Departamento de Matemática/IMECC/UNICAMP
Curso MA720/MM720–Análise no $\mathbb{R}^n$, 1s2016 Prof. Marcelo Santos

Forma Local das Submersões (FLS), Forma Local das Imersões (FLI) e o Teorema do Posto (TP) 06/5/2016

Referências:

[Munkres] J. R. Munkres, *Analysis on Manifolds* (1991);

[Elon] E. L. Lima, *Curso de Análise*, v.2 (1981).

Lembremos os teoremas da aplicação inversa (TAInv) e da aplicação implícita (TAImpl).

Teorema 1 (TAInv, cf. Munkres, T. 8.3)**.** *Sejam A um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}^n$ de classe C^r ($r \geq 1$). Se $Df(a)$ é invertível ($a \in IntA$) então existe uma vizinhança U do ponto a tal que $V = f(U)$ é um aberto e $f|U : U \to V$ é um difeomorfismo de classe C^r.*

Teorema 2 (TAImpl, cf. Munkres, T. 9.2)**.** *Sejam A um conjunto aberto em $\mathbb{R}^{k+n}$ e $f : A \to \mathbb{R}^n$ de classe C^r ($r \geq 1$). Escrevendo f na forma $f(x, y)$, para $x \in \mathbb{R}^k$ e $y \in \mathbb{R}^n$, suponhamos que $\partial f/\partial y$ seja invertível em um ponto $(a, b) \in A$, $a \in \mathbb{R}^k, b \in \mathbb{R}^n$, tal que $f(a, b) = 0$. Então existe uma vizinhança B de a em $\mathbb{R}^k$ e uma única função contínua $g : B \to \mathbb{R}^n$ com o gráfico contido em A tal que $g(a) = b$ e $f(x, g(x)) = 0$ para todo $x \in B$. Além disso, g é de classe C^r (em B).*

Lembremos também a demonstração deste teorema/como ele é obtido do TAInv (combinando notações do [Elon] e do [Munkres]): Tomando a aplicação $\Phi : A \to \mathbb{R}^{k+n}$ dada por $\Phi(x, y) = (x, f(x, y))$, temos que a sua matriz jacobiana é

$$\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ \partial f/\partial x & \partial f/\partial y \end{bmatrix}$$

logo $D\Phi$ é invertível no ponto (a, b) $(\det D\Phi = \det(\partial f/\partial y))$. Então, pelo TAInv, existem abertos $B \times W \ni \Phi(a, b) = (a, 0)$ tal que $h := \Phi^{-1} : B \times W \to Z = h(B \times W)$ é um difeomorfismo de classe C^r. Pondo $h = (h_1, h_2)$, $h_1 : B \times W \to \mathbb{R}^k$, $h_2 : B \times W \to \mathbb{R}^n$, da definição de Φ e usando que h é a inversa de Φ vem que $(x, w) = \Phi \circ h(x, w) = (h_1(x, w), f(h(x, w))$, para todo $(x, w) \in B \times W$, logo, $h_1(x, w) = x$ (h_1 é a restrição a $B \times W$ da projeção $\pi_1 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\pi_1(x, w) = x$) e $\mathbf{f(h(x,w)) = w}$ ($f \circ h$ é a restrição a

$B \times W$ da projeção $\pi_2 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\pi_2(x, w) = w$). Tomando $w = 0$, obtemos o resultado desejado, com a função $g(x) = h_2(x, 0)$.

Quanto à unicidade, tomando B conexo, seja $g_0 : B \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua nas mesmas condições da g, i.e. com o gráfico contido em A, $g_0(a) = b$ e $f(x, g_0(x)) = 0$ para todo $x \in B$. Queremos mostrar que $g_0 = g$ (em B), ou seja, que o o conjunto $C := \{x \in B; g_0(x) = g(x)\}$ é de fato o conjunto B. Sendo B conexo, $C \neq \emptyset$ (note que $a \in B$) e fechado em B (pois $g_0 - g$ é contínua e $C = (g_0 - g)^{-1}(0)$), é suficiente mostrarmos que C também é aberto. Dado $c \in C$, temos que $g_0(c) = g(c) = h_2(c, 0)$, logo, o ponto $(c, g_0(c)) = (h_1(c, 0), h_2(c, 0)) = h(c, 0)$ pertence a Z, um aberto do $\mathbb{R}^{k+n} \equiv \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$. Daí, pela continuidade da função $x \in B \mapsto (x, g_0(x) \in \mathbb{R}^{k+n}$, existe um aberto B_0 em $\mathbb{R}^k$ contido em B e contendo o ponto c tal que $(x, g_0(x)) \in Z$ para todo $x \in B_0$. Daí e da condição $f(x, g_0(x)) = 0$ para todo $x \in B$ obtemos que $\Phi(x, g_0(x)) = (x, f(x, g_0(x)) = (x, 0)$ para todo $x \in B_0$. Mas esta equação também é sastisfeita pela função g, então g_0 coincide com g em B_0 (já que Φ é injetiva), donde segue-se que B_0 está contido em C, concluindo que C também é aberto.

