Prova 1, MM425

23 de Abril de 2014

Q	Notas
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
$\sum$	

Nome:____

RA:__ ____

Assinatura:____________________________________

Observação: É proibido desgrampear as folhas da prova. Respostas sem justificativas, ou que não incluam os cálculos necessários, não serão consideradas. Desejo-vos uma boa prova!

(1) (**1 ponto**) Mostre que os espaços vetoriais normados $C[0,1]$ e $L^2[0,2\pi]$ são de dimensão infinita.

(2) (**1 ponto**) Seja $(X, \|\cdot\|)$ espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$ e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X tal que para todos funcionais linear limitados $f : X \to \mathbb{R}$ tem-se

$$|\langle f, x_n \rangle| \leq M_f, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

onde M_f é uma constante que depende de f. Mostre que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|x_n\| \leq C, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

(3) (**2.5 pontos**) Seja $X = C[0,1]$ espaço vetorial normado com a norma $\|x\| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$. Define $T : X \to X$ por $(Tx)(t) = t\int_0^t x(s)ds$. Mostre que $T \in \mathcal{B}(X)$ e calcule $\|T\|$. Mais ainda, prove que $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to X$ existe, e verifica se ele é limitado ou não.

(4) (**2.5 pontos**) Sejam X, Y espaços de Banach e $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Prove que
   (a) Se T é sobrejetivo então T^* é injetivo.
   (b) T^* é sobrejetivo se e somente se T é injetivo e $T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{R}(T), X)$.

(5) (**2 pontos**) Seja $(X, \|\cdot\|)$ espaço de Banach e seja $T \in \mathcal{B}(X)$ com $\|T\| < 1$, então mostre que $I - T$ é inversível e

$$(I-T)^{-1} = I + T + T^2 + T^3 + \cdots$$

e este série converge em $\mathcal{B}(X)$. Mais ainda, prove que

$$\|(I-T)^{-1}\| \leq (1 - \|T\|)^{-1}.$$

(6) (**1 ponto**) Enuncie o Toerema de Gráfico Fechado. Com ajuda de um exemplo, demostre que as hipóteses deste teorema não podem ser enfraquecidas.