Lista de Exercícios 4

1. a. Defina o elipsóide em $\mathbb{R}^n$ como $\left\{(x_1, ..., x_n) | \sum_{i=1}^{n} a_i^2 x_i^2 = 1\right\}, a_i \neq 0, \forall i.$
   Escreva o volume delimitado pelo elipsóide em função do volume da bola unitária centrada na origem.

   b. (Em $\mathbb{R}^3$) Escreva o volume delimitado pelo toro de raios $a, b, a > b > 0$ em função do volume delimitado pelo cilindro de raio da base e altura unitários.

2. Definimos um fluxo de difeomorfismos em $\mathbb{R}^n$ como uma família $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ tal que, para cada t, $\phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo.

   a. Dê condições necessárias e suficientes para um fluxo de difeomorfismos preservar volumes. (Demonstre suas afirmações).

   b. Construa um fluxo de difeomorfismos distintos $\{\phi_t\}_{t\geq 0}$ que preserva volumes mas para o qual ϕ_t não é uma isometria para nenhum $t > 0$. (Sugestão: controle o comportamento dos retângulos sob o fluxo.)

   c. Se $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ é um fluxo de difeomorfismos que preserva volumes, $\lim\limits_{t\to\infty} \phi_t$ é um difeomorfismo? Preserva volumes? (Considere o limite pela convergência pontual).

3. Se $\phi : A \subset \mathbb{R}^n \to \phi(A)$, A aberto, é um difeomorfismo e $v(A)$ é finito, $v(\phi(A))$ é finito? Discuta a extensão que foi feita na definição de integral para que essa pergunta faça sentido.