Observamos que na demonstração acima obtemos mais do que a tese do teorema (TAImpl): a condição (hipótese) $\partial f/\partial y$ invertível no ponto (a, b) sobre a função f de classe C^r ($r \geq 1$) implica a existência do difeormorfismo (mudança de variável) h de classe C^r entre uma vizinhança $B \times W$ de $(a, f(a, b))$ e uma vizinhança Z de (a, b) tal $f \circ h$ é a restrição a $B \times W$ da projeção $\pi_2 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\pi_2(x, w) = w$. Este é essencialmente o conteúdo da Forma Local das Submersões (FLS), teorema que enunciamos abaixo. Antes de enunciarmos o mesmo, chamamos a atenção para o fato de que a condição (hipótese) $\partial f/\partial y$ invertível no ponto (a, b) implica que a matriz $Df(a, b)$, equivalentemente a transformação linear derivada $f'(a, b) : \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}^n$, tem posto n (número de colunas, ou linhas, linearmente independentes da matriz $Df(a, b)$, ou, equivalentemente, a dimensão da imagem da transformação linear $f'(a, b)$) ou seja, que $f'(a, b) : \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear sobrejetiva. Com relação a este aspecto é bom lembrarmos o seguinte teorema de Álgebra Linear: *Seja T uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensões finitas E e F. Então, para bases α e β quaisquer, de E e F, respectivamente, temos que $\dim Im(T) =$ posto de $[T]_\beta^\alpha :=$ número de colunas de $[T]_\beta^\alpha$ linearmente independentes $=$ número de linhas de $[T]_\beta^\alpha$ linearmente independentes.*

Teorema 3 (Forma Local das Submersões (FLS), cf. Elon)**.** *Sejam A um conjunto aberto em $\mathbb{R}^{k+n}$ e $f : A \to \mathbb{R}^n$ de classe C^r $(r \geq 1)$. Se a transformação linear derivada $f'(z_0) : \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}^n$ é sobrejetiva em um ponto z_0 $(z_0 \in A)$ então, escrevendo o $\mathbb{R}^{k+n}$ como uma soma direta $\mathbb{R}^{k+n} = \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ tal que $\partial_2 f(z_0) := f'(z_0)|\mathbb{R}^n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ seja um isomorfismo e ponto $z_0 = (a, b)$, temos que existem vizinhanças B de a em $\mathbb{R}^k$, W de $f(z_0)$ em $\mathbb{R}^n$ e Z de z_0 em $\mathbb{R}^{k+n}$, e um difeomorfismo (mudança de variável) $h : B \times W \to Z$ de classe C^r tal que $(f \circ h)(x, w) = w$ para todo $(x, w) \in B \times W$.*

Demonstração. Tendo em vista o exposto acima sobre a demonstração do TAImpl, a demonstração deste teorema consiste agora basicamente em explicarmos o enunciado. Com efeito, a decomposição $\mathbb{R}^{k+n} = \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ significa que $\mathbb{R}^k$ é o espaço gerado por um subconjunto de vetores $\{\mathcal{C}_k = \{e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}\}$ da base canônica $\mathcal{C} = \{e_1, \cdots, e_{k+n}\}$ do $\mathbb{R}^{k+n}$ e $\mathbb{R}^n$ é o espaço gerado pelos vetores restantes, $\mathcal{C} - \mathcal{C}_k$, digamos $\mathcal{C}_n = \{e_{j_1}, \cdots, e_{j_n}\}$. Escrevendo um ponto qualquer $z \in \mathbb{R}^{k+n}$ como $z = x + y \equiv (x, y)$, com $x \in \mathbb{R}^k$ e $y \in \mathbb{R}^n$ $\ (x = (x_1, \cdots, x_k)$ quer dizer $x = \sum_{l=1}^{k} x_l e_{i_l}$; analogamente, $y = (y_1, \cdots, y_n)$ quer dizer $y = \sum_{l=1}^{n} y_l e_{j_l})$, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial e_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial e_{i_k}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial e_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial e_{i_k}} \end{bmatrix} = [f'|\mathbb{R}^k]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}_k}$$

