MM425: Análise Funcional I
Lista IV

1. Seja X espaço de Banach. Seja $(x_n) \subset X$ uma sequência tal que $x_n \rightharpoonup x$ na topologia fraca $\sigma(X, X^*)$. Set
$$y_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$
Mostre que $y_n \rightharpoonup x$ na topologia fraca $\sigma(X, X^*)$.

2. Sejam X espaço de Banach e $A \subset X$ convexo. Prove que o fecho de A na topologia forte e na topologia fraca $\sigma(X, X^*)$ coincidem.

3. Sejam X espaço de Banach e $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \rightharpoonup x$ na topologia fraca $\sigma(X, X^*)$. Mostre que existe $(y_n) \subset X$ tal que
   (a) $y_n \in \operatorname{conv}\Big(\bigcup_{i=n}^{\infty}(x_i)\Big), \qquad \forall\, n$
   (b) $y_n \rightharpoonup x$ fortemente.

4. Sejam X espaços de Banach e $K \subset X$ compacto na topologia forte. Seja $(x_n) \subset K$ tal que $x_n \rightharpoonup x$ na topologia fraca $\sigma(X, X^*)$. Mostre que $x_n \to x$ fortemente.

5. Sejam X espaço topologico e Y de Banach. Sejam $u, v : X \to Y$ aplicações contínuas na topologia fraca $\sigma(Y, Y^*)$.
   (a) Mostre que a aplicação $x \mapsto u(x) + v(x)$ é continua de X para Y na topologia fraca $\sigma(Y, Y^*)$.
   (b) Seja $a : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Prove que $x \mapsto a(x)u(x)$ é contínua de X para Y na topologia fraca $\sigma(Y, Y^*)$

6. Sejam X de Banach, $M \subset X$ um subespaço e $f_0 \in X^*$. Prove que existe $g_0 \in M^\perp$ tal que
$$\inf_{g \in M^\perp} \|f_0 - g\| = \|f_0 - g_0\|.$$

7. Seja X espaço de Banach.
   (a) Seja $(f_n) \subset X^*$ tal que $\forall\, x \in X$, $\langle f_n, x\rangle$ converge para um limite. Prove que existe $f \in X^*$ tal que $f_n \rightharpoonup^* f$ na topologia fraca* $\sigma(X^*, X)$.
   (b) Suponha que X é reflexivo. Seja $(x_n) \subset X$ tal que $\forall\, f \in X^*$, $\langle f, x_n\rangle$ converge para um limite. Prove que existe $x \in X$ tal que $x_n \rightharpoonup x$ na topologia fraca $\sigma(X, X^*)$.

8. Prove que a topologia fraca no evn X é metrizavel se e só se X é de dimensão finita.

9. (a) Prove que se o espaço vetorial normado X é reflexivo então ele é completo fracamente[1].

   (b) Mostre que um espaço de Banach X ou é reflexivo ou duais segundos successivos dele $X^{**}, X^{****}, \ldots$ são todos distintos.

10. Mostre que a seqüência (x_n), $(x_n = (\xi_i^{(n)}))$ em l^p, $(1 < p < \infty)$ converge fracamente a $x_0 = (\xi_i^{(0)})$ em l^p se e somente se

    (a) $(\|x_n\|)$ é limitado.

    (b) Para qualquer i, $\lim_n \xi_i^{(n)} = \xi_i^{(0)}$.

11. Seja X é de Banach tal que toda sequência limitada $(x_n) \subset x$ possui uma subsequência convergente na topologia fraca. Mostre que X é reflexivo.

12. Seja X espaço de Banach de dimensão infinita que satisfaz um dos seguintes hipóteses

    (a) X^* é separável.

    (b) X é reflexivo.

    Mostre que existe uma sequência $(x_n) \subset X$ tal que $\|x_n\| = 1$ e $x_n \rightharpoonup 0$ na topologia fraca $\sigma(X, X^*)$.

13. Seja X espaço de Banach convexo uniformemente. Prove que $\forall\, M > 0$, $\forall\, \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que
$$\|\frac{1}{2}(x+y)\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \delta,$$
    $\forall\, x, y \in X$ com $\|x\| \leq M$, $\|y\| \leq M$ e $\|x - y\| > \epsilon$.

[1] Todas seqüências de Cauchy fraca em X tem limite fraca em X.