MM425: Análise Funcional I
Lista II

1. Seja X evn de dimensão infinita. Construa um funcional linear $f : X \to \mathbb{R}$ que não seja contínua.

2. Mostre que um funcional f em evn é limitado sss $f^{-1}(\{0\})$ é fechado.

3. Seja X evn e $M \subset X$ um subespaço de dimensão finita. Então existe um subespaço fechado $N \subset X$ tal que $M \cap N = \{0\}$ e $M + N = X$.

4. Mostre que c_0, l^1 e $C[a, b]$ não são reflexivos.

5. Mostre que se um espaço vetorial X é reflexivo, então X^* também é refelxivo.

6. Seja $M = \{f \in L^2([0,1]) / f([0,1]) \subset [0,1], \text{ quase sempre}\}$. Mostre que M é um convexo fechado em $L^2([0,1])$.

7. Seja $c = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,/\, x_n \in \mathbb{R} \text{ e } (x_n) \text{ converge}\}$. Mostre que
   (a) $c_0 \subset c$ é um subespaço fechado que é nuca denso.
   (b) $c \subset l^\infty$ é um subespaço fechado que é nuca denso.

8. Seja X evn. Demonstre que qualquer subespaço fechado próprio de X é um conjunto nuca denso.

9. Seja X espaço de Banach com dimensão infinita. Então mostre que uma base de Hamel de X não é contável.

10. Sejam X, Y espaços de Banach e $a : X \times Y \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear satisfazendo:
    (a) para cada $x \in X$ fixado, $y \mapsto a(x, y)$ é contínua.
    (b) para cada $y \in Y$ fixado, $x \mapsto a(x, y)$ é contínua.

    Prove que, existe uma constante $C > 0$ tal que
    $$|a(x, y)| \leq C\|x\|\|y\|.$$

11. Seja $X = C[0, \pi]$ equipado com a norma $\|\cdot\|_{L^1}$. Considere a forma bilinear $a : X \times Y \to \mathbb{R}$ definida por
    $$a(f, g) := \int_0^\pi f(t)g(t)dt.$$
    Utilizando a sequencia
    $$f_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n}\sin(nt), & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{n}, \\ 0, & \frac{\pi}{n} \leq t \leq \pi, \end{cases}$$
    verifique que a não é contítua. Este resultado não contradiz o exercício anterior?

12. Prove o Teorema de Hahn-Banach para evn separáveis sem utilizar o Lema de Zorn.

13. Seja X evn e $M_0 \subset X$ subespaço. Mostre que para cada $T_0 \in \mathcal{B}(M_0, l^\infty)$, existe $T \in \mathcal{B}(X, l^\infty)$ tal que

    (a) $Tx = T_0 x$, $\forall\ x \in M_0$.

    (b) $\|T\| = \|T_0\|$.

14. Seja X evn. Mostre que se X^* é separavel, então X também é separavel, mas a recíproca não é verdade.

15. Mostre que a conclusão de Príncipio de Limitação Uniforme pode não valer se o domínio de operadores não for completo.

16. Mostre que o Teorema de Aplicação Aberta e o Teorema de Gráfico Fechado não valem se os evn X e/ou Y não são de Banach.

17. Seja $Y = C[0,1]$ e seja X o subespaço de funções $f \in C[0,1]$ que são continuamente deriváveis em $[0,1]$ ($f'(0)$ e $f'(1)$ são derivadas laterais). Seja $T : X \to Y$ definido por $Tf = f'$. Mostre que

    (a) T é um operador linear descontínuo (Lista -I).

    (b) O gráfico de T é fechado em $X \times Y$.

    Explique, porque as conclusões deste exercício não contradizem o Teorema de Gráfico Fechado.

18. Sejam X, Y espaços de Banach e seja $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ um operador sobrejetivo.

    (a) Dada uma sequência limitada $(y_n) \subset Y$, prove que existe uma sequencia limitada $(x_n) \subset X$ tal que $Tx_n = y_n$ para cada n.

    (b) Dada uma sequência (y_n) que converge a $0 \in Y$, prove que existe uma sequencia (x_n) que converge a $0 \in X$ tal que $Tx_n = y_n$ para cada n.

19. Seja X espaço de Banach e seja $(\phi_j) \subset X^*$ tal que para cada $x \in X$,

    $$\sum_{j=1}^{\infty} |\phi_j(x)| < \infty.$$

    Seja $T : X \to l^1$ definido por $Tx = (\phi_j(x))_{j=1}^{\infty}$, para cada $x \in X$. Use o Teorema de Gráfico Fechado para mostrar que $T \in \mathcal{B}(X, l^1)$.

20. Resolve os seguintes Exercícios de Livro de Brezis:

    1.1 a 1.8, 1.14 a 1.17 e 2.3.