e, analogamente,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = [f'|\mathbb{R}^n]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}_n},$$

sendo $\mathcal{B}$ a base canônica do $\mathbb{R}^n$. Assim, a hipótese $\partial_2 f(z_0) := f'(z_0)|\mathbb{R}^n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ser um isomorfismo, quer dizer $(\frac{\partial f}{\partial y})(z_0)$ invertível. Então a demonstração do TAImpl dada acima nos dá o resultado desejado. $\square$

Sobre o título do teorema, temos a definição: uma aplicação diferenciável $f : A \to \mathbb{R}^n$, definida num aberto A do $\mathbb{R}^n$, chama-se uma *submersão* quando a sua derivada $f'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é sobrejetiva, para todo $x \in A$. Então o teorema (FLS) nos diz que localmente "toda submersão de classe C^r $(r \geq 1)$ é, a menos de composição com um difeormorfismo (mudança de variável) de classe C^r, uma projeção sobre o $\mathbb{R}^n$".

Como uma aplicação desse teorema, podemos mostrar que toda submersão de classe C^1 é aberta. Exercício.

Imersões. Uma aplicação diferenciável $f : A \to \mathbb{R}^n$, definida num aberto A do $\mathbb{R}^k$, chama-se uma *imersão* quando a sua derivada $f'(x) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ é injetiva, para todo $x \in A$.

Teorema 4 (Forma Local das Imersões (FLI), cf. Elon)**.** *Sejam A um conjunto aberto em $\mathbb{R}^k$ e $f : A \to \mathbb{R}^{k+n}$ de classe C^r $(r \geq 1)$. Se a transformação linear derivada $f'(a) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k+n}$ é injetiva em um ponto a $(a \in A)$ (equivalentemente, se a matriz jacobiana $Jf(a)$ tem posto k), então existem vizinhanças B de a em $\mathbb{R}^k$, W de 0 em $\mathbb{R}^n$ e Z de $f(a)$ em $\mathbb{R}^{k+n}$, e um difeomorfismo (mudança de variável) $h : Z \to B \times W$ de classe C^r tal que $(h \circ f)(x) = (x, 0)$ para todo $x \in B$.*

Demonstração. Sejam $E = f'(a)(\mathbb{R}^k)$ e F um subespaço de $\mathbb{R}^{k+n}$ tal que $\mathbb{R}^{k+n} = E \oplus F$. Dada uma base $\{v_1, \cdots, v_n\}$ de F, seja $\Phi : A \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{k+n}$ a aplicação dada por

$$\Phi(x, y) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} y_i v_i, \qquad y = (y_1, \cdots, y_n)$$

Podemos calcular facilmente a sua derivada desenvolvendo a variação em torno de um ponto: dados $(x, y) \in A$ e $(h, w) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ tais que $(x + h, y + w) \in A$, temos que

$$\begin{aligned} \Phi(x+h, y+w) &= f(x+h) + \textstyle\sum_{i=1}^{n}(y_i + w_i)v_i \\ &= f(x) + \textstyle\sum_{i=1} y_i v_i + f'(x)h + \sum_{i=1}^{n} w_i v_i + r(h); \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \lim_{h\to 0} |r(h)|/|h| = 0 \\ &= \Phi(x, y) + f'(x)h + \textstyle\sum_{i=1}^{n} w_i v_i + r(h) \end{aligned}$$

