v}^\epsilon - (W^\epsilon \nabla) W^\epsilon \right] \mathbf{u}_\epsilon - \int_{\Omega_\epsilon} \left[ p^\epsilon - \Pi^\epsilon + \frac{1}{|\Omega_\epsilon|} \int_{\Omega_\epsilon} \Pi^\epsilon \right]^2 = \\ - \int_{\Omega_\epsilon} (W^\epsilon \nabla) W^\epsilon \mathbf{u}_\epsilon - \epsilon \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_\epsilon^i} \left( Q e_3^i - \mu \frac{\partial V}{\partial y_3^i} - \frac{p_i - q}{L_i} (-\ln \epsilon) e_3^i \right) \mathbf{u}_\epsilon,\end{aligned}\quad (4.56)$$

logo,

$$\begin{aligned}\left\| p^\epsilon - \Pi^\epsilon + \frac{1}{|\Omega_\epsilon|} \int_{\Omega_\epsilon} \Pi^\epsilon \right\|_{2,\Omega_\epsilon}^2 &= \mu \int_{\Omega_\epsilon} \nabla (\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon) \nabla \mathbf{u}_\epsilon + \int_{\Omega_\epsilon} (\mathbf{v}^\epsilon \nabla) \mathbf{v}^\epsilon \mathbf{u}_\epsilon \\ &+ \epsilon \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_\epsilon^i} \left( Q e_3^i - \mu \frac{\partial V}{\partial y_3^i} - \frac{p_i - q}{L_i} (-\ln \epsilon) e_3^i \right) \mathbf{u}_\epsilon.\end{aligned}\quad (4.57)$$

Usando a desigualdade de Hölder, desigualdades de imersões e os resultados técnicos do Capítulo 3, podemos estimar (4.57) da seguinte forma

$$\begin{aligned} &\leq \mu \|\nabla(\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon)\|_{2,\Omega_\epsilon} \|\nabla \mathbf{u}_\epsilon\|_{2,\Omega_\epsilon} + \|\mathbf{v}^\epsilon\|_{4,\Omega_\epsilon} \|\nabla \mathbf{v}^\epsilon\|_{2,\Omega_\epsilon} \|\mathbf{u}_\epsilon\|_{4,\Omega_\epsilon} + c\epsilon^2 \|\mathbf{u}_\epsilon\|_{2,\gamma_i^\epsilon} \\ &\leq c \|\nabla \mathbf{u}_\epsilon\|_{2,\Omega_\epsilon} (\|\nabla(\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon)\|_{2,\Omega_\epsilon} + \epsilon^{1/2} \|\nabla \mathbf{v}^\epsilon\|_{2,\Omega_\epsilon}^2 + \epsilon^3 (-\epsilon \ln \epsilon)^{1/2}). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Por (4.32) sabemos que

$$\begin{aligned} \|\nabla(\mathbf{v}^\epsilon - W^\epsilon)\|_{2,\Omega_\epsilon} &= \epsilon^2 \|\nabla(\epsilon^{-2} \mathbf{v}^\epsilon - \mathcal{W}^\epsilon)\|_{2,\Omega_\epsilon} \leq \epsilon^2 |\Omega_\epsilon|^{1/2} c (-\epsilon \ln \epsilon)^{1/2} \\ &\leq \epsilon^3 c (-\epsilon \ln \epsilon)^{1/2} \end{aligned}$$

Além disso  $\epsilon^{1/2} \|\mathbf{v}^\epsilon\|_{2,\Omega_\epsilon}^2 \leq c\epsilon^{9/2} \leq c\epsilon^3 (-\epsilon \ln \epsilon)^{1/2}$ . Isto junto à estimativa de  $\|\nabla \mathbf{u}_\epsilon\|_{2,\Omega_\epsilon}$ , nos leva a dizer que (4.58) fica majorado por

$$c\epsilon^2 (-\epsilon \ln \epsilon)^{1/2} \left\| p^\epsilon - \Pi^\epsilon + \frac{1}{|\Omega_\epsilon|} \int_{\Omega_\epsilon} \Pi^\epsilon \right\|_{2,\Omega_\epsilon}$$

e conseqüentemente,

$$\left\| p^\epsilon - \Pi^\epsilon + \frac{1}{|\Omega_\epsilon|} \int_{\Omega_\epsilon} \Pi^\epsilon \right\|_{2,\Omega_\epsilon} \leq c\epsilon^2 (-\epsilon \ln \epsilon)^{1/2}$$

