MM425: Análise Funcional I
Lista VII

1. Sejam X, Y espaços de Banach e $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Mostre que se $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ então $x_x \rightharpoonup x \Rightarrow Tx_n \to Tx$. Mais ainda, mostre que a reciproca vale se X for reflexivo.

2. Sejam X, Y evn. Mostre que $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ compacto sss T^* é compacto.

3. Sejam H_1, H_2 espaços de Hilbert e $T : H_1 \to H_2$ compacto. Mostre que $R(T)$ e $N(T)^\perp$ são subespaços separaveis de H_2 e H_1 respectivamente.

4. Seja H espaço de Hilbert e $T : H \to H$ compacto e auto-adjunto. Mostre que pelo menos um de $\|T\|$ ou $-\|T\|$ é autovalor de T.

5. Dado uma sequencia $\{\alpha_n\}$ tal que $\alpha_n \to 0$, prove que existe um operador compacto T tal que $\sigma(T) = \{\alpha_n\} \cup \{0\}$.

6. Sejam H espaço de Hilbert, $K \in \mathcal{K}(H)$ e $\{T_n\} \subset \mathcal{B}(H)$ tal que para cada $x \in H$ temos $T_n x \to Tx$, onde $T \in \mathcal{B}(H)$. Mostre que $T_n K \to TK$ na norma.

7. Resolve os seguinte exercícios do livro de Brezis:

   [6.1], [6.2], [6.3], [6.10], [6.20] e [6.24].