logo $\Phi'(x, y) \cdot (h, w) = f'(x)h + \sum_{i=1}^{n} w_i v_i$. Daí vê-se que a hipótese $f'(a)$ injetiva implica que $\Phi'(a, 0) : \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}^{k+n}$ também é injetiva, logo, um isomorfismo (já que as dimensões do domínio e contradomínio são iguais). Com efeito, $\Phi'(a, 0) \cdot (h, w) = 0 \Leftrightarrow f'(a)h + \sum_{i=1}^{n} w_i v_i = 0 \Leftrightarrow f'(a)h = -\sum_{i=1}^{n} w_i v_i \Leftrightarrow f'(a)h = 0$ e $-\sum_{i=1}^{n} w_i v_i = 0$ (já que $E \cap F = 0$) $\Leftrightarrow h = 0$ e $w = 0$ (pois $f'(a)$ é injetiva e $v_1, \cdots, v_n$ são linearmente independentes). Então, pelo TAInv, existem abertos $B \ni a$ em $\mathbb{R}^k$, $W \ni 0$ em $\mathbb{R}^n$ tais que $\Phi|B \times W : B \times W \to Z = \Phi(B \times W) \ni f(a)$ é um difeomorfismo de classe C^r. (Notemos que $\Phi(a, 0) = f(a)$.) Além disso, $\Phi(x, 0) = f(x)$ para todo $x \in B$. Então, pondo $h = \Phi^{-1} : Z \to B \times W$, segue-se que $h \circ f(x) = (x, 0)$ para todo $x \in B$. $\square$

Uma consequência (aplicação) imediata do teorema FLI é o seguinte corolário que é, como veremos no Curso, extremamente importante no estudo de variedades **em** $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$.

Corolário 5. *Seja A um aberto do $\mathbb{R}^k$. Se $f : A \to \mathbb{R}^n$ é uma imersão de classe C^r ($r \geq 1$) tal que $f : A \to V = f(A)$ é um homeomorfismo (injetiva com $f^{-1} : V \to A$ contínua) então podemos dizer que $f^{-1} : V \to A$ também é de classe C^r, no sentido de que para todo $z = f(x) \in V$ ($x \in A$) existe uma vizinhança $Z \ni z$ em $\mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}|(V \cap Z)$ é a restrição de uma aplicação g de classe C^r em Z.*

Demonstração. Como f é uma imersão, segue-se que $n \geq k$. Se $n = k$, o resultado é claramente uma consequência do TAInv. Caso contrário, $n > k$, pelo FLI, para cada $x \in A$ existem abertos $B \times W \ni (x, 0)$ em $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ e $Z \ni f(x)$ em $\mathbb{R}^n$, e um difeomorfismo $h : Z \to B \times W$ tal que $h \circ f(x) = (x, 0)$ para todo $x \in B$. A aplicação $g = \pi \circ h$ nos dá o resultado desejado, onde π é a projeção $(x, w) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \mapsto x \in \mathbb{R}^k$. $\square$

O posto de uma aplicação. Seja A um aberto do $\mathbb{R}^m$. O *posto* de uma aplicação diferenciável $f : A \to \mathbb{R}^n$ em um ponto $x \in A$ é o posto da derivada $f'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, i.e. a dimensão do subespaço $f'(x)(\mathbb{R}^m)$ do $\mathbb{R}^n$. Se p denota o posto de f em x então $p \leq \min\{m, n\}$. (Notemos que $p \leq m$ pelo teorema do núcleo e da imagem: a dimensão do domínio, no caso aqui, m, é igual a dimensão do núcleo mais a dimensão da imagem, p.) Se f é uma imersão então tem posto constante máximo igual a m. Se f é uma submersão então também tem posto constante máximo, igual a n. Imersões e submersões são chamadas de aplicações de posto máximo.

Teorema 6 (O Teorema do Posto (TP))**.** *Sejam A um aberto do $\mathbb{R}^{p+k} \equiv \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k$ e $f : A \to \mathbb{R}^{p+n} \equiv \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^r ($r \geq 1$). Se f tem posto constante p em A então para todo ponto $a \in A$ existem difeomorfismos de classe C^r, α, de um aberto $B \times W$ em $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k$ sobre uma vizinhança de a, e β, de uma vizinhança de $f(a)$ sobre um aberto em $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$, tais que $(\beta \circ f \circ \alpha)(x, y) = (x, 0)$ para todo $(x, y) \in B \times W$.*

Antes da demonstração é conveniente destacarmos o seguinte lema.