o que implica que

$$\begin{aligned} |\Omega_\epsilon|^{-1/2} \|p^\epsilon - \Pi^\epsilon\| &\leq |\Omega_\epsilon|^{-1/2} c\epsilon^2 (-\epsilon \ln \epsilon)^{1/2} + |\Omega_\epsilon|^{-1/2} \left\| \frac{1}{|\Omega_\epsilon|} \int_{\Omega_\epsilon} \Pi^\epsilon \right\|_{2,\Omega_\epsilon} \\ &\leq c\epsilon (-\epsilon \ln \epsilon)^{1/2} + |\Omega_\epsilon|^{-1/2} \left\| \frac{1}{|\Omega_\epsilon|} \int_{\Omega_\epsilon} \Pi^\epsilon \right\|_{2,\Omega_\epsilon}, \end{aligned}$$

e assim obtemos (4.33). □

Se tomamos somente a solução de Poiseuille, sem a solução Leray nem a função suavizante  $\eta_i^\epsilon$ , também temos convergência mas o erro da estimativa é maior. Para conferir este fato, vejamos o seguinte corolário.

**Corolário 4.7** *Seja*

$$P_i^\epsilon = \frac{1}{L_i} (p_i - q) x_3^i + q$$

$$U_i^\epsilon = \epsilon^2 \mathcal{U}_i^\epsilon(x) = \epsilon^2 \frac{w^i(\bar{x}^i/\epsilon)}{L_i} (q - p_i) e_3^i$$

a solução de Poiseuille em cada  $\Omega_\epsilon^i$ . Então,

$$|\Omega_\epsilon|^{-1/2} \|\epsilon^{-2} \mathbf{v}^\epsilon - \mathcal{U}^\epsilon\|_{2, \Omega_\epsilon^i} \leq c \sqrt{-\epsilon \ln \epsilon} \quad (4.59)$$

$$|\Omega_\epsilon|^{-1/2} \|p^\epsilon - P_i^\epsilon\|_{2, \Omega_\epsilon^i/\mathbb{R}} \leq c \sqrt{-\epsilon \ln \epsilon}. \quad (4.60)$$

**Demonstração.** Em primeiro lugar,

$$|\Omega_\epsilon|^{-1/2} \|\epsilon^{-2} \mathbf{v}^\epsilon - \mathcal{U}^\epsilon\|_{2, \Omega_\epsilon^i} = |\Omega_\epsilon|^{-1/2} \epsilon^{-2} \|\mathbf{v}^\epsilon - U_i^\epsilon\|_{2, \Omega_\epsilon^i}. \quad (4.61)$$

Notemos que em  $\omega_\epsilon^i \cap \Omega_\epsilon^i$ , por causa do Teorema anterior, (4.61) é majorado por  $c\epsilon(-\epsilon \ln \epsilon)^{1/2}$ . Falta olhar o que acontece em  $G_\epsilon^i$ .

$$\|\mathbf{v}^\epsilon - U_i^\epsilon\|_{2, G_\epsilon^i}^2 \leq c \int_{G_\epsilon^i} |\mathbf{v}^\epsilon - V^\epsilon|^2 + c \int_{G_\epsilon^i} |V^\epsilon - U_i^\epsilon|^2$$

Agora,

$$c \int_{G_\epsilon^i} |V^\epsilon(x) - U_i^\epsilon(x)|^2 dx = c \int_0^{-\epsilon \ln \epsilon} \int_{\epsilon S^i} \left| \epsilon^2 V(x/\epsilon) - \frac{\epsilon^2 (q - p_i)}{L_i} w^i(\bar{x}^i/\epsilon) \right|^2 d\bar{x}^i dx_3 \leq c(I_1 + I_2),$$

onde

$$I_1 = c \int_0^{-\epsilon \ln \epsilon} \int_{\epsilon S^i} |\epsilon^2 V(x/\epsilon)|^2 d\bar{x}^i dx_3 = c\epsilon^7 \int_0^{-\epsilon \ln \epsilon} \int_{S^i} |V(y)|^2 dy \leq -c\epsilon^7 \ln \epsilon,$$

$$\begin{aligned} I_2 &= c \int_0^{-\epsilon \ln \epsilon} \int_{\epsilon S^i} \left| \frac{\epsilon^2 (q - p_i)}{L_i} w^i(\bar{x}^i/\epsilon) \right|^2 d\bar{x}^i dx_3 = c\epsilon^6 \int_0^{-\epsilon \ln \epsilon} \int_{S^i} \left| \frac{(q - p_i)}{L_i} w^i(\bar{y}^i) \right|^2 d\bar{y}^i dx_3 \\ &\leq -c\epsilon^7 \ln \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto,

$$c \int_{G_\epsilon^i} |V^\epsilon - U_i^\epsilon|^2 \leq -c\epsilon^7 \ln \epsilon.$$

