**MM425: Análise Funcional I**
**Lista V**

1. Mostre que $L^p$, $p \neq 2$, não é espaço de Hilbert.

2. Seja $H$ espaço de Hilbert e $M \subset H$. Prove que $M^\perp$ é um subespaço fechado de $H$ e $\overline{M} = (M^\perp)^\perp$.

3. Seja $H$ espaço de Hilbert e $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ qualquer conjunto ortonormal de $H$. Define a aplicação $F : H \to l^2(A)$ por $F(x) = f_x$, onde

$$f_x(\alpha) = x_\alpha = \langle x, u_\alpha \rangle, \qquad \forall\ \alpha \in A.$$

Mostre que $F$ é linear, limitada e sobrejetiva.

4. Sejam $H$ espaço de Hilbert e $\{u_1, \cdots, u_n\} \subset H$ um conjunto ortonormal e $x \in H$. Então mostre que a projeção ortogonal de $x$ sobre $M = [u_1, \cdots, u_n]$ é dada por

$$P_M x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, u_j \rangle u_j.$$

Alem disso,

$$\sum_{j=1}^{n} |\langle x, u_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

5. Aplique o processo de Gram-Schmidt aos vetores $\{1, x, x^2\} \subset L^2([-1, 1], dx)$. Utiliza sua resposta para calcular a distancia de $x^3$ ao espaço gerado por $\{1, x, x^2\}$, i.e., encontre

$$\min_{a,b,c \in \mathbb{C}} \int_{-1}^{1} |x^3 - a - bx - cx^2|^2 dx.$$

6. Mostre que todo espaços de Hilbert separável de dimensão infinita são isomorfos entre eles (i.e, um por outro).

7. Sejam $H$ espaço de Hilbert, $B \subset H$ base ortonormal para $H$ e $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset H$ uma sequência limitada. Mostre que as seguintes são equivalentes:
   (a) $x_n \rightharpoonup x \in H$, $n \to \infty$.
   (b) $\langle x, y \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle x_n, y \rangle$, $\forall\ y \in H$.
   (c) $\langle x, y \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle x_n, y \rangle$, $\forall\ y \in B$.

8. Seja $H$ espaço de Hilbert e $\{x_n\} \subset H$ tal que $x_n \rightharpoonup x \in H$ e $\limsup \|x_n\| \leq \|x\|$. Mostre que $x_n \to x$ fortemente.

9. Seja $H$ espaço de Hilbert. Prove que, usando representação de Riesz-Fréchet, para qualquer operador lienar limitado $A : H \to H$, existe único operador linear limitado $A^* : H \to H$ tal que

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle, \quad \forall\, x, y \in H, \qquad e \quad \|A\| = \|A^*\|.$$

10. Seja $H = L^2(0,1)$ e $A : H \to H$ dado por

$$Af(t) = \int_0^1 K(t,s)f(s)ds.$$

Mostre que o adjunto $A^*$ de $A$ é dado por

$$A^*g(s) = \int_0^1 \overline{K(t,s)}g(t)dt.$$