Lema 7. *Seja E um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^{p+n}$ de dimensão p. Então existe uma decomposição em soma direta $\mathbb{R}^{p+n} = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^n$ tal que a primeira projeção $\pi : \mathbb{R}^{p+n} \to \mathbb{R}^p$, $\pi(x, y) = x$, aplica E isomorficamente sobre $\mathbb{R}^p$*

Demonstração. O enunciado diz que podemos escolher p vetores da base canônica $\mathcal{C} = \{e_1, \cdots, e_{p+n}\}$ do $\mathbb{R}^{p+n}$ tal que, sendo $\mathbb{R}^p$ o espaço gerado por estes vetores, temos que $\pi|E : E \to \mathbb{R}^p$ é um isomorfismo. Se $E = \mathbb{R}^{p+n}$, não há o que demonstrar (neste caso, $\mathbb{R}^n = 0$ e π é a aplicação identidade). Suponhamos então $E \neq \mathbb{R}^{p+n}$. Afirmamos que existem n vetores $e_{j_1}, \cdots, e_{j_n}$ não pertencentes a E tais que o espaço $\mathbb{R}^n$ gerado pelos mesmos intercepta E apenas no 0. Neste caso, teremos $\mathbb{R}^{p+n} = E \oplus \mathbb{R}^n$ e o espaço $\mathbb{R}^p$ gerado pelos demais vetores da base canônica satisfaz o resultado desejado. Com efeito, sendo assim, a projeção $\pi : \mathbb{R}^{p+n} \to \mathbb{R}^p$ restrita a E é sobrejetiva (logo, um isomorfismo, já que $\dim E = \dim \mathbb{R}^p$), pois se $x \in \mathbb{R}^p$, então podemos escrever $x = x_1 + y$, com $x_1 \in E$ e $y \in \mathbb{R}^n$, e daí, $x = \pi(x) = \pi(x_1)$. Resta então apenas demonstração a afirmação que fizemos. Denotemos por $< S >$ o espaço gerado por um conjunto de vetores S. Como $E \neq \mathbb{R}^{p+n}$, existe um vetor $e_{j_1} \notin E$. Seja $E_1 =< E \cup \{e_{j_1}\} >$. Se $E_1 = \mathbb{R}^{p+n}$, a afirmação está demonstrada. Caso contrário, existe um vetor $e_{j_2} \notin E_1$ (se não, teríamos $\mathcal{C} \subset E_1$, donde $E_1 = \mathbb{R}^{p+n}$). Notemos que $E\cap < e_{j_1}, e_{j_2} >= 0$, pois x nesta interseção implica em $x = se_{j_1} + te_{j_2} \in E$, logo $t = 0$, pois caso contrário teríamos $e_{j_2} \in E_1$, e, sendo $t = 0$, temos também $s = 0$, pois caso contrário teríamos $e_{j_1} \in E$. Seja $E_2 =< E \cup \{e_{j_1}, e_{j_2}\} >$. Se $E_2 = \mathbb{R}^{p+n}$, a afirmação está demonstrada. Caso contrário, repetimos o argumento, e assim sucessivamente. □

Demonstração do Teorema do Posto. Sejam $E = f'(a)(\mathbb{R}^{p+k})$ e $\mathbb{R}^{p+n} = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^n$ a decomposição em soma direta dada no Lema acima. Como, por hipótese, o posto de f (em qualquer ponto) é p, temos que a dimensão de E é p, e, como $\pi|E : E \to \mathbb{R}^p$ é um isomorfismo, segue-se que o posto de $\pi \circ f : A \to \mathbb{R}^p$ em a também é p, visto que $(\pi \circ f)' = (\pi' \circ f) \circ f' = \pi \circ f'$ (onde usamos a Regra da Cadeia e que $\pi' = \pi$, uma vez que π é uma transformação linear). Então $(\pi \circ f)'(a) : \mathbb{R}^{p+k} \to \mathbb{R}^p$ é sobrejetiva, logo, pelo FLS, existe o difeomorfismo α, de um aberto $B \times W$ em $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k$ sobre uma vizinhança de a, tal que $(\pi \circ f \circ \alpha)(x, y) = x$ para todo $(x, y) \in B \times W$. Em particular, pondo $((f \circ \alpha)|(B \times W)) = (f_1, f_2)$, sendo $f_1 : B \times W \to \mathbb{R}^p$ e $f_2 : B \times W \to \mathbb{R}^n$ ("funções coordenadas" de $(f \circ \alpha)|B \times W : B \times W \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$), temos que f_1 é da forma $f_1(x, y) = x$. Quanto a f_2, vejamos que a mesma é independente de y (logo $f \circ \alpha$ também é independente de y), uma consequência da hipótese de f ter posto constante p. Com efeito, calculando a matriz jacobiana de