Notemos também que a integral

$$c \int_{G_\epsilon^i} |\mathbf{v}^\epsilon - V_i^\epsilon|^2,$$

por causa do Teorema anterior, pode ser estimada por

$$c\epsilon(-\epsilon \ln \epsilon)^{1/2},$$

logo

$$\begin{aligned} |\Omega_\epsilon|^{-1/2} \|\epsilon^{-2}\mathbf{v}^\epsilon - \mathcal{U}^\epsilon\|_{2,\Omega_i} &= |\Omega_\epsilon|^{-1/2} \|\epsilon^{-2}\mathbf{v}^\epsilon - \mathcal{U}^\epsilon\|_{2,\omega_i^\epsilon} + |\Omega_\epsilon|^{-1/2} \|\epsilon^{-2}\mathbf{v}^\epsilon - \mathcal{U}^\epsilon\|_{2,G_i^\epsilon} \\ &\leq c\epsilon(-\epsilon \ln \epsilon)^{1/2} + |\Omega_\epsilon|^{-1/2} \epsilon^{-2} (I_1 + I_2)^{1/2} \\ &\leq c\epsilon(-\epsilon \ln \epsilon)^{1/2} + c(-\epsilon \ln \epsilon)^{1/2} \\ &\leq -c(\epsilon \ln \epsilon)^{1/2}. \end{aligned}$$

Para mostrar a estimativa (4.60) realizamos uma análise semelhante. □

# Bibliografia

- [Br] BREZIS, H., *Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones*, Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1984.
- [BCMP] CONCA, C. ; MURAT, F. ; PIRONEAU, O., *The Stokes and Navier-Stokes equations with boundary conditions involving the pressure*, Japan J. Math., 20(1994)
- [CaZi] CALDERON, A. ; ZYGMUND, A., *On Singular Integrals*, American Journal Mathematical., 78, 289-309 [II.9] 1956.
- [ChMa] CHORIN, A. ; MARSDEN, J., *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, third Edition , Springer-Verlag, Inc., New York 1993.
- [DuSc] DUNFORD, N. ; SCHWARTZ, J., *Linear Operators, Part 1; General theory* , Interscience Publishers, Inc., New York 1957.
- [Ev] EVANS, L., *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society. USA, 1998.
- [FoMc] FOX, R. ; McDONALD, A. *Introdução à Mecânica dos Fluidos. Cuarta Ed.*, John Wiley and Sons, Inc., 1992.
- [Ga] GALDI, G., *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations, Vol. I. Linearized Steady problems*, Springer Tracts in Natural Philosophy, 38. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [GaG] GALDI, G., *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations, Vol. II. Linearized Steady problems*, Springer Tracts in Natural Philosophy, 38. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [La] LADYZHENKAYA, A., *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible flow*, Gordon and Breach, 1969.

- [LaLi] LANDAU, L. ; LIFSHITZ, E., *Fluid Mechanics*, Institute of Physical Problems, U.S.R. Academy of Sciences, Pergamon Press Ltd., 1963.
- [Lu] LUKASZEWICZ, G., *Micropolar Fluids. Theory and Applications*, Birkhauser. Boston, 1999.
- [MP] MARUSIC, E. ; PALOKA, S., *Juntion of thin pipes filled with viscous fluid*, Preprint.
- [MaPa] MARUSIC, E. ; PALOKA, S., *Two-scale convergence for thin domains and its applications to some lower-dimensional models in fluid mechanics* , Asymptotic Analysis. IOS Press **23** (2000), no. 1, 23-57.
- [MaP] MARUSIC, e. ; PALOKA, S., *The effects of flexion and torsion for the fluid flow through a curved pipe* , Appl. Math. Optim., **44** (2001), 245-272.
- [ZiKo] ZIEREN, M. ; KOHLER, J., *A micro-fluid channel calorimeter using BiSb/Sb thin film thermopiles*, Transducer'97, International Conference on Solid-State Sensors and Actuators, Chicago,(1997) v.1 539-542.