MM720: Análise no $\mathbb{R}^n$
Lista II

Como foi comunicado em aula, todos os exercícios do livro texto devem ser resolvidos. Abaixo estou indicando alguns exercícios do livro texto (Munkres) para entregar.

1. Exercícios (Página 48) 1, 3, 5, 7
2. Exercícios (Página 54) 1, 2, 3, 5, 7, 8, 10
3. Exercícios (Página 63) 1, 3, 4
4. Exercícios (Página 70) 1, 2, 3, 4, 5
5. Exercícios (Página 78) 1, 2, 3, 4, 5, 6

Entregar os seguintes exercícios para o Vladmir Sicca.

1. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^2, com $F(u,v) = (F_1(u,v), F_2(u,v))$ e defina:

$$G(x,y,z) = F(x^2 + 3yz + 1, z^2 + 2) := (G_1(x,y,z), G_2(x,y,z))$$

Temos que:

$$DF(1,2) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \ \operatorname{Hess} F_1(1,2) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ * & 4 \end{bmatrix}, \ \operatorname{Hess} F_2(1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ * & 1 \end{bmatrix}$$

sendo $\operatorname{Hess} f(x,y)$ a matriz Hessiana da função f no ponto (x,y)

a) Complete as matrizes Hessianas das funções coordenadas de F no ponto $(1,2)$. Justifique.

b) Calcule $D_3 D_2 G_1(0,0,0)$.

2. Podemos definir uma hipersuperfície regular parametrizada S em $\mathbb{R}^n$ como a imagem de uma função $F : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k, com U um aberto tal que DF é injetora em cada ponto. Prove que S pode ser localmente escrita como o gráfico de uma função $G : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$. Explique com detalhes matemáticos o que isso quer dizer.

3. Sejam $f_1(x,y) = x^2 + y^2$, $f_2(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ e $f_3(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

a) Desenhe os gráficos das funções f_1, f_2 e f_3.

b) Enuncie o Teorema da Função Implícita. A quais das funções f_i o teorema se aplica?

c) Nos casos em que o teorema se aplica, ele define uma curva. Qual?

d) Explique geometricamente o porquê das hipóteses do Teorema da Função Implícita, pelo menos para funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$.