$f \circ \alpha$, obtemos

$$D(f \circ \alpha) = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ \partial f_2/\partial x & \partial f_2/\partial y \end{bmatrix}.$$

Então, para que $D(f \circ \alpha)$ tenha posto p é necessário que $\partial f_2/\partial y$ seja nula, pois as p primeiras colunas de $D(f \circ \alpha)$ já são linearmente independentes. (Se uma coluna do bloco $\begin{matrix} 0 \\ \partial f_2/\partial y \end{matrix}$ fosse não nula então teríamos $p+1$ colunas linearmente independentes.) Além disso, como $D(f \circ \alpha) = Df \cdot D\alpha$ (pela Regra da Cadeia) e $D\alpha$ é invertível (em todo ponto de $B \times W$), pois é um difeomorfismo, segue-se $D(f \circ \alpha)(x,y)$ tem posto p se, e somente se, $Df(\alpha(x,y))$ tem posto p. Portanto, devemos ter $\partial f_2/\partial y = 0$, o que implica que f_2 independe de y, tomando $B \times W$ conexo. Sendo assim, concluímos que $(f \circ \alpha)$ é da forma $(f \circ \alpha)(x,y) = (x, f_2(x)) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ para todo $(x,y) \in B \times W \subset \mathbb{R}^{p+k} \equiv \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k$. Daí, escrevendo $\alpha^{-1}(a) = (a_1, a_2) \in B \times W$, temos que a aplicação $x \in B \subset \mathbb{R}^p \mapsto (f \circ \alpha)(x, a_2) = (x, f_2(x)) \in \mathbb{R}^{p+n} \equiv \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ é uma imersão, logo, pelo FLI, reduzindo B, obtemos um difeomorfismos β de classe C^r, de uma vizinhança de $(f \circ \alpha)(a_1, a_2) = f(a)$ sobre um aberto em $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$, tais que $(\beta \circ f \circ \alpha)(x, a_2) = (x, 0)$ para todo $(x,y) \in B \times W$. Finalmente, observando que $f \circ \alpha$ não depende de y, concluímos o resultado. □

Observação 8. *Podemos dizer que o TP vale também nos casos "k=0" e "n=0", i.e. com $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{p+n}$ ou $f : A \subset \mathbb{R}^{p+k} \to \mathbb{R}^p$, tendo posto constante p. Com efeito, no primeiro caso o resultado segue-se do FLI, tomando o difeormorfismo α como sendo a identidade, e no segundo, do FLS, tomando o difeormorfismo β como sendo a identidade.*

Uma aplicação imediata do TP é o seguinte corolário.

Corolário 9. *Seja $f : A \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, com posto constante no aberto $A \subset \mathbb{R}^m$. Então f é localmente injetiva se, e somente se, é uma imersão, e, é localmente sobrejetiva se, e somente se, é uma submersão.*

Demonstração. Seja p o posto de f (constante em A). Temos que, $p \leq \min\{m, n\}$, a aplicação f ser imersão quer dizer $p = m$, e, submersão quer dizer $p = n$. Se $p < m$ (i.e. se f não é uma imersão) então, pelo TP, f não é localmente injetiva[1], logo, se f é localmente injetiva, então, $p = m$, donde, f é uma imersão. Reciprocamente, se f é uma imersão, então $m \leq$

[1] A "projeção" $(x,y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{m-p} \mapsto (x, 0) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ não é injetiva.

n, e, pelo FLI (ou pelo TAInv, no caso $m = n$), f é localmente injetiva (localmente, a menos de composição com um difeomorfismo (mudança de variável) no contradomímio, f é uma inclusão, ou a aplicação identidade, no caso $m = n$). Analogamente, se $p < n$ (i.e. se f não é uma submersão) então, também pelo TP, f não é localmente sobrejetiva[2], logo, se f é localmente sobrejetiva, então, $p = n$, donde, f é uma submersão. Reciprocamente, se f é uma submersão, então $m \geq n$, e, pelo FLS (ou pelo TAInv, no caso $m = n$), f é localmente sobrejetiva (localmente, a menos de composição com um difeomorfismo (mudança de variável) no domímio, f é uma projeção, ou a aplicação identidade, no caso $m = n$). □

