# MM425: Análise Funcional I
## Lista VI

1. Seja $H$ espaço de Hilbert e $B : H \times H \to \mathbb{C}$ uma forma sesquilinear tal que
$$|B(x, y)| \le C\|x\|\|y\| \quad \forall\, x, y \in H. \tag{1}$$
Mostre que existe único $T \in \mathcal{B}(H)$ tal que
$$B(x, y) = \langle Tx, y\rangle \qquad \forall\, x, y \in H.$$
Mais ainda, mostre que $\|T\|$ é menor constante $C$ para qual vale (1).

2. Seja $H$ espaço de Hilbert e $\{T_n\} \subset H$ tal que $\{T_n x\}$ converge para cada $x \in H$. Mostre que existe $T \in \mathcal{B}(H)$ tal que $T_n \to T$ fortemente.

3. Sejam $H$ espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(H)$. Mostre que
   (a) Se $T$ é auto-adjunto então $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in H$.
   (b) Se $H$ é de Hilbert complexo, então $T$ é auto-adjunto sss $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in H$.

4. Um isomorfismo de espaços de Hilbert $H_1$ e $H_2$ é um operador $U : H_1 \to H_2$ linear, bijetivo tal que
$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle \qquad \forall x, y \in H_1.$$
Se $U : H_1 \to H_2$ é isomorfismo entre espaços de Hilbert, então mostre que $U^*U = I_{H_1}$ e $UU^* = I_{H_2}$. [Este operador $U$ é chamado unitário.]

5. Seja $H$ espaço de Hilbert. Mostre que $U \in \mathcal{B}(H)$ é unitário se e somente se $U$ é invertible e $U^{-1} = U^*$. Mais ainda, para $U \in \mathcal{B}(H)$ unitário mostre que $\sigma(U) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \|\lambda| = 1\}$.

6. Seja $X$ espaço de Banach e $T \in \mathcal{B}(X)$. Mostre que $\sigma_P(T)$, $\sigma_C(T)$ e $\sigma_R(T)$ são disjuntos.

7. Seja $X$ espaço de Banach e $T \in \mathcal{B}(X)$. Mostre que $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|_{\mathcal{B}(X)}^{\frac{1}{n}}$ existe.

8. Seja $X = L^2[0, 1]$ e $T = \frac{d}{dx}$ com $D(T) = \{f \in C^1[0, 1] : f(0) = f(1) = 0\}$. Mostre que $T$ é não-limitado com domínio denso. Mais ainda mostre que $\lambda \in \sigma_P(T)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Em particular $\rho(T) = \phi$.

9. Seja $X = L^2[0, 1]$ e $T : X \to X$ dado por $(Tf)(t) = tf(t)$. Mostre que $\sigma_P(T) = \phi = \sigma_R(T)$.

10. Para $T : C[0, 2\pi] \to [0, 2\pi]$ dador por $(Tf)t = e^{it}f(t)$, encontre $\sigma_P(T)$, $\sigma_R(T)$ e $\sigma_C(T)$.

11. Seja $H$ espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(H)$. Mostre que $\lambda \in \rho(T)$ se e somente se $T_\lambda := T - \lambda I$ é limitado inferiormente.

12. Seja $H$ espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(H)$ auto-adjunto, então mostre que $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$. Mais ainda, mostre que $\sigma(T) \subset [m, M]$ com $m, M \in \sigma(T)$ onde

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle \qquad e \qquad m = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle.$$

13. Mostre que todo operador limitado positivo no espaço de Hilbert $H$ complexo é auto-adjunto. O que acontece se $H$ for real?

14. Sejam $H = l^2$ e, $T_d$ e $T_e$ operadores de translação a direita e a esquerda resprectivamente. Mostre que o espectro de $T_d$ e $T_e$ são igual da um disco unitário fechado em $\mathbb{C}$.

15. Seja $H$ espaço de Hilbert e $A : H \to H$ um operador linear tal que $D(A) = H$ e $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \ \forall \ x, y \in H$. Então mostre que $A$ é limitado.

16. Seja $X$ de Banach e $T \in \mathcal{B}(X)$. Mostre que todo operador $S \in \mathcal{B}(X)$ que comuta com $T$ tambem comuta com $R_\lambda(T)$ para todo $\lambda \in \rho(T)$.

17. Seja $H$ espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(H)$. Mostre as seguintes.

    (a) $\sigma(T^*T)$ é real e contido em $[0, \infty)$.

    (b) $T \geq 0$ se e somente se $T$ é auto-adjunto e $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.

18. Mostre que se $r(T) > 1$ então a série $\sum_{j=1}^{\infty} T^j$ não converge.