MM425: Análise Funcional I
Lista III

1. Seja X espaço de Banach e $T : X \to X^*$ um operador linear tal que

$$\langle Tx, x\rangle \geq 0, \qquad \forall\, x \in X.$$

Mostre que T é limitado.

2. Seja X espaço de Banach e $T : X \to X^*$ um operador linear tal que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle Ty, x\rangle, \qquad \forall\, x, y \in X.$$

Mostre que T é limitado.

3. Sejam X, Y espaços de Banach e $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to Y$ um operador linear densalmente definido e fechado. Mostre que as seguintes são equivalentes.

   (a) $\mathcal{D}(A) = X$

   (b) A é limitado

   (c) $\mathcal{D}(A^*) = Y^*$

   (d) A^* é limitado.

4. Sejam X, Y espaços de Banach.

   (a) Seja $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Mostre que $R(T)$ é fechado se só se existe uma constante $C > 0$ tal que
   $$\operatorname{dist}(x, N(T)) \leq C\|Tx\| \qquad \forall\, x \in X.$$

   (b) Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to Y$ um operador linear e fechado. Mostre que $R(A)$ é fechado se só se existe uma constante $C > 0$ tal que
   $$\operatorname{dist}(u, N(A)) \leq C\|Au\| \qquad \forall\, u \in \mathcal{D}(A).$$

   (Dica: Em (a) use espaço quociente $X/N(T)$. Em (b) considere $T : \mathcal{D}(A) \to Y$, $\mathcal{D}(A)$ com a norma de gráfico e $T = A$.)

5. Seja X espaço de Banach e $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X^*$ um operador linear densalmente definido. Suponha que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\langle Au, u\rangle \geq -C\|Au\|^2, \qquad \forall\, u \in \mathcal{D}(A). \tag{1}$$

Mostre que $N(A) \subset N(A^*)$.

Reciprocamente, suponha que $N(A) \subset N(A^*)$, A é fechado e $R(A)$ também é fechado. Prove que existe uma constante $C > 0$ tal que (1) vale.

6. Sejam X, Y, Z espaços de Banach, $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ e $S \in \mathcal{B}(Y,Z)$. Mostre que

$$(S \circ T)^* = T^* \circ S^*.$$

Mais ainda, supondo que $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ é bijetivo, mostre que T^* é bijetivo e

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

7. Seja $T : l^1 \to l^\infty (= {l^1}^*)$ definido por

$$Tu = \left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\geq 1}, \qquad \forall\, u = (u_n)_{n\geq 1} \in l^1.$$

Verifique que $T \in \mathcal{B}(l^1, l^\infty)$ e determine $N(T)$, $N(T)^\perp$, T^*, $R(T^*)$ e $\overline{R(T^*)}$.