A ideia que esse corolário expressa é que se uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tem posto constante num aberto $A \subset X$ (A aberto em $\mathbb{R}^m$) e não é uma imersão em A (posto de f constante em A mas estritamente menor do m) então há espaço para se fazer, localmente, uma "projeção" $(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k \mapsto (x, 0) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, sendo p o posto constante de f em A e $k = m-p$. Em particular, f não é injetiva em A. Mais precisamente, usando a notação do TP, para cada $x \in B$, a aplicação f leva (transforma) todo o conjunto $\{\alpha(x, y); (x, y) \in B \times W\}$ no ponto $\beta^{-1}(x, 0)$ (0 aqui pertencente a $\mathbb{R}^{n-p}$, entendendo que $\mathbb{R}^{n-p} = 0$ e $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} \equiv \mathbb{R}^p$, se $p = n$.) Analogamente, se $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tem posto constante num aberto $A \subset X$ (A aberto em $\mathbb{R}^m$) e não é uma submersão em A (posto de f constante em A mas estritamente menor do n) então há espaço para se fazer, localmente, uma "inclusão" $x \in \mathbb{R}^p \mapsto (x, 0) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, sendo p o posto constante de f em A. Em particular, $f|A$ não é sobrejetiva. (A imagem de $f|A$ não contém nenhum ponto fora do subespaço $\mathbb{R}^p \times 0$ do $\mathbb{R}^n$.)

Uma aplicação de classe C^1 sempre admite subconjuntos abertos em que o posto é constante. Mais precisamente, temos o seguinte teorema, que não demonstraremos (apesar de sua demonstração ser relativamente curta).

Teorema 10. *Sejam A um aberto do $\mathbb{R}^m$ e $f : A \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1. Para cada $i = 0, 1, \cdots, p = \min\{m, n\}$, seja A_i o* **interior** *do conjunto dos pontos de A nos quais f tem posto i. Então o conjunto $C = A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_p$ é um aberto* **denso** *em A (i.e. $\overline{C} \supset A$).*

Para funções, $f : A \to \mathbb{R}$ (funções escalares), diferenciáveis, temos que $p = 1$. Se o conjunto C dos pontos críticos (pontos $x \in A$ em que o gradiente

[2] A inclusão $x \in \mathbb{R}^p \mapsto (x, 0) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{p-n}$ não é sobrejetiva.

$\nabla f(x)$ se anula) são isolados (sem ponto de acumulação), então $A_0 = \emptyset$ e $A_1 = \mathbb{R} - C$.

Do Teorema 10 e do TP, temos os seguintes corolários.

Corolário 11. *Se uma aplicação $f : A \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $A \subset \mathbb{R}^m$ é localmente injetiva, então $m \leq n$ e o conjunto dos pontos $x \in A$ nos quais $f'(x)$ é injetiva é denso em A.*

Demonstração. Sejam $A_0, \cdots, A_p$ os conjuntos definidos no Teorema acima, $p = \min\{m, n\}$. Se $m > n$ então $p = n$ e daí, pelo Teorema, existe algum $A_i \neq \emptyset$ com $i < m$. Pelo TP, podemos concluir que $f|A_i$ não seria injetiva[3], negando a hipótese de f ser localmente injetiva. Então, $m \leq n$, e $p = m$. Pelo mesmo argumento, podemos concluir que $A_i = \emptyset$ se $i < m$. Então o conjunto $C = A_0 \cup \cdots \cup A_m$ denso em A reduz-se ao conjunto A_m. □

Analogamente, temos também o corolário seguinte.

Corolário 12. *Se uma aplicação $f : A \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $A \subset \mathbb{R}^m$ é aberta, então $m \geq n$ e o conjunto dos pontos $x \in A$ nos quais $f'(x)$ é sobrejetiva é denso em A.*

Demonstração. Analogamente à demonstração do corolário anterior, sejam $A_0, \cdots, A_p$ os conjuntos definidos no Teorema 10, $p = \min\{m, n\}$. Se $m < n$ então $p = m$ e daí, pelo Teorema 10, existe algum $A_i \neq \emptyset$ com $i < n$. Pelo TP, podemos concluir que $f|A_i$ não seria aberta.[4] Então, $m \geq n$, e $p = n$. Pelo mesmo argumento, podemos concluir que $A_i = \emptyset$ se $i < n$. Então o conjunto $C = A_0 \cup \cdots \cup A_n$ denso em A reduz-se ao conjunto A_n. □

Exercícios[5]

1. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\mathrm{sen}\theta)$ e $U = (0, 1) \times (0, b)$, $b > 0$. Mostre que $V = f(U)$ é um aberto mas $f|U : U \to V$ é um difeomorfismo (de classe C^∞) se, e somente se, $b \leq 2\pi$.

[3] A "projeção" $(x, y) \in \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^{m-1} \mapsto (x, 0) \in \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^{n-i}$ não é injetiva

[4] A inclusão $x \in \mathbb{R}^i \mapsto (x, 0) \in \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^{n-i}$ não é aberta; leva um aberto $U \subset \mathbb{R}^i$ no subconjunto $U \times 0$ do $\mathbb{R}^n$, que tem interior vazio.

[5] Parte da "Lista de Exercícios" para a 2a. prova.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada pela equação $f(x,y) = x^2 + y^2 - 5$. Mostre que as funções $y = g(x) := \sqrt{5 - x^2}$ e $y = \begin{cases} g(x), & \text{se } x \geq 1 \\ -g(x), & \text{se } x < 1 \end{cases}$ são soluções da equação $f(x,y) = 0$ para $x \sim 1$ e $(\partial f/\partial y)(1,2) \neq 0$. Por que isso não contradiz o TAImpl?

3. Seja f a função do Exercício 2. A equação $f(x,y) = 0$ tem solução y para todo x em alguma vizinhança de (algum intervalo aberto contendo) $\sqrt{5}$?

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^3$. Mostre que a equação $f(x,y) = 0$ tem solução única $y = g(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Mostre que a função assim definida é contínua, mas não é diferenciável. Por que isso não contradiz o TAImpl?

5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y^2 - x^4$. Exiba (pelo menos) duas funções diferenciáveis $y = g(x)$ que resolvem a equação $f(x,y) = 0$ para $x \in \mathbb{R}$. Por que isso não contradiz o TAImpl?

6. Mostre que o TAImpl implica o TAInv (logo são equivalentes).
   Dica: Considere a aplicação $\Phi(x,y) = f(x) - y$.

7. Mostre que a aplicação composta de duas imersões é uma imersão. Idem para submersões.

8. Verifique se o caminho (aplicação) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é ou não uma imersão. Faça um esboço da imagem de f.

   (a) $f(t) = (t^3 - t, t^2)$ (b) $f(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$

9. Mostre que toda projeção $\pi : \mathbb{R}^{k+n} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\pi(x,y) = y$, é uma submersão.

10. Mostre a seguinte afirmação de duas maneiras: uma usando a função *determinante*, outra, usando os teoremas FLI e FLS.

    Sejam A um aberto em $\mathbb{R}^m$ e $f : A \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Então o conjunto dos pontos em que f' é injetiva ou sobrejetiva é aberto.

11. Seja $u + iv : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ($i = \sqrt{-1}$) uma função holomorfa ($u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann). Mostre que a função $f = (u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (com funções coordenadas u, v) tem posto em cada ponto do $\mathbb{R}^2$ igual a 0 ou 2.

12. Calcules os conjuntos A_0, A_1, A_2 definidos no Teorema 10 para as seguintes aplicações $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:
(a) $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$; (b) $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \text{sen} y)$;
(c) $f(x, y) = (x^3, y^2)$.

13. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$, onde $x(s, t) = e^s \cos t$, $y(s, t) = e^s \text{sen} t$ e $z(s, t) = t$. Mostre que f é uma imersão, injetiva, de classe C^∞, e que a a sua imagem não é o gráfico de uma função real de duas variáveis.

14. Dê exemplos, em $\mathbb{R}^2$, de uma aplicação C^∞ aberta que não é uma submersão e uma aplicação C^∞ injetiva que não é uma imersão.

15. Seja A um aberto em $\mathbb{R}^m$. Uma imersão $f : A \to \mathbb{R}^n$ que é um homeomorfismo sobre a sua imagem (contínua e tendo uma inversa $f^{-1} : f(A) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ também contínua) chama-se um *megulho* de A em $\mathbb{R}^n$. Se $f : A \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 e, num ponto $a \in A$, a derivada $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tem posto p, então existe um mergulho $\varphi : V \to A$, de classe C^∞, definido num aberto $V \subset \mathbb{R}^p$, tal que $f \circ \varphi$ é